# 考卷Ⅰ　小题·每题练

## 小题1　集合与简易逻辑

1. A ［解析］集合 $M=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right.\right\}$，$N=\{x\mid x^2\leqslant x\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $M\cap N=\left\{x\left|0\leqslant x<\frac{1}{2}\right.\right\}$，故选 A.

2. D ［解析］图中阴影部分表示的集合为 $B\cap(\complement_U A)$，解一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 得 $x=-2$ 或 $x=1$，即 $A=\{-2,1\}$，则 $\complement_U A=\{-1,0,2\}$，又 $B=\{0,-2\}$，则 $B\cap(\complement_U A)=\{0\}$，故选 D.

3. B ［解析］∵$A\cap B$ 有 4 个子集，∴$A\cap B$ 中有 2 个不同的元素，∴$a\in A$，∴$a^2-3a<0$，解得 $0<a<3$，又 $a\neq 1$，故实数 $a$ 的取值范围是 $(0,1)\cup(1,3)$，故选 B.

4. A ［解析］若 $a>b+1$ 成立，则 $|a|>b+1$ 必成立；
反过来，若 $|a|>b+1$ 成立，则不一定有 $a>b+1$，如 $|-5|>3+1$，但 $-5>3+1$ 不成立.
故“$a>b+1$”是“$|a|>b+1$”的充分不必要条件.

5. B ［解析］若 $a\perp b$，$b\perp l$，但 $a/\!/l$，则 $b$ 与 $\alpha$ 不一定垂直，即 $\alpha,\beta$ 不一定垂直. 若 $\alpha\perp\beta$，因为平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 相交于直线 $l$，直线 $b$ 在平面 $\beta$ 内，且 $b\perp l$，所以 $b\perp\alpha$，又直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内，所以 $a\perp b$，故“$a\perp b$”是“$\alpha\perp\beta$”的必要不充分条件. 故选 B.

6. C ［解析］因为函数 $y=3^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以“$3^a>3^b$”与“$a>b$”等价. 因为函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以“$a^3>b^3$”与“$a>b$”等价. 故“$3^a>3^b$”是“$a^3>b^3$”的充要条件，故选 C.

7. C ［解析］由题意可知 $a_n>0$，$q>0$. 由 $S_{2016}+S_{2018}>2S_{2017}$ 可得 $S_{2018}-S_{2017}>S_{2017}-S_{2016}$，即 $a_{2018}>a_{2017}$，即 $q>1$，故“$q>1$”是“$S_{2016}+S_{2018}>2S_{2017}$”的充要条件.

8. D ［解析］若 $f(x)=\begin{cases}x,x\notin\mathbf{Z},\\1,x\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 则 $a_n=1$，数列 $\{a_n\}$ 为周期数列，而函数 $f(x)$ 不是周期函数. 若 $f(x)=\sin x$，则 $a_n=f(n)=\sin n$，$f(x)=\sin x$ 为周期函数，而数列 $\{a_n\}$ 不是周期数列. 故选 D.

9. $(0,4]$　$(0,2)$ ［解析］因为 $A=\{y\mid y=3^x,x\leqslant 1\}=\{y\mid 0<y\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x^2-6x+8\leqslant 0\}=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$，所以 $A\cup B=(0,4]$.
又因为 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<2$ 或 $x>4\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(0,2)$.

10. 3 ［解析］∵函数 $y=x^3$ 的图像与直线 $y=x$ 有 3 个交点，且这 3 个交点的坐标分别为 $(-1,-1)$，$(0,0)$，$(1,1)$，∴集合 $A\cap B$ 中有 3 个元素.

11. $\{0,2,4,6\}$ ［解析］由题意知 $U=A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$. 由 $A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5\}$，得元素 1,3,5 不在集合 $B$ 内. 若元素 0 不在集合 $B$ 内，则由 $A\cup B=U$，得元素 0 在集合 $A$ 内，则 $0\in A\cap(\complement_U B)$，与题意不符，所以元素 0 在集合 $B$ 内，同理可得元素 2，4，6 也在集合 $B$ 内，所以 $B=\{0,2,4,6\}$.

12. 充要 ［解析］由 $2^a>2^b>2\Leftrightarrow a>b>1$，$\log_{\frac{1}{2}}(a-1)<\log_{\frac{1}{2}}(b-1)\Leftrightarrow a-1>b-1>0\Leftrightarrow a>b>1$，得“$2^a>2^b>2$”是“$\log_{\frac{1}{2}}(a-1)<\log_{\frac{1}{2}}(b-1)$”的充要条件.

13. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ ［解析］由 $|3-2x|\leqslant 1$ 得 $1\leqslant x\leqslant 2$，故 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，由题意可知，当 $x\in[1,2]$ 时，$a>\frac{1}{x+1}$ 恒成立，则 $a>\left(\frac{1}{x+1}\right)_{\max}$，故 $a>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，即实数 $a$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

## 小题2　函数的概念与性质

1. B ［解析］由 $\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\x-1>0\end{cases}$ 得 $1<x\leqslant 2$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(1,2]$，令 $1<\frac{x}{2}\leqslant 2$，得 $2<x\leqslant 4$，故 $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域为 $(2,4]$. 故选 B.

2. C ［解析］$y=\cos x$ 是偶函数，但在 $(0,+\infty)$ 上不具有单调性，所以选项 A 不满足题意；$y=1-x^2$ 是偶函数，但在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，所以选项 B 不满足题意；$y=\log_2|x|$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以选项 C 满足题意；令 $f(x)=e^x-e^{-x}$，则 $f(-x)=e^{-x}-e^x=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$，所以 $y=e^x-e^{-x}$ 是奇函数，所以选项 D 不满足题意. 故选 C.

3. D ［解析］当 $x>0$ 时，$f(x)=x-\frac{1}{x}$，此时 $f(x)$ 为增函数，排除 A，B；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x-\frac{1}{x}>0$ 恒成立，排除 C. 故选 D.

4. D ［解析］当 $x_1+x_2=2$ 时，$f(x_1)+f(x_2)=\frac{a}{1-x_1}+b\cos\frac{\pi}{2}x_1+x_1+\frac{a}{1-x_2}+b\cos\frac{\pi}{2}x_2+x_2=\frac{a}{1-x_1}+b\cos\frac{\pi}{2}x_1+x_1+\frac{a}{x_1-1}+b\cos\frac{\pi}{2}(2-x_1)+x_2=x_1+x_2=2$，因为 $1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2$，所以 $f(1+\sqrt{2})=2-f(1-\sqrt{2})=-1$.

5. D ［解析］根据 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称可知该函数为奇函数. 对于 A 选项，$f(-x)=(-x)^2\ln|-x|=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数，不符合题意；对于 B 选项，$f(x)=x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，不符合题意；对于 C 选项，$f(x)$ 为奇函数，但当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，不符合题意；对于 D 选项，$f(-x)=\frac{\ln|-x|}{-x}=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，符合题意. 故选 D.

6. A ［解析］$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1}-\frac{1}{2},|x|>1,\\\frac{1}{2},|x|\leqslant 1,\end{cases}$ 故 $f(x)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，所以 $f[f(x)]=\frac{1}{2}$，故函数 $y=f[f(x)]$ 既是偶函数也是周期函数，故选 A.

7. A ［解析］∵$a>b>c$，$a+b+c=0$，∴$a>0$，$c<0$，$b=-a-c$，∴$\frac{c}{a}<0$. 由根与系数的关系可知 $x_1+x_2=\frac{a-b}{a}=\frac{2a+c}{a}=2+\frac{c}{a}$，$x_1x_2=\frac{c-b}{a}=\frac{a+2c}{a}=1+\frac{2c}{a}$，
∴$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(2+\frac{c}{a}\right)^2-4\left(1+\frac{2c}{a}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}=\left(\frac{c}{a}-2\right)^2-4$.
由 $x_1+x_2=\frac{a-b}{a}>0$ 得 $2+\frac{c}{a}>0$，故 $-2<\frac{c}{a}<0$.
由 $x_1x_2=\frac{c-b}{a}<0$ 得 $1+\frac{2c}{a}<0$，即 $\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$，
∴$-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$，∴$\left(\frac{c}{a}-2\right)^2-4\in\left(\frac{9}{4},12\right)$，
∴$|x_1-x_2|\in\left(\frac{3}{2},2\sqrt{3}\right)$. 故选 A.

8. B ［解析］因为对任意的 $x\in(1,a)$，不等式 $f(x)\geqslant(a-1)x$ 恒成立，所以 $f(x)=2|x^2-x+a|+|x^2-4x+a|\geqslant(a-1)x$ 对任意的 $x\in(1,a)$ 恒成立，即 $a-1\leqslant 2\left|x+\frac{a}{x}-1\right|+\left|x+\frac{a}{x}-4\right|$ 对任意的 $x\in(1,a)$ 恒成立.
令 $g(x)=x+\frac{a}{x}$，则由对勾函数的性质知，当 $x\in(1,\sqrt{a})$ 时，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(\sqrt{a},a)$ 时，$g(x)$ 单调递增.
故 $g(x)$ 的最小值为 $g(\sqrt{a})=\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}=2\sqrt{a}$.
令 $t=x+\frac{a}{x}$，则 $t\in[2\sqrt{a},a+1)$，其中 $a>1$.
令 $h(t)=2|t-1|+|t-4|=2t-2+|t-4|$，
当 $a\geqslant 4$ 时，$t\geqslant 4$，$h(t)=3t-6$，所以 $h(t)$ 的最小值为 $6\sqrt{a}-6$，由 $a-1\leqslant 6\sqrt{a}-6$，得 $a^2-26a+25\leqslant 0$，解得 $1\leqslant a\leqslant 25$，此时 $4\leqslant$

$a\leqslant 25$.

当 $3<a<4$ 时，$h(t)=\begin{cases}3t-6,4\leqslant t<a+1,\\ t+2,2\sqrt{a}\leqslant t<4,\end{cases}$ 所以 $h(t)$ 的最小值为 $2\sqrt{a}+2$，由 $a-1\leqslant 2\sqrt{a}+2$，得 $a^2-10a+9\leqslant 0$，解得 $1\leqslant a\leqslant 9$，此时 $3<a<4$.

当 $1<a\leqslant 3$ 时，$t<4$，$h(t)=t+2$，所以 $h(t)$ 的最小值为 $2\sqrt{a}+2$，由 $a-1\leqslant 2\sqrt{a}+2$，得 $a^2-10a+9\leqslant 0$，解得 $1\leqslant a\leqslant 9$，此时 $1<a\leqslant 3$.

综上可知，$1<a\leqslant 25$，故选 B.

9\. 2　$-1$　［解析］函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leqslant 0,\\ \log_2(x+1),x>0,\end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=f(9-6)=f(3)=\log_2 4=2$.

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0]$ 上单调递增，$\therefore f(x)\geqslant f(-1)=1-2=-1$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)>\log_2 1=0$.

综上，函数 $f(x)$ 的最小值为 $-1$.

10\. 1　$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right]$　［解析］由题意知，$f(-x)=\ln(e^{-2x}+1)+mx=\ln(e^{2x}+1)-mx$，

$\therefore 2mx=\ln(e^{2x}+1)-\ln(e^{-2x}+1)=2x$，$\therefore m=1$.

$\because a^2+ab+4b^2\leqslant m$，$a^2+4b^2\geqslant 4|ab|$，当且仅当 $|a|=2|b|$ 时，等号成立，$\therefore 4|ab|+ab\leqslant 1$，解得 $-\frac{1}{3}\leqslant ab\leqslant \frac{1}{5}$.

11\. $12-8\sqrt{2}$　［解析］当 $\frac{a}{2}\leqslant 0$，即 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-ax\geqslant 0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立，

$\therefore$ 当 $x\in[0,2]$ 时，$|f(x)|=f(x)$，又 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，

$\therefore |f(x)|_{\max}=f(x)_{\max}=f(2)=2^2-2a=4-2a$，

$\therefore k\leqslant 4-2a$ 对任意的 $a\leqslant 0$ 恒成立，$\therefore k\leqslant 4$.

当 $\frac{a}{2}\geqslant 2$，即 $a\geqslant 4$ 时，$f(x)=x^2-ax\leqslant 0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立，

$\therefore$ 当 $x\in[0,2]$ 时，$|f(x)|=-f(x)$，又 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，

$\therefore |f(x)|_{\max}=-f(x)_{\min}=-f(2)=-2^2+2a=-4+2a$，$\therefore k\leqslant -4+2a$ 对任意的 $a\geqslant 4$ 恒成立，$\therefore k\leqslant 4$.

当 $0<\frac{a}{2}<1$，即 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\frac{a}{2},2\right]$ 上单调递增，且 $f(x)\leqslant 0$ 在 $[0,a]$ 上恒成立，$f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,2]$ 上恒成立，

$\therefore |f(x)|_{\max}=\max\left\{f(2),-f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}$.

当 $-f\left(\frac{a}{2}\right)-f(2)=\frac{a^2}{4}+2a-4\geqslant 0$，即 $2>a\geqslant -4+4\sqrt{2}$ 时，

$|f(x)|_{\max}=-f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$，

$\therefore k\leqslant \frac{a^2}{4}$ 对任意的 $2>a\geqslant -4+4\sqrt{2}$ 恒成立，$\therefore k\leqslant 12-8\sqrt{2}$.

当 $-f\left(\frac{a}{2}\right)-f(2)=\frac{a^2}{4}+2a-4<0$，即 $0<a<-4+4\sqrt{2}$ 时，

$|f(x)|_{\max}=4-2a$，

$\therefore k\leqslant 4-2a$ 对任意的 $0<a<-4+4\sqrt{2}$ 恒成立，$\therefore k\leqslant 12-8\sqrt{2}$.

当 $1\leqslant \frac{a}{2}<2$，即 $2\leqslant a<4$ 时，$|f(x)|_{\max}=-f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$，

$\therefore k\leqslant \frac{a^2}{4}$ 对任意的 $2\leqslant a<4$ 恒成立，$\therefore k\leqslant 1$.

综上所述，$k\leqslant 12-8\sqrt{2}$，故实数 $k$ 的最大值为 $12-8\sqrt{2}$.

12\. $\left[\frac{15}{8},\frac{19}{10}\right)\cup\left(\frac{13}{5},\frac{21}{8}\right]$　［解析］令 $t=x+\frac{1}{x}$，因为 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，所以 $t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$. 令 $g(t)=|t-a|$，$t\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$.

由已知可得 $\begin{cases}g(t)_{\max}\geqslant 5g(t)_{\min},\\ g(t)_{\max}<6g(t)_{\min},\end{cases}$

当 $2\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$ 时，$g(t)_{\min}=0$，不可能有 $g(t)_{\max}<6g(t)_{\min}$，

所以 $a<2$ 或 $a>\frac{5}{2}$.

当 $a<2$ 时，$g(t)_{\max}=g\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}-a$，$g(t)_{\min}=g(2)=2-a$，

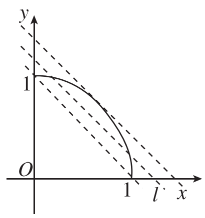
所以 $\begin{cases}\frac{5}{2}-a\geqslant 5(2-a),\\ \frac{5}{2}-a<6(2-a),\end{cases}$ 解得 $\frac{15}{8}\leqslant a<\frac{19}{10}$；

当 $a>\frac{5}{2}$ 时，$g(t)_{\max}=g(2)=a-2$，$g(t)_{\min}=g\left(\frac{5}{2}\right)=a-\frac{5}{2}$，

所以 $\begin{cases}a-2\geqslant 5\left(a-\frac{5}{2}\right),\\ a-2<6\left(a-\frac{5}{2}\right),\end{cases}$ 解得 $\frac{13}{5}<a\leqslant\frac{21}{8}$.

综上，$a\in\left[\frac{15}{8},\frac{19}{10}\right)\cup\left(\frac{13}{5},\frac{21}{8}\right]$.

13\. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　［解析］设 $y_1=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$，$y_2=ax+b$，$f(x)=|\sqrt{1-x^2}-(ax+b)|=|y_1-y_2|$，作出曲线 $y_1=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$，如图所示，设与直线 $x+y=1$ 平行且与曲线 $y_1=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$ 相切的直线为 $l$，易得直线 $l$ 的方程为 $x+y=\sqrt{2}$，由数形结合可知，当 $M(a,b)$ 取到最小值时，直线 $y_2=ax+b$ 与直线 $l$ 平行，且到直线 $l$ 与直线 $x+y=1$ 的距离相等，此时 $a=-1$，$b=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，又直线 $l$ 与直线 $y_2=ax+b$ 之间的距离为 $\frac{\left|\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$，故 $M(a,b)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.




## 小题 3　基本初等函数

1\. C　［解析］$f(-2)=\ln|-2|=\ln 2$，$f[f(-2)]=f(\ln 2)=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$.

2\. B　［解析］$\because 2^x=7^{2y}=A$，$\therefore x=\log_2 A$，$y=\log_{49}A$，又 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$，$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_A 2+\log_A 49=\log_A 98=2$，

$\therefore A^2=98$，又 $\because A>0$，$\therefore A=7\sqrt{2}$. 故选 B.

3\. C　［解析］因为 $\log_8 3=p$，所以 $\lg 3=3p\lg 2$，因为 $\log_3 5=q$，所以 $\lg 5=q\lg 3$，所以 $\lg 5=3pq\lg 2=3pq(1-\lg 5)$，所以 $\lg 5=\frac{3pq}{1+3pq}$，故选 C.

4\. B　［解析］由 $\log_a 2<0$，$\log_b 2<0$ 得 $0<a<1$，$0<b<1$，由 $\log_a 2<\log_b 2$ 得 $a>b$，所以 $0<b<a<1$，故选 B.

5\. B　［解析］由函数 $f(x)=\log_a x$ 是增函数知 $a>1$.

$f(|x|+1)=\log_a(|x|+1)=\begin{cases}\log_a(x+1),x\geqslant 0,\\ \log_a[-(x-1)],x<0,\end{cases}$ 结合对数函数的图像知选 B.

6\. A　［解析］$f_3(x)=\log_2 x^2$ 是偶函数，而其他函数的图像无论怎样平移都得不到偶函数的图像，故其他函数的图像经过平移后不可能与 $f_3(x)$ 的图像重合，故排除选项 B，D；$f_4(x)=\log_2(2x)=1+\log_2 x$，将 $f_2(x)=\log_2(x+2)$ 的图像沿 $x$ 轴向右平移 2 个单位长度，得到 $y=\log_2 x$ 的图像，再沿 $y$ 轴向上平移 1 个单位长度，即可得到 $f_4(x)=\log_2(2x)=1+\log_2 x$ 的图像，根据“同形”函数的定义可知选项 A 正确.

7\. C　［解析］显然有 $a>0$，$b>0$，排除 A，D；

设 $\frac{a}{b}=t$，则 $a=bt$. 若 $\ln a-\ln b=a-3b$，

则 $\ln t=bt-3b$，故 $b=\frac{\ln t}{t-3}$，由 $b=\frac{\ln t}{t-3}>0$，

得 $0<t<1$ 或 $t>3$，不能确定 $a<b$，排除 B；

若 $\ln a-\ln b=3b-a$，则 $\ln t=3b-bt$，故 $b=\frac{\ln t}{3-t}$，

由 $b=\frac{\ln t}{3-t}>0$，得 $1<t<3$，即 $3>\frac{a}{b}>1$，所以 $a>b$，故 C 正确. 故选 C.

8. B ［解析］$\log_{2017}2018=\frac{\ln 2018}{\ln 2017}$，$\log_{2018}2019=\frac{\ln 2019}{\ln 2018}$，要比较 $\log_{2017}2018$，$\log_{2018}2019$ 的大小，

只需要比较 $(\ln 2018)^2$ 与 $\ln 2017\ln 2019$ 的大小.

因为 $\ln 2017\ln 2019<\left(\frac{\ln 2017+\ln 2019}{2}\right)^2=\left[\frac{\ln(2018^2-1)}{2}\right]^2<\left(\frac{\ln 2018^2}{2}\right)^2=(\ln 2018)^2$，

所以 $\log_{2017}2018=\frac{\ln 2018}{\ln 2017}>\frac{\ln 2019}{\ln 2018}=\log_{2018}2019$.

要比较 $\frac{2019}{2018}$，$\log_{2018}2019=\frac{\ln 2019}{\ln 2018}$ 的大小，只需要比较 $\frac{\ln 2018}{2018}$，$\frac{\ln 2019}{2019}$ 的大小.

构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，所以 $\frac{\ln 2018}{2018}>\frac{\ln 2019}{2019}$，即 $\frac{2019}{2018}>\log_{2018}2019$.

要比较 $\frac{2019}{2018}$，$\log_{2017}2018=\frac{\ln 2018}{\ln 2017}$ 的大小，只需要比较 $\frac{\ln 2017}{2018}$，$\frac{\ln 2018}{2019}$ 的大小.

构造函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$，

令 $h(x)=1+\frac{1}{x}-\ln x$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$，所以 $h(x)$ 在定义域上单调递减，

当 $x\geqslant 2017$ 时，$h(x)=1+\frac{1}{x}-\ln x\leqslant h(2017)<0$，

所以 $g(x)=\frac{\ln x}{x+1}$ 在 $[2017,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\frac{\ln 2017}{2018}>\frac{\ln 2018}{2019}$，即 $\frac{2019}{2018}>\log_{2017}2018$.

综上，$\log_{2018}2019<\log_{2017}2018<\frac{2019}{2018}$，故选 B.

9. 1 ［解析］设 $\log_2 a=\log_5 b=\lg(a+b)=k$，则 $a=2^k$，$b=5^k$，$a+b=10^k$，所以 $ab=2^k\times 5^k=10^k$，所以 $a+b=ab$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=1$.

10. 3 1 ［解析］因为 $a>b>1$，所以 $\log_b a>1$，则由 $\log_a b+\log_b a^2=\frac{1}{\log_b a}+2\log_b a=\frac{19}{3}$，得 $\log_b a=3$，即 $b^3=a$，则 $\frac{a}{b^3}=1$.

11. $\left(1,\frac{8}{3}\right)$ ［解析］当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_a(8-ax)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，

若 $f(x)>1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，则 $8-2a>0$ 且 $f(x)_{\min}=\log_a(8-2a)>1$，解得 $1<a<\frac{8}{3}$.

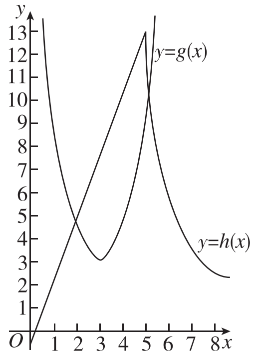
当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数，

若 $f(x)>1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，则 $8-2a>0$ 且 $f(x)_{\min}=\log_a(8-a)>1$，即 $8-2a>0$ 且 $8-a<a$，无解.

综上可知，实数 $a$ 的取值范围是 $\left(1,\frac{8}{3}\right)$.

12. 1 ［解析］$\frac{1}{\mathrm{e}^{3y}}-27y^3-3y+1=0$ 等价于 $\mathrm{e}^{-3y}+(-3y)^3+(-3y)+1=0$，又 $\mathrm{e}^x+x^3+x+1=0$，所以 $x=-3y$，即 $x+3y=0$，所以 $\mathrm{e}^{x+3y}=\mathrm{e}^0=1$.

13. $\ln 2+\frac{9}{2}$ ［解析］由题意可得 $g(x)=f(x-3)+2=\mathrm{e}^{|x-3|}+2$，在同一直角坐标系中分别作出 $g(x)$，$h(x)$ 的图像，如图所示，由图可知，当 $3\leqslant x\leqslant 5$ 时，$h(x)>g(x)$，当 $x>5$ 时，若 $h(x)\geqslant g(x)$，则 $4\mathrm{e}^{6-x}+2\geqslant \mathrm{e}^{x-3}+2$，即 $4\geqslant \mathrm{e}^{2x-9}$，解得 $x\leqslant \ln 2+\frac{9}{2}$，因此，若对任意的 $x\in[3,\lambda](\lambda>3)$，都有 $h(x)\geqslant g(x)$，则实数 $\lambda$ 的最大值为 $\ln 2+\frac{9}{2}$.

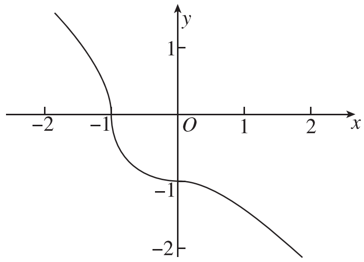



## 小题 4 函数的图像与方程

1. C ［解析］$f(-x)=|-x|\sin(-2x)=-|x|\sin 2x=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数，其图像关于原点对称，排除 B，D；当 $x=\pi$ 时，$f(\pi)=\pi\sin 2\pi=0$，排除 A. 故选 C.

2. C ［解析］当 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 时，原方程可化为 $x^2+y^2=-1$，无解；当 $x<0$，$y>0$ 时，原方程可化为 $x^2-y^2=1$；当 $x\leqslant 0$，$y\leqslant 0$ 时，原方程可化为 $x^2+y^2=1$；当 $x>0$，$y<0$ 时，原方程可化为 $y^2-x^2=1$.

作出函数 $y=f(x)$ 的图像，如图所示.




由图像可知，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，所以①正确；

由 $F(x)=0$ 得 $f(x)=-x$，又直线 $y=-x$ 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 和 $y^2-x^2=1$ 的渐近线，所以 $F(x)$ 无零点，所以②错误；

$y=f(|x|)$ 为偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$y=f(|x|)$ 的图像与 $y=f(x)$ 的图像重合，易得 $y=f(|x|)$ 的最大值为 $-1$，所以③错误；

曲线 $h(x,y)=0$ 关于原点对称的曲线的方程为 $h(-x,-y)=0$，又 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称，所以 $y=g(x)$ 的图像由方程 $x|x|+y|y|=1$ 确定，所以④正确. 故选 C.

3. A ［解析］记 $g(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}$，则 $g(-x)=\frac{1-3^{-x}}{1+3^{-x}}=\frac{3^x-1}{3^x+1}=-\frac{1-3^x}{1+3^x}=-g(x)$.

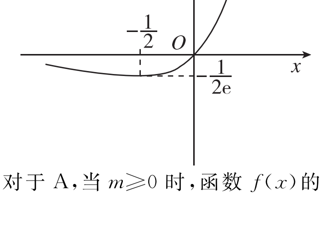
对于 A，B，图像关于 $y$ 轴对称，所以 $f(x)$ 是偶函数，则有 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=-\frac{1-3^x}{1+3^x}\sin 2x$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$，所以 A 不可能，B 有可能.

对于 C，D，图像关于原点对称，所以 $f(x)$ 是奇函数，则有 $\alpha=0$ 或 $\pi$，$f(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}\cos 2x$ 或 $f(x)=-\frac{1-3^x}{1+3^x}\cos 2x$，故 C，D 都有可能. 故选 A.

4. D ［解析］$\because f(x)=x\mathrm{e}^{2x}$，$\therefore f'(x)=(1+2x)\mathrm{e}^{2x}$，

令 $f'(x)>0$ 得 $x>-\frac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$ 得 $x<-\frac{1}{2}$，故当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极小值，也是最小值，

且 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$，作出函数 $f(x)$ 的图像，如图所示.




结合图像分析，对于 A，当 $m\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=$

$m$ 只有一个交点，此时函数 $y=f(x)-m$ 只有一个零点，因此 A 不正确；

对于 B，存在实数 $k$，使得方程 $f(x)=k(x+2)$ 有一正一负两个根，但不可能有两个负实数根，因此 B 不正确；

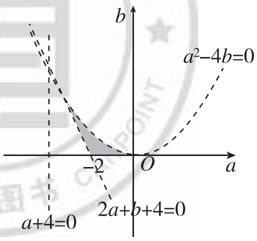
对于 C，若 $f(a)=f(b)(a\neq b)$，则 $a+b<-1$，因此 C 不正确；

对于 D，若 $f(a)=f(b)(a\neq b)$，不妨设 $a<-\frac{1}{2}<b<0$，则 $e^{2a}+e^{2b}<1+e^{-1}$，因此 D 正确. 故选 D.

5. C ［解析］易知 $a\neq 0$. $\because a+b+3c=0$，$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{a}{9}+\frac{b}{3}+c=\frac{1}{9}(a+3b+9c)=-\frac{2}{9}a$. $\because f(m)=f(n)=0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，$\therefore f(x)=a(x-m)(x-n)$，$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)=a\left(\frac{1}{3}-m\right)\left(\frac{1}{3}-n\right)=-\frac{2}{9}a$，$\therefore \left(\frac{1}{3}-m\right)\left(\frac{1}{3}-n\right)=-\frac{2}{9}$，不妨设 $m<\frac{1}{3}<n$，则 $\frac{2}{9}=\left(\frac{1}{3}-m\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)\leqslant\left[\frac{\left(\frac{1}{3}-m\right)+\left(n-\frac{1}{3}\right)}{2}\right]^2=\frac{(m-n)^2}{4}$，$\therefore |m-n|\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $m=\frac{1-\sqrt{2}}{3}$，$n=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ 时，等号成立，故 $|m-n|$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

6. D ［解析］当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$-\ln x<0$，$f(x)=\min\left\{x^2+ax-\frac{1}{4},-\ln x\right\}\leqslant-\ln x<0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上无零点. 当 $x=1$ 时，$f(1)=\min\left\{a+\frac{3}{4},0\right\}$，若 $a\geqslant-\frac{3}{4}$，则 $f(1)=0$，$x=1$ 是 $f(x)$ 的零点；若 $a<-\frac{3}{4}$，则 $f(1)=a+\frac{3}{4}<0$，$x=1$ 不是 $f(x)$ 的零点. 当 $x\in(0,1)$ 时，$-\ln x>0$. 令 $g(x)=x^2+ax-\frac{1}{4}$，只需考虑 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上的零点个数. 当 $-\frac{a}{2}\leqslant 0$，即 $a\geqslant 0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $-\frac{1}{4}<g(x)<a+\frac{3}{4}$，故 $g(x)$ 有 1 个零点；当 $0<-\frac{a}{2}<1$，即 $-2<a<0$ 时，$g(x)$ 在 $\left(0,-\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{a}{2},1\right)$ 上单调递增，故在 $(0,1)$ 上，$g(x)_{\min}=g\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}-\frac{1}{4}<0$，$g(0)=-\frac{1}{4}<0$，$g(1)=a+\frac{3}{4}$，令 $g(1)>0$ 得 $a>-\frac{3}{4}$，故当 $-\frac{3}{4}<a<0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 1 个零点，当 $-2<a\leqslant-\frac{3}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点；当 $-\frac{a}{2}\geqslant 1$，即 $a\leqslant-2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$g(x)<g(0)=-\frac{1}{4}$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，此时 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点. 综上，当 $a>-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点；当 $a<-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 无零点. 故选 D.

7. B ［解析］若 $f(x)=x^2+ax+b$ 在 $(0,2)$ 上有两个不同的零点，则 $\begin{cases}f(0)>0,\\ f(2)>0,\\ \Delta>0,\\ 0<-\frac{a}{2}<2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b>0,\\ 2a+b+4>0,\\ a^2-4b>0,\\ -4<a<0,\end{cases}$ 作出不等式组表示的平面区域，如图中阴影部分所示，易知直线 $2a+b+4=0$ 与曲线 $a^2-4b=0$ 相切于点 $(-4,4)$，令 $z=3a+b$，由图可知 $-8<z<0$，故 $3a+b$ 的取值范围为 $(-8,0)$.




8. D ［解析］$f(x)=x^2-\frac{\ln|x|}{x}=\begin{cases}x^2-\frac{\ln x}{x},x>0,\\ x^2-\frac{\ln(-x)}{x},x<0.\end{cases}$

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2x-\frac{1-\ln(-x)}{x^2}=\frac{2x^3-1+\ln(-x)}{x^2}$.

令 $g(x)=2x^3-1+\ln(-x)$，

由 $g'(x)=6x^2+\frac{1}{x}=\frac{6x^3+1}{x}=0$，得 $x=-\sqrt[3]{\frac{1}{6}}$，

当 $x\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\right)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{6}},0\right)$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 有极大值 $g\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\right)=2\times\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\right)^3-1+\ln\sqrt[3]{\frac{1}{6}}=-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\ln 6<0$，

又 $x^2>0$，所以 $f'(x)<0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数.

当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{2x^3-1+\ln x}{x^2}$.

令 $h(x)=2x^3-1+\ln x$，则 $h'(x)=6x^2+\frac{1}{x}>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，又 $h(1)=1>0$，$h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}-\ln 2<0$，$x^2>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个零点，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个极值点.

综上，函数 $f(x)$ 的大致图像为 D 中的图像. 故选 D.

9. 0　e ［解析］因为 $f(x)=\begin{cases}\tan\frac{\pi}{2}(x-1),0<x\leqslant 1,\\ \ln x,x>1,\end{cases}$ 所以 $f(e)=\ln e=1$，则 $f[f(e)]=f(1)=\tan 0=0$.

若 $0<x\leqslant 1$，由 $f(x)=1$ 得 $\tan\frac{\pi}{2}(x-1)=1$，无解；

若 $x>1$，由 $f(x)=1$ 得 $\ln x=1$，解得 $x=e$.

10. 4　(2,4] ［解析］$f[f(-1)]=f(2)=-4+8=4$.

由 $a<b<c$，且 $f(a)=f(b)=f(c)$，结合函数 $f(x)$ 的图像(图略)知 $-2<a\leqslant 0<b<2<c$，且 $b+c=4$，

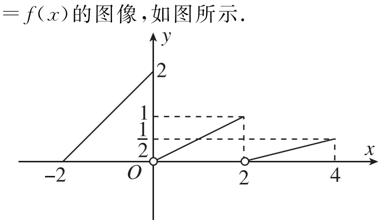
所以 $a+b+c=a+4\in(2,4]$.

11. (1,3] ［解析］当 $0<x\leqslant 2$ 时，$-2<x-2\leqslant 0$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)=\frac{1}{2}(2+x-2)=\frac{1}{2}x$.

当 $2<x\leqslant 4$ 时，$0<x-2\leqslant 2$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)=\frac{1}{4}(x-2)$.

作出函数 $y=f(x)$ 的图像，如图所示.




$\because$ 函数 $y=f(x)-\log_2(a-x)$ 恰有两个零点，

$\therefore y=f(x)$ 与 $y=\log_2(a-x)$ 的图像在 $[-2,4]$ 上有两个交点.

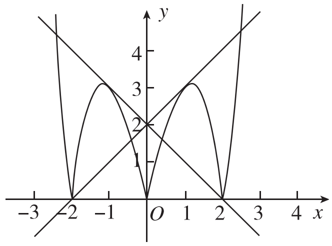
又 $y=\log_2(a-x)$ 是减函数，且 $y=\log_2(a-x)$ 的图像与 $x$ 轴的交点的横坐标为 $a-1$，

$\therefore\begin{cases}0<\log_2 a\leqslant 2,\\ 0<a-1\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<\log_2 a\leqslant 2,\\ \log_2(a-2)>1,\\ \log_2(a-4)\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\log_2 a>2,\\ 0<\log_2(a-2)\leqslant 1,\\ \log_2(a-4)\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$

解得 $1<a\leqslant 3$.

12. $a<-1$ 或 $a>1$ ［解析］函数 $f(x)=|x^3-4x|+ax-2$ 恰有 2 个零点，等价于函数 $y=|x^3-4x|$ 与 $y=2-ax$ 的图像有 2 个不同的交点. 易知直线 $y=2-ax$ 过定点 $(0,2)$. 作出函数 $y=|x^3-4x|$ 的图像与直线 $y=2-ax$，如图所示，当直线 $y=2-ax$ 与曲线 $y=-x^3+4x$，$x\in[0,2]$ 相切时，设切点坐标为 $(x_0,-x_0^3+4x_0)$，则切线方程为 $y-(-x_0^3+4x_0)=(-3x_0^2+4)(x-x_0)$，又该直线经过点 $(0,2)$，代入上式，解得 $x_0=1$，故切点坐标为 $(1,3)$，由 $3=2-a$ 得 $a=-1$. 同理，当直线 $y=2-ax$ 与曲线 $y=$

$x^3-4x,x\in[-2,0]$相切时,可得 $a=1$. 由图可知,若直线 $y=2-ax$ 与 $y=|x^3-4x|$ 的图像有 2 个不同的交点,则实数 $a$ 的取值范围为 $a<-1$ 或 $a>1$.

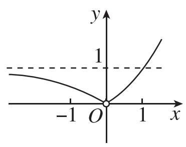



13. $\left(\frac{4}{9},\frac{1}{2}\right)$ [解析] 令 $t=|2^x-1|(x\neq0)$,则方程 $f(|2^x-1|)-k\left(\frac{2}{|2^x-1|}-3\right)=0$ 可化为方程 $f(t)-k\left(\frac{2}{t}-3\right)=0$,作出函数 $y=|2^x-1|(x\neq0)$的大致图像如图所示,结合图像分析可知,关于 $x$ 的方程 $f(|2^x-1|)-k\left(\frac{2}{|2^x-1|}-3\right)=0$ 有四个不同的实数解等价于关于 $t$ 的方程 $f(t)-k\left(\frac{2}{t}-3\right)=0$ 在$(0,1)$上有两个不同的实数解. $f(t)-k\left(\frac{2}{t}-3\right)=0$ 可化为 $t^2+(3k-2)t+1-2k=0$,记 $g(x)=x^2+(3k-2)x+1-2k$,则原问题等价于 $g(x)$ 在$(0,1)$上有两个不同的零点,

所以$\begin{cases}\Delta=(3k-2)^2-4(1-2k)=9k^2-4k>0,\\0<-\frac{3k-2}{2}<1,\\g(0)=1-2k>0,\\g(1)=1+3k-2+1-2k=k>0,\end{cases}$

解得$\frac{4}{9}<k<\frac{1}{2}$,

所以实数 $k$ 的取值范围为$\left(\frac{4}{9},\frac{1}{2}\right)$.




## 小题 5 导数的几何意义与运算

1. C [解析] 依题意得 $f'(x)=2x(x-t)+(x^2-4)=3x^2-2tx-4$,所以 $f'(-1)=3+2t-4=0$,得 $t=\frac{1}{2}$,故选 C.
2. C [解析] 因为 $f(x)=e^x+2\sin x$,所以 $f'(x)=e^x+2\cos x$,所以 $f'(0)=3$,$f(0)=1$. 由导数的几何意义可知,函数 $f(x)$的图像在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y-1=3x$,即 $3x-y+1=0$,故选 C.
3. C [解析] 函数 $y=\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且 $y'=\frac{1}{x}$,设切点坐标为$(x_0,\ln x_0)$,则 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$,

   切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,

   因为切线过点$(0,0)$,所以$-\ln x_0=-1$,

   解得 $x_0=e$,故此切线的斜率为$\frac{1}{e}$.
4. C [解析] 由 $y=x^3-x$ 得 $y'=3x^2-1$. 设切点坐标为$(x_0,y_0)$,则由题意得$\begin{cases}3x_0^2-1=a①,\\x_0^3-x_0=ax_0+2②,\end{cases}$将①代入②,消去 $a$ 得 $x_0^3-x_0=(3x_0^2-1)x_0+2$,解得 $x_0=-1$,则 $a=2$,故选 C.
5. C [解析] 由题图可知,当 $0<x<1$ 时,$xf'(x)<0$,所以 $f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减;当 $x>1$ 时,$xf'(x)>0$,所以 $f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增. 所以当 $x=1$ 时,函数 $f(x)$取得极小值. 当 $x<-1$ 时,$xf'(x)<0$,所以 $f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增;当$-1<x<0$ 时,$xf'(x)>0$,所以 $f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减. 所以当 $x=-1$ 时,函数 $f(x)$取得极大值. 故选 C.
6. D [解析] 因为 $f'(x)=ax^2+ax+1$,所以当 $a<0$ 时,判别式 $\Delta=a^2-4a>0$,$f(x)$的图像可能是选项 C 中图像. 当 $a>0$ 时,若判别式 $\Delta=a^2-4a>0$,则 $f(x)$的图像可能是选项 B 中图像;若判别式 $\Delta=a^2-4a\leqslant0$,则 $f(x)$的图像可能是选项 A 中图像. 当 $a=0$ 时,$f(x)=x$,所以 $f(x)$的图像不可能是选项 D 中图像. 故选 D.
7. D [解析] 令 $f(x)=x^2$,则 $f'(x)=2x$,所以直线 $l$ 的方程为 $y=2x_0(x-x_0)+x_0^2=2x_0x-x_0^2$. 因为 $l$ 也与函数 $y=\ln x,x\in(0,1)$的图像相切,$y'=\frac{1}{x}$,设切点坐标为$(x_1,\ln x_1)$,$0<x_1<1$,所以 $l$ 的方程为 $y=\frac{1}{x_1}x+\ln x_1-1$,故有$\begin{cases}2x_0=\frac{1}{x_1},\\1-\ln x_1=x_0^2,\end{cases}$ 所以 $1+\ln(2x_0)=x_0^2$,因为 $0<x_1<1$,所以 $2x_0>1$ 且 $x_0^2>1$,所以 $x_0\in(1,+\infty)$. 令 $g(x)=x^2-\ln(2x)-1,x\in(1,+\infty)$,则该函数的零点就是 $x_0$,因为 $g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$,所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,又 $g(1)=-\ln 2<0$,$g(\sqrt{2})=1-\ln 2\sqrt{2}<0$,$g(\sqrt{3})=2-\ln 2\sqrt{3}>0$,所以$\sqrt{2}<x_0<\sqrt{3}$. 故选 D.
8. D [解析] 对于 A,若 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=\cos x$,所以$|f(x)+f'(x)|=|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}<2$;

   对于 B,若 $f(x)=e^{-x}$,则 $f'(x)=-e^{-x}$,所以$|f(x)+f'(x)|=|e^{-x}+(-e^{-x})|=0<2$;

   对于 C,若 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$,则 $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$,所以$|f(x)+f'(x)|=\left|\frac{1}{x^2+1}+\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right|=\left|\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\right|=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2$,

   设 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$,则 $yx^2-x+y+1=0$,所以 $\Delta=1-4y(y+1)\geqslant0$,

   解得$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$,所以 $0\leqslant y^2\leqslant\frac{3+2\sqrt{2}}{4}<2$,

   即$|f(x)+f'(x)|<2$;

   对于 D,若 $f(x)=\frac{5x}{x^2+1}$,则 $f'(x)=\frac{5(x^2+1)-5x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{5(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$,所以$|f(x)+f'(x)|=\left|\frac{5x}{x^2+1}+\frac{5(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\right|$,当 $x=0$ 时,$|f(0)+f'(0)|=|0+5|=5>2$,故 $f(x)$的解析式不可能是 D 中解析式. 故选 D.
9. 2 [解析] 设切点坐标为$(m,n)(m>0)$,由 $y=\frac{1}{4}x^2-3\ln x$ 得 $y'=\frac{1}{2}x-\frac{3}{x}$,可得切线的斜率为$\frac{1}{2}m-\frac{3}{m}=-\frac{1}{2}$,故 $m=2$.
10. $(-\infty,0)$ $x+y-1=0$ [解析] 由题意得 $y'=-e^{-x}\in(-\infty,0)$,即曲线 $y=e^{-x}$上各点处的切线斜率的取值范围为$(-\infty,0)$. 当 $x=0$ 时,$y'=-e^{-0}=-1$,则曲线 $y=e^{-x}$在点$(0,1)$处的切线的斜率为$-1$,所以切线的方程为 $y-1=-1\cdot(x-0)$,即 $x+y-1=0$.
11. ①②③ [解析] ①中,$f'(x)=\cos x-\sin x$,$f''(x)=-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<0$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立,故①中函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数;②中,$f'(x)=\frac{1}{x}-2(x>0)$,$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立,故②中函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数;③中,$f'(x)=-3x^2+2$,$f''(x)=-6x<0$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立,故③中函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数;④中,$f'(x)=e^x+xe^x$,$f''(x)=2e^x+xe^x=e^x(x+2)>0$ 在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立,故④中函数不是凸函数. 故填①②③.
12. $-2$ $x+y+1=0$ [解析] $f'(x)=ae^x+2x$,$g'(x)=-\pi\sin\pi x+b$,$f(0)=a$,$g(1)=\cos\pi+b=b-1$,$f'(0)=a$,$g'(1)=b$,

    由题意可得 $f'(0)=g'(1)$,则 $a=b$,又 $f'(0)=\frac{b-1-a}{1-0}=a$,所以 $a=b=-1$,所以 $a+b=-2$,

    所以直线 $l$ 的方程为 $x+y+1=0$.
13. 2 [解析] 方法一:设 $x_2=\ln x_3$,$x_3>0$,则$(x_1-e^{x_2})^2+(x_2-e^{x_1})^2=(x_1-x_3)^2+(e^{x_1}-\ln x_3)^2$,其几何意义为动点$(x_1,e^{x_1})$与$(x_3,\ln x_3)$之间的距离的平方,原问题转化为求曲线 $y=e^x$ 上的点与曲线 $y=\ln x(x>0)$上的点的最小距离的平方. 因为两曲线关于直线 $y=x$ 对称,曲线 $y=e^x$ 上平行于直线 $y=x$ 的切线的方程为 $y=x+1$,曲线 $y=\ln x(x>0)$上平行于直线 $y=x$ 的切线

的方程为 $y=x-1$，两条切线之间的距离为 $\sqrt{2}$，故 $(x_1-e^{x_2})^2+(x_2-e^{x_1})^2$ 的最小值是 2.

方法二：由基本不等式得 $(x_1-e^{x_2})^2+(x_2-e^{x_1})^2\geqslant 2\left(\frac{x_1-e^{x_2}+x_2-e^{x_1}}{2}\right)^2=\frac{(e^{x_1}-x_1+e^{x_2}-x_2)^2}{2}$（当且仅当 $x_1-e^{x_2}=x_2-e^{x_1}$，即 $x_1=x_2$ 时等号成立）. 令 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$，则 $e^x-x\geqslant1(x\in\mathbf{R})$，即 $\frac{(e^{x_1}-x_1+e^{x_2}-x_2)^2}{2}\geqslant\frac{(1+1)^2}{2}=2$，当且仅当 $x_1=x_2=0$ 时取等号，故 $(x_1-e^{x_2})^2+(x_2-e^{x_1})^2$ 的最小值是 2.

## 小题 6 函数与导数、导数的简单应用

1. D ［解析］由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，$f(x)$ 无极大值点. 故选 D.

2. D ［解析］根据 $0<x<1$ 得到 $0<x^2<x<1$，而 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，由 $1-\ln x>0$，可得 $f'(x)>0$，即函数 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x^2)<f(x)<f(1)=0$，又 $[f(x)]^2=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2>0$，所以 $f(x^2)<f(x)<[f(x)]^2$，故选 D.

3. B ［解析］由题可知，当 $x<0$ 时，$f(x)>0$；当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $x=1$ 时，$f(x)=0$；当 $1<x<2$ 时，$f(x)<0$；当 $x=2$ 时，$f(x)=0$；当 $2<x<3$ 时，$f(x)>0$；当 $x=3$ 时，$f(x)=0$；当 $x>3$ 时，$f(x)>0$. 故易知函数 $f(x)$ 的一个极大值点为 $x=1$.

4. A ［解析］因为关于 $x$ 的不等式 $x^3-3x^2-ax+a+2\leqslant0$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立，
所以 $a(x-1)\geqslant x^3-3x^2+2=(x-1)(x^2-2x-2)$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立.
当 $x=1$ 时，$1-3-a+a+2=0\leqslant0$ 成立；
当 $x<1$ 时，$x-1<0$，所以 $a\leqslant x^2-2x-2$ 恒成立，
因为 $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3>-3$，$x\in(-\infty,1)$，所以 $a\leqslant-3$. 故选 A.

5. A ［解析］因为函数 $f(x)=(2x-1)e^x+ax^2-3a$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，
所以 $f'(x)=2e^x+(2x-1)e^x+2ax=(2x+1)e^x+2ax\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $a\geqslant\frac{-(2x+1)e^x}{2x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.
设 $g(x)=\frac{-(2x+1)e^x}{2x}(x>0)$，
则 $g'(x)=\frac{-[2e^x+(2x+1)e^x]\cdot2x-[-(2x+1)e^x]\cdot2}{(2x)^2}=\frac{(-2x^2-x+1)e^x}{2x^2}$，
令 $g'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，可知函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，
令 $g'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{2}$，可知函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，则 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-2e^{\frac{1}{2}}$，即 $a$ 的取值范围是 $[-2\sqrt{e},+\infty)$，故选 A.

6. A ［解析］∵ $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\lambda}{x}}\leqslant\frac{1}{27}$，∴ $x^{\frac{\lambda}{x}}\geqslant27$，∴ $\frac{\lambda}{x}\ln x\geqslant3\ln3$，
∵ $x\in\mathbf{N}^*$，∴ $\lambda>0$，由题意知 $\frac{\ln x}{x}\geqslant\frac{3\ln3}{\lambda}$ 有正整数解.
令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，∴ $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.
∵ $f(2)=\frac{\ln2}{2}=\frac{\ln8}{6}$，$f(3)=\frac{\ln3}{3}=\frac{\ln9}{6}$，∴ $f(2)<f(3)$，
∴ $\frac{3\ln3}{\lambda}\leqslant f(3)$，得 $\lambda\geqslant9$，故 $\lambda$ 的最小值为 9.

7. C ［解析］令函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，$x>0$，则 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}\geqslant0$，所以 $f(x)$ 单调递增，
由 $f(1)=0$，可得 $f(x)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，$f(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，
取 $x=\sqrt{a}$，则 $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}-2\ln\sqrt{a}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}-\ln a=\ln b-\ln a$.
当 $0<\sqrt{a}<1$ 时，$f(\sqrt{a})<0$，即 $\ln b-\ln a<0$，所以 $b<a$；
当 $\sqrt{a}>1$ 时，$f(\sqrt{a})>0$，即 $\ln b-\ln a>0$，所以 $b>a$.
又当 $0<\sqrt{a}<1$ 时，$\ln b<\ln a<0$，所以 $\frac{\ln b}{\ln a}>1$，由换底公式可得 $\log_a b>1$；
当 $\sqrt{a}>1$ 时，$\ln b>\ln a>0$，所以 $\frac{\ln b}{\ln a}>1$，由换底公式可得 $\log_a b>1$. 故选 C.

8. A ［解析］由题意知 $f(-x)=f(x)$.
因为当 $x\geqslant0$ 时，恒有 $\frac{x}{2}f'(x)+f(-x)\leqslant0$ 成立，所以 $x^2f'(x)+2xf(x)\leqslant0$，
又因为 $g(x)=x^2f(x)$，所以 $g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)\leqslant0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数.
因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，
又因为 $g(x)<g(1-2x)$，所以 $|x|>|1-2x|$，所以 $x^2>(1-2x)^2$，整理得 $(x-1)(3x-1)<0$，解得 $\frac{1}{3}<x<1$，故选 A.

9. $(-3,-2)\cup(-1,0)$ ［解析］由 $f(x)=x^2e^x$ 得 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=xe^x(x+2)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=-2$，
∴函数 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增.
∵函数 $f(x)=x^2e^x$ 在区间 $[t,t+1]$ 上不单调，
∴ $t<-2<t+1$ 或 $t<0<t+1$，∴ $-3<t<-2$ 或 $-1<t<0$，故实数 $t$ 的取值范围是 $(-3,-2)\cup(-1,0)$.

10. $(-\infty,2\ln2-2)$ ［解析］∵函数 $f(x)=x^2-e^x-ax$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在单调递增区间，
∴ $f'(x)=2x-e^x-a>0$ 有解，即 $a<2x-e^x$ 有解.
设 $g(x)=2x-e^x$，则 $g'(x)=2-e^x$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\ln2$，则当 $x<\ln2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>\ln2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，
∴当 $x=\ln2$ 时，$g(x)$ 取得最大值，且 $g(x)_{\max}=g(\ln2)=2\ln2-2$，
∴ $a<2\ln2-2$.

11. $\left(0,\frac{1}{2e}\right)$ ［解析］函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}$.
当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则函数 $f(x)$ 不可能有两个不同的零点.
当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$，当 $0<x<\sqrt{\frac{1}{2a}}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，当 $x>\sqrt{\frac{1}{2a}}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 的最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=\ln\sqrt{\frac{1}{2a}}-a\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2=-\frac{1}{2}\ln2a-\frac{1}{2}$.
因为当 $x\to0$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，所以要使函数 $f(x)$ 恰有两个不同的零点，只需满足 $-\frac{1}{2}\ln2a-\frac{1}{2}>0$，
即 $\ln2a<-1$，所以 $0<2a<\frac{1}{e}$，即 $0<a<\frac{1}{2e}$，所以实数 $a$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2e}\right)$.

12. 0 $(-1,0)\cup(0,1)$ ［解析］∵ $f(x)$ 为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，∴ $f(-1)=f(1)=0$.
∵当 $x<0$ 时，$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=\frac{xf'(x)+f(x)}{x}>0$，∴ $xf'(x)+f(x)<0$，令 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$，可知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $g(-1)=-f(-1)=0$，∵ $g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$，∴ $g(x)$ 为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数. 当 $x<-1$ 时，∵ $xf(x)>0$，∴ $f(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，∵ $xf(x)<0$，∴ $f(x)>0$. 由 $f(x)$ 为偶函数知，使得 $f(x)>0$ 成立的 $x$ 的取值范围为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

13. 1　3　[解析] 对任意 $x\in[-1,1]$,恒有 $|4x^3-ax|\leqslant b$ 成立等价于 $b\geqslant|4x^3-ax|_{\max}$,$x\in[-1,1]$.

设 $f(x)=4x^3-ax$,$x\in[-1,1]$,易得 $f(x)$ 为奇函数,则只需讨论 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的情况. $f'(x)=12x^2-a$,

当 $a<0$ 时,$f'(x)>0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,又 $f(0)=0$,所以 $|4x^3-ax|_{\max}=f(1)=4-a>4$;

当 $a>12$ 时,$f'(x)<0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,又 $f(0)=0$,所以 $|4x^3-ax|_{\max}=|f(1)|=a-4>8$;

当 $0\leqslant a\leqslant 12$ 时,令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{\sqrt{3a}}{6}$,则函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\sqrt{3a}}{6}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{\sqrt{3a}}{6},1\right]$ 上单调递增,又 $f(0)=0$,

所以 $|4x^3-ax|_{\max}=\max\left\{|f(1)|,\left|f\left(\frac{\sqrt{3a}}{6}\right)\right|\right\}=\max\left\{|4-a|,\frac{\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}\right\}$,

令 $|4-a|=\frac{\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$,得 $(a-3)(a-12)^2=0$,解得 $a=3$ 或 $a=12$,

当 $a=12$ 时,$|4x^3-ax|_{\max}=8$,

当 $a=3$ 时,$|4x^3-ax|_{\max}=1$,

当 $|4-a|>\frac{\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$,即 $0\leqslant a<3$ 时,$|4x^3-ax|_{\max}=|4-a|>1$,

当 $|4-a|<\frac{\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}$,即 $3<a<12$ 时,$|4x^3-ax|_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}a^{\frac{3}{2}}>1$.

综上所述,当 $b$ 取得最小值 1 时,实数 $a$ 的值为 3.

## 小题 7　三角函数的图像与性质

1. D　[解析] 函数 $y=\sin x^2$ 为偶函数,排除 A,C;又当 $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时,函数取得最大值,排除 B. 故选 D.

2. C　[解析] 因为函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增,在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\omega\pi}{3}=1$. 又因为 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant 2\times\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\omega\leqslant 2$,所以 $\frac{\omega\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega=\frac{3}{2}$.

3. B　[解析] 把函数 $y=\sin x$ 的图像上每个点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标保持不变),得到 $y=\sin 2x$ 的图像,再把所得图像向上平移 1 个单位长度,得到 $y=\sin 2x+1$ 的图像,然后把所得图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度,得到函数 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]+1=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$ 的图像,所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$. 故选 B.

4. A　[解析] $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$,

故把函数 $y=\cos 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像. 故选 A.

5. C　[解析] 将函数 $y=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后,所得图像对应的函数解析式为 $y_1=2\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(\omega x+\frac{\omega-1}{4}\pi\right)$,向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后,所得图像对应的函数解析式为 $y_2=2\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(\omega x-\frac{\omega+1}{4}\pi\right)$. 因为所得的两个图像的对称轴重合,所以 $\omega x+\frac{\omega-1}{4}\pi=\omega x-\frac{\omega+1}{4}\pi+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

当 $k=0$ 时,$\omega=0$,不符合题意,所以 $k\neq 0$,则 $\omega=2k$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $\omega>0$,所以 $\omega$ 的最小值为 2. 故选 C.

6. C　[解析] 因为函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\pi$,所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,所以 $\omega=2$,即函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$,

又因为函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$ 在 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时取得最大值,所以当 $A>0$ 时,$\frac{4}{3}\pi+\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}(k_1\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=2k_1\pi-\frac{5}{6}\pi(k_1\in\mathbf{Z})$;

当 $A<0$ 时,$\frac{4}{3}\pi+\varphi=2k_2\pi-\frac{\pi}{2}(k_2\in\mathbf{Z})$,即 $\varphi=2k_2\pi-\frac{11}{6}\pi(k_2\in\mathbf{Z})$.

又因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,其中 $A<0$.

对于选项 A,因为 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{6}=\frac{A}{2}\neq\frac{1}{2}$,所以选项 A 不正确;

对于选项 B,因为若函数 $f(x)=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增,则 $\frac{\pi}{2}+2m\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2m\pi(m\in\mathbf{Z})$,

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数,所以选项 B 不正确;

对于选项 C,因为 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=A\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以 $f(x)$ 的图像的一个对称中心是 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$,所以选项 C 正确,选项 D 不正确. 故选 C.

7. B　[解析] 方法一:设 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$,由题图可知 $\frac{3}{4}T=\frac{3\pi}{4}$,得 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,$\therefore\omega=2$.

由 $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=0$ 及函数 $f(x)$ 的单调性可知,$2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $f\left(\frac{A}{2}\right)f\left(-\frac{A}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{1}{4}$,且 $\frac{\pi}{4}+A+\frac{\pi}{4}-A=\frac{\pi}{2}$,

得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{1}{4}$,

即 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)=\cos 2A=\frac{1}{2}$.

$\because A$ 为锐角,$\therefore 2A=\frac{\pi}{3}$,即 $A=\frac{\pi}{6}$,故 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

方法二:设 $f(x)$ 的最小正周期为 $T$,由题图可知 $\frac{3}{4}T=\frac{3}{4}\pi$,得 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,$\therefore\omega=2$. $\because f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图像可由 $y=\sin 2x$ 的图像至少向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到,且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$,

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

由 $f\left(\frac{A}{2}\right)f\left(-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{4}$,得 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{1}{2}(\cos^2A-\sin^2A)=\frac{1}{2}\cos 2A=\frac{1}{4}$,$\therefore\cos 2A=\frac{1}{2}$.

$\because A$ 为锐角,$\therefore 2A=\frac{\pi}{3}$,即 $A=\frac{\pi}{6}$,故 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. C　[解析] 因为 $y=\sin x+a\cos x$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 的最小值为 $a$,且当 $x=0$ 时,$y=a$,

所以 $\sin x+a\cos x\geqslant a$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 恒成立,即 $a(1-\cos x)\leqslant\sin x$,$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 恒成立. 当 $x=0$ 时,有 $a\in\mathbf{R}$;

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ 时,有 $a\leqslant\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}$,故 $a\leqslant\sqrt{3}$. 故选 C.

9. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　$-\frac{1}{2}$　[解析] 因为角 $\alpha$ 的终边经过点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$,

所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

10. $\frac{5}{2}$ [解析] 因为 $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-2$，所以 $\tan\alpha=2$，所以 $\frac{1}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan^2\alpha-2}=\frac{4+1}{4-2}=\frac{5}{2}$.

11. $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ [解析] 因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$，$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$，所以 $\cos\alpha\sin\alpha=\frac{12}{25}$，又因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos\alpha>\sin\alpha>0$.

因为 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{5}$①.

因为 $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，所以 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{7}{5}$②，

由①②得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$.

12. ①② [解析] $f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，得函数 $f(x)$ 的图像的一条对称轴的方程为 $x=\frac{11\pi}{12}$，所以①正确；

令 $2x-\frac{\pi}{3}=m\pi$，$m\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$，$m\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，得函数 $f(x)$ 的图像的一个对称中心是 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，所以②正确；

由 $2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，得 $n\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant n\pi+\frac{5\pi}{12}$，$n\in\mathbf{Z}$，当 $n=0$ 时，得函数 $f(x)$ 的一个单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$，所以③错误；

将函数 $y=2\sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可以得到函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，所以④错误. 所以正确的序号是①②.

13. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$ [解析] 由 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$，$\omega>0$，得 $\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\omega\pi+\frac{\pi}{4}$，

又 $y=\sin x$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\\ \omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 解得 $4k+\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant 2k+\frac{5}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

由 $4k+\frac{1}{2}-\left(2k+\frac{5}{4}\right)\leqslant 0$，$k\in\mathbf{Z}$，且 $2k+\frac{5}{4}>0$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $k=0$，所以 $\omega\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$.

## 小题 8 三角恒等变换

1. D [解析] $\sin 5^\circ\cos 55^\circ-\cos 175^\circ\sin 55^\circ=\sin 5^\circ\cos 55^\circ+\cos 5^\circ\sin 55^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. A [解析] 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{-\frac{3}{4}+1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7}$.

3. D [解析] $a=\sin 40^\circ\cos 127^\circ+\cos 40^\circ\sin 127^\circ=\sin(40^\circ+127^\circ)=\sin 167^\circ=\sin 13^\circ$，

$b=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 56^\circ-\cos 56^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 56^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 56^\circ=\sin(56^\circ-45^\circ)=\sin 11^\circ$，

$c=\frac{\frac{\cos^2 39^\circ-\sin^2 39^\circ}{\cos^2 39^\circ}}{\frac{\sin^2 39^\circ+\cos^2 39^\circ}{\cos^2 39^\circ}}=\cos^2 39^\circ-\sin^2 39^\circ=\cos 78^\circ=\sin 12^\circ$，

$\because \sin 13^\circ>\sin 12^\circ>\sin 11^\circ$，$\therefore a>c>b$.

4. A [解析] 由 $\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha$ 可得 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

即 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，可得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}>0$，

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

可得 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{14}}{4}$，

则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=$

$\frac{-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{14}}{2}$，故选 A.

5. B [解析] 设 $x=\sqrt{2}\cos\theta$，$\theta\in[0,\pi]$，则 $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\sin\theta$，

所以 $y=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta-1=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1$.

因为 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，所以 $y\in[-\sqrt{2}-1,1]$，所以 $\frac{M}{m}=\frac{1}{-\sqrt{2}-1}=1-\sqrt{2}$，故选 B.

6. C [解析] 因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]=$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=$

$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，故选 C.

7. D [解析] $\because 3\pi\leqslant\theta\leqslant 4\pi$，$\therefore\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{\theta}{2}\leqslant 2\pi$，$\therefore\cos\frac{\theta}{2}>0$，$\sin\frac{\theta}{2}<0$，$\therefore\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即 $\theta=-\frac{\pi}{6}+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\theta=-\frac{5\pi}{6}+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\because 3\pi\leqslant\theta\leqslant 4\pi$，$\therefore\theta=\frac{19\pi}{6}$ 或 $\frac{23\pi}{6}$，故选 D.

8. D [解析] $\because\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$，

$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$.

9. $\frac{4}{9}$ [解析] 由 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan x+1}{1-\tan x}=2$，解得 $\tan x=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{\tan x}{\tan 2x}=\frac{1-\tan^2 x}{2}=\frac{4}{9}$.

10. $-\frac{3\pi}{4}$ [解析] 由题意可得 $\tan A+\tan B=-3a<-6$，$\tan A\tan B=$

$3a+1>7$，所以 $\tan A<0,\tan B<0$，所以 $A,B\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$. 因为 $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{-3a}{1-(3a+1)}=1$，且 $A+B\in(-\pi,0)$，所以 $A+B=-\frac{3\pi}{4}$.

11. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　3 [解析] 由题意得 $\cos\alpha=2\sin\alpha-\sqrt{5}$，$\therefore\sin^2\alpha+(2\sin\alpha-\sqrt{5})^2=1$，解得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore\tan\alpha=-2$，

$\therefore\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=3$.

12. $\frac{\pi}{3}$ [解析] 由题意得 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

又 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{13}{14}$，

而 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\therefore\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

故 $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\beta=\frac{\pi}{3}$.

13. $\frac{4}{5}$　$-\frac{7}{25}$ [解析] 因为 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$，所以 $\sin\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha$.

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\left(\frac{3}{4}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1$，

即 $\cos^2\alpha=\frac{16}{25}$，又因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\alpha=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$.

因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $0<\alpha-\beta<\pi$，

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=-\frac{7}{25}$.

## 小题 9　解三角形

1. A [解析] 由题意知，$\cos C=-\frac{4}{5}$，由余弦定理，得 $-\frac{4}{5}=\frac{25+BC^2-45}{10BC}$，解得 $BC=2$(负值舍去).

2. B [解析] 由题意得，$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{5}\cos C$，所以 $\tan C=2$，所以 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=17$，所以 $c=\sqrt{17}$.

3. C [解析] $\because a\sin A=b\sin B+(c-b)\sin C$，$\therefore$ 由正弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-bc$，$\therefore$ 由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

4. C [解析] 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $A=2B$，所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$. 由正弦定理，得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2B}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

5. B [解析] 因为 $\cos A=\frac{1}{3}$，所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为 $3\sin B=2\sin C$，所以 $3b=2c$. 由 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3}{4}b^2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$，得 $b=2$，所以 $c=3$. 由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{3}=9$，所以 $a=3$.

6. B [解析] 由题知在 $\triangle ABC$ 中，$\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C=-\sin B\sin C$，由正弦定理可得 $a^2-b^2-c^2=-bc$，$\therefore$ 由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

$\because\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$，$\therefore$ 由正弦定理可得 $\sin C=\sin B\times\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$，

即 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\sin B\times\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\frac{1}{2}\sin B+\sqrt{3}\sin B$，$\therefore\tan B=\frac{1}{2}$. 故选 B.

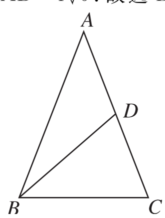
7. D [解析] 如图所示，设 $D$ 为 $AC$ 的中点. 在 $\triangle ABC$ 中，设内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，则 $b=c$，

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2b^2-a^2}{2b^2}$，

所以在 $\triangle ABD$ 中，$BD^2=b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\times b\times\frac{b}{2}\times\frac{2b^2-a^2}{2b^2}$，可得 $2a^2+b^2=144$.

设在 $\triangle ABC$ 中，$BC$ 边上的高为 $h$，则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{144-\frac{9a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(144-\frac{9a^2}{4}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-9}{4}(a^2-32)^2+2304}$，

所以，当 $a^2=32$ 时，$S$ 有最大值，此时，$b^2=144-2a^2=80$，得 $b=4\sqrt{5}$，所以 $c=4\sqrt{5}$，即 $AB=4\sqrt{5}$. 故选 D.




8. C [解析] 由 $\sin^2A-\cos^2A=\frac{1}{2}$ 得 $\cos^2A-\sin^2A=-\frac{1}{2}$，

则 $\cos 2A=-\frac{1}{2}$，又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 2A=\frac{2\pi}{3}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore B+C=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore\sin B+\sin C=\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

又 $\because 0<B<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore\frac{1}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin B+\sin C\leqslant\sqrt{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$，

$\therefore a=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}(b+c)\geqslant\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}(b+c)=\frac{b+c}{2}$，即 $2a\geqslant b+c$. 故选 C.

9. $\frac{\pi}{3}$　7 [解析] 由正弦定理可得，$2\cos A(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=2\cos A\sin A=\sin A$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. 因为 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，所以 $bc=12$. 又 $a=\sqrt{13}$，所以由余弦定理可得，$13=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，所以 $(b+c)^2=49$，所以 $b+c=7$.

10. $\frac{5\pi}{12}$　$\frac{1}{4}$ [解析] $\because A=\frac{\pi}{6}$，$b=(4+2\sqrt{3})a\cos B$，

$\therefore\sin B=(4+2\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{6}\cos B$，$\therefore\tan B=2+\sqrt{3}$.

$\because\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=2+\sqrt{3}$，$B\in($0，

$\pi)$,$\therefore B=\frac{5\pi}{12}$,$\therefore C=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}=B$,

$\therefore c=b=1$,$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

11. $\frac{1}{2}$ [解析] 由 $c\cos B+b\cos C=4a\sin B\sin C$,得 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=4\sin A\sin B\sin C$,即 $\sin A=4\sin A\sin B\sin C$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A\neq0$,所以 $4\sin B\sin C=1$,

由正弦定理得 $c=\frac{b}{\sin B}\cdot\sin C=\frac{2}{\sin B}\cdot\frac{1}{4\sin B}=\frac{1}{2\sin^2 B}$,

所以当 $\sin B=1$,$\sin C=\frac{1}{4}$时,$c$ 取得最小值,最小值为$\frac{1}{2}$.

12. $\frac{\pi}{3}$ $\sqrt{3}$ [解析] 在$\triangle ABD$ 中,由余弦定理得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\times BD\times\cos\frac{\pi}{6}=3BD^2+BD^2-2\sqrt{3}BD^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=BD^2$,

所以 $AD=BD$,所以$\angle DAB=\angle ABD=\frac{\pi}{6}$,

所以$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$,

又 $D$ 为 $BC$ 的中点,所以 $AD=BD=CD$,

所以$\triangle ADC$ 为等边三角形,

所以$\angle CAD=\frac{\pi}{3}$.

因为 $AC=2AD=2$,所以 $AC=2$,$AD=1$,设 $AB=m$,$BD=CD=n$,

在$\triangle ABD$ 中,由余弦定理得 $1=m^2+n^2-2mn\cos\frac{\pi}{6}$,即 $1=m^2+n^2-\sqrt{3}mn$①,

又在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $4=m^2+4n^2-4mn\cos\frac{\pi}{6}$,即 $4=m^2+4n^2-2\sqrt{3}mn$②,联立①②,得 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}n$,

所以 $1=\frac{4}{3}n^2+n^2-\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}n^2$,

解得 $n^2=3$,$mn=\frac{2\sqrt{3}}{3}n^2=2\sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}m\times2n\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}mn=\sqrt{3}$.

13. $-3$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [解析] 因为 $a^2+2b^2=c^2>a^2+b^2$,所以 $C$ 为钝角,

所以$\frac{\tan C}{\tan A}=\frac{\sin C\cos A}{\cos C\sin A}=\frac{c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{3b^2}{-b^2}=-3$,

所以 $\tan C=-3\tan A$,$\tan A>0$,则 $\tan B=-\tan(A+C)=\frac{\tan A+\tan C}{\tan A\tan C-1}=\frac{2\tan A}{1+3\tan^2 A}=\frac{2}{\frac{1}{\tan A}+3\tan A}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$时取等号,故 $\tan B$ 的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## 小题 10　平面向量与复数

1. C [解析] 因为$\frac{2}{1+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$,所以其共轭复数是 $1+\mathrm{i}$,故选 C.

2. B [解析] $\because z=\frac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}^2}=1-2\mathrm{i}$,$\therefore z$ 的虚部为 $-2$.故选 B.

3. C [解析] $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\left(\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}{2}\right)^2-\left(\frac{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}}{2}\right)^2=\left(\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}{2}\right)^2-\frac{\overrightarrow{CA}^2}{4}=\left(\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}{2}\right)^2-2$,设 $AC$ 的中点为 $O$,则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}^2-2$,所以要使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$最大,只要使$|\overrightarrow{MO}|$最大,易知$|\overrightarrow{MO}|$的最大值为$\sqrt{2}+1$,所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$的最大值为 $1+2\sqrt{2}$.

4. D [解析] 设$|\boldsymbol{b}|=x$,则$|\boldsymbol{a}|=2x$,因为$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$,所以 $4x^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2=9$,可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{5x^2-9}{2}$.

因为 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{x^2+3}{4x}=\frac{x+\frac{3}{x}}{4}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $x=\frac{3}{x}$,即 $x=\sqrt{3}$时等号成立,

所以$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$,故 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 夹角的最大值为$\frac{\pi}{6}$.故选 D.

5. A [解析] 连接 $OC$,$OB$,则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}^2+\frac{1}{2}[(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})^2-\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OC}^2]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})^2-\frac{1}{8}$,$\because|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{CB}|\in[0,2]$,$\therefore|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|\in\left[0,\frac{5}{2}\right]$,$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围是$\left[-\frac{1}{8},3\right]$.故选 A.

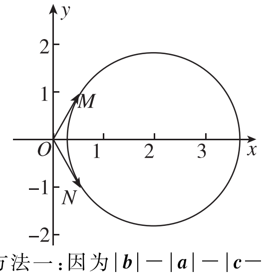
6. B [解析] 设向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 的夹角为$\theta$,因为 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\theta=\cos\theta$,所以 $-1\leqslant\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\leqslant1$,所以$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{5-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}\in[\sqrt{3},\sqrt{7}]$,故选 B.

7. B [解析] 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+1=0$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,所以$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1|=|\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,
两边平方可得$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1)^2\leqslant\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=13+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,
解不等式得 $-2\sqrt{3}\leqslant\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant2\sqrt{3}$,
所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{13-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\in[\sqrt{13-4\sqrt{3}},\sqrt{13+4\sqrt{3}}]$,即$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|_{\min}=\sqrt{13-4\sqrt{3}}$,故选 B.

8. A [解析] 设 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1)$,$\boldsymbol{c}=(x,y)$,其中 $x^2+y^2=1$,因为$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}|+|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=\sqrt{(1+2x)^2+(2y)^2}+\sqrt{(3-x)^2+(2-y)^2}=\sqrt{3(x^2+y^2)+x^2+y^2+4x+1}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\geqslant\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$(验证知等号可以取到),所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}|+|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$的最小值为$\sqrt{29}$.

9. $\frac{3}{4}+\mathrm{i}$ $\frac{-31+17\mathrm{i}}{25}$ [解析] 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,代入 $z+|z|=2+\mathrm{i}$,根据复数相等的定义得$\begin{cases}a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\\b=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac{3}{4},\\b=1,\end{cases}$则 $z=\frac{3}{4}+\mathrm{i}$,所以$\frac{z(1+\mathrm{i})}{z-2\mathrm{i}}=\frac{\left(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})}{\frac{3}{4}-\mathrm{i}}=\frac{-1+7\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\frac{-31+17\mathrm{i}}{25}$.

10. $\sqrt{3}$ [解析] 设 $\boldsymbol{a}=(4,0)$,$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{m}=(x_1,y_1)$,$\overrightarrow{ON}=\boldsymbol{n}=(x_2,y_2)$,其中 $O$ 为坐标原点,由$\begin{cases}\boldsymbol{m}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}+1=0,\\\boldsymbol{n}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}+1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x_1^2+y_1^2-4x_1+1=0,\\x_2^2+y_2^2-4x_2+1=0,\end{cases}$
即$\begin{cases}(x_1-2)^2+y_1^2=3,\\(x_2-2)^2+y_2^2=3,\end{cases}$
所以$\overrightarrow{OM}$,$\overrightarrow{ON}$的终点 $M$,$N$ 均在圆$(x-2)^2+y^2=3$ 上运动,如图所示.要使 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角最大,只需 $OM$,$ON$ 分别与圆$(x-2)^2+y^2=3$ 相切,
此时$|\overrightarrow{OM}|=1$,$|\overrightarrow{ON}|=1$,$\angle MON=120°$,
故$|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=\sqrt{|\overrightarrow{OM}|^2+|\overrightarrow{ON}|^2-2|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{ON}|\cos\angle MON}=\sqrt{3}$.




11. $[0,4]$ [解析] 方法一:因为$|\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}|$,所以 $0\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|\leqslant4$.
方法二:记 $-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,其中 $O$ 为坐标原点,则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}-(-\boldsymbol{a})|=|\overrightarrow{AC}|$,$|\overrightarrow{OA}|=1$,$|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BC}|=1$,

所以 $A$ 在以 $O$ 为圆心,1 为半径的圆上运动,
$C$ 在以 $B$ 为圆心,1 为半径的圆上运动,
又 $|\overrightarrow{OB}|=2$,所以圆 $O$ 与圆 $B$ 外切,所以当 $A,C$ 重合时,$|\overrightarrow{AC}|_{\min}=0$,当 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 反向,$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BC}$ 同向时,$|\overrightarrow{AC}|_{\max}=4$,
所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|$ 的取值范围为 $[0,4]$.

12. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ [解析] 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$,得 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=2$.
设 $\boldsymbol{a}=(t,0)(t>0),\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{t},\frac{\sqrt{3}}{t}\right)$. 设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$.
由 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=1,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=2$,得 $\begin{cases}xt=1,\\ \frac{x}{t}+\frac{\sqrt{3}y}{t}=2,\end{cases}$ 消去 $t$ 得 $x^2+\sqrt{3}xy=2$,
由此得 $y=\frac{2-x^2}{\sqrt{3}x}\left(x=\frac{1}{t}>0\right)$,
所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{(2-x^2)^2}{3x^2}}=\sqrt{\frac{4}{3}\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)}\geqslant\sqrt{\frac{4}{3}\left(2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x^2}}-1\right)}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $x^2=\frac{1}{x^2}$,即 $x=1$ 时等号成立,故 $|\boldsymbol{c}|_{\min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

13. $18+2\sqrt{3}$ [解析] 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$,则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$,所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3},\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$. 当点 $O,C$ 在 $AB$ 两侧时,由题可得 $O,A,C,B$ 四点共圆,在 $\triangle ABC$ 中,$BA=6,AC=2\sqrt{3},\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$,由正弦定理得 $\frac{BA}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle CBA}$,则 $\sin\angle CBA=\frac{1}{2}$,故 $\angle CBA=\frac{\pi}{6}$,由同弧所对的圆周角相等,可得 $\angle CBA=\angle COA=\frac{\pi}{6}$,可得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$. 因为 $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}|=2\sqrt{3}$,所以 $12=\boldsymbol{c}^2+\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\geqslant2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,当且仅当 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$ 时等号成立,又由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{6}$ 得 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|=\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,所以 $12\geqslant\frac{4}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\leqslant\frac{6\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=18+12\sqrt{3}$. 当点 $O,C$ 在 $AB$ 同侧时,可得点 $A,B,O$ 在以 $C$ 为圆心,$AC$ 为半径的圆上,则当点 $O,C,A$ 共线,即 $OA$ 为圆 $C$ 的直径时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 取得最大值,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})_{\max}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|=4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=24$. 综上所述,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 的最大值为 $18+12\sqrt{3}$.

## 小题 11 等差数列、等比数列

1. D [解析] 因为 $a_7$ 是 $a_3$ 与 $a_9$ 的等比中项,所以 $(a_1-12)^2=(a_1-4)(a_1-16)$,解得 $a_1=20$,所以 $S_{10}=10a_1+45d=200-90=110$.
2. B [解析] 因为 $a_1=1,3S_n=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$,所以 $S_{n+1}=4S_n$,所以数列 $\{S_n\}$ 是首项为 $S_1=a_1=1$,公比为 4 的等比数列,所以 $S_6=4^5$.
3. B [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$,等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q,q\neq0$,
由 $a_1=b_1=1,a_5=b_3$,可得 $1+4d=q^2$,
则 $a_9=1+8d=1+2(q^2-1)=2q^2-1>-1$,
所以 $a_9$ 能取到的最小整数是 0. 故选 B.
4. D [解析] 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$,由题意知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比不为 $-1$,故 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 依次成等比数列,所以 $54(S_{3n}-60)=36$,解得 $S_{3n}=\frac{182}{3}$.
5. B [解析] 当 $n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$ 时,因为 $a_n=\sqrt{\frac{a_{n+1}^2+a_{n-1}^2}{2}}$,所以 $2a_n^2=a_{n+1}^2+a_{n-1}^2$,即 $a_{n+1}^2-a_n^2=a_n^2-a_{n-1}^2$,所以数列 $\{a_n^2\}$ 是等差数列,其首项 $a_1^2=1$,公差 $d=a_2^2-a_1^2=4-1=3$,所以 $a_n^2=1+3(n-1)=3n-2$,又数列 $\{a_n\}$ 为正项数列,所以 $a_n=\sqrt{3n-2}$,所以 $a_6=\sqrt{18-2}=4$.
6. C [解析] 由题意知,$\frac{A_n}{B_n}=\frac{1}{2^n+1}$,令 $A_n=k(2^n-1),k\neq0$,则 $B_n=A_n\cdot(2^n+1)=k(2^n-1)(2^n+1)=k(4^n-1)$,所以 $a_7=A_7-A_6=k(2^7-1)-k(2^6-1)=64k,b_3=B_3-B_2=k(4^3-1)-k(4^2-1)=48k$,所以 $\frac{a_7}{b_3}=\frac{64k}{48k}=\frac{4}{3}$.
7. B [解析] $2a_n<a_m<1024a_n\Leftrightarrow2<2^{m-n}<1024\Leftrightarrow1<m-n<10$,又因为 $m-n\in\mathbf{Z}$,所以 $2\leqslant m-n\leqslant9$,即 $m=n+t,t=2,3,\cdots,9$,所以 $(m-1)^2+n=(n+t-1)^2+n=n^2+(2t-1)n+(t-1)^2$,因为 $-\frac{2t-1}{2}<0$,
所以 $(m-1)^2+n\geqslant1+(2t-1)+(t-1)^2=t^2+1\geqslant5$,
当且仅当 $t=2,n=1,m=3$ 时,取得最小值 5,故选 B.
8. B [解析] $\because S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$,$\therefore S_{n+1}=\frac{a_{n+1}^2+a_{n+1}}{2}$,$\therefore a_{n+1}=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2+a_{n+1}-a_n}{2}$,$\therefore a_{n+1}+a_n=a_{n+1}^2-a_n^2$,又 $\because a_n>0$,$\therefore a_{n+1}-a_n=1$,由条件可得 $a_1=1$,$\therefore a_n=n$. 设 $b_m+b_{m+1}+\cdots+b_{m+k-1}=3^t(m,t,k\in\mathbf{N}^*$ 且 $k>1)$,$\therefore k(4m+2k-1)=3^t(m,k,t\in\mathbf{N}^*$ 且 $k>1)$,令 $k=3^\alpha$,不妨取 $t=3\alpha(\alpha\in\mathbf{N}^*)$,则 $4m=\frac{3^t}{k}-2k+1=3^{2\alpha}-2\times3^\alpha+1=(8+1)^\alpha-2\times(4-1)^\alpha+1$ 一定是 4 的倍数,$\therefore k$ 的取值集合是 $\{k|k=3^\alpha,\alpha\in\mathbf{N}^*\}$.
9. 5 $-9$ [解析] 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$,依题意得 $\begin{cases}2a_1+8d=6,\\5a_1+10d=-5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-5,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_6=-5+10=5,S_n=-5n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-6n$,当 $n=3$ 时,$S_n$ 取得最小值,最小值为 $-9$.
10. $-12$ $-n^2+21n$ [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$,因为 $a_2=18,S_{18}=54$,所以 $\begin{cases}a_1+d=18,\\18a_1+\frac{18\times17}{2}d=54,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=20,\\d=-2,\end{cases}$ 所以 $a_{17}=a_1+16d=20-32=-12,S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-n^2+21n$.
11. $2^{2^{n-1}}$ [解析] 易知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正,对 $a_{n+1}=a_n^2$ 两边取对数,得 $\log_2a_{n+1}=\log_2a_n^2=2\log_2a_n$,所以数列 $\{\log_2a_n\}$ 是以 $\log_2a_1=1$ 为首项,2 为公比的等比数列,所以 $\log_2a_n=2^{n-1}$,所以 $a_n=2^{2^{n-1}}$.
12. 4 [解析] 因为 $a_1,a_3,a_{13}$ 依次成等比数列,所以 $(1+2d)^2=1+12d$,解得 $d=2$ 或 $d=0$(舍去),所以 $a_n=2n-1,S_n=n^2$,所以 $\frac{2S_n+16}{a_n+3}=\frac{2n^2+16}{2n+2}=\frac{n^2+8}{n+1}$. 令 $t=n+1$,则原式 $=\frac{t^2+9-2t}{t}=t+\frac{9}{t}-2$,因为 $t\geqslant2$ 且 $t\in\mathbf{N}^*$,所以当 $t=3$,即 $n=2$ 时,$\frac{2S_n+16}{a_n+3}$ 取得最小值 4.
13. 9 [解析] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$,因为 $a_2,a_5,a_{11}$ 依次成等比数列,所以 $a_5^2=a_2a_{11}$,所以 $(a_1+4d)^2=(a_1+d)(a_1+10d)$,得 $a_1=2d$,又 $a_{11}=2(S_m-S_n)(m>n>0,m,n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $a_1+10d=2ma_1+m(m-1)d-2na_1-n(n-1)d$,化简得 $(m+n+3)(m-n)=12$,因为 $m>n>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,
所以 $\begin{cases}m-n=1,\\m+n+3=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-n=2,\\m+n+3=6,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}m=5,\\n=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=\frac{5}{2},\\n=\frac{1}{2}\end{cases}$(舍去),所以 $m+n=9$.

## 小题 12 数列的综合问题

1. C [解析] 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$. 当 $q=1$ 时,$S_{n+2}=(n+2)a_1,S_n=na_1$,由 $S_{n+2}=4S_n+3$,得 $(n+2)a_1=4na_1+3$,即 $3a_1n=2a_1-3$,
若对任意的正整数 $n$,$3a_1n=2a_1-3$ 恒成立,则 $a_1=0$ 且 $2a_1-3=0$,矛盾,所以 $q\neq1$,
所以 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},S_{n+2}=\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}$,
代入 $S_{n+2}=4S_n+3$ 并化简,得 $a_1(4-q^2)q^n=3+3a_1-3q$,若对任意的正整数 $n$,该等式恒成立,
则有 $\begin{cases}4-q^2=0,\\3+3a_1-3q=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-3,\\q=-2,\end{cases}$
故 $a_1=1$ 或 $a_1=-3$,故选 C.
2. B [解析] 由题知 $c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n+10b_n}{a_n+b_n}=\frac{c_n+10}{c_n+1}=1+\frac{9}{c_n+1}$,所以 $c_3+c_4=c_3+1+\frac{9}{c_3+1}\geqslant6$,当且仅当 $c_3=2$ 时等号成立,此时

$c_4=4,c_5=1+\frac{9}{5}=\frac{14}{5}.$

3. C 【解析】由 $2a_n\leqslant a_{n-1}+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,得 $a_n-a_{n-1}\leqslant a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,
所以 $a_2-a_1\leqslant a_3-a_2\leqslant a_4-a_3\leqslant a_5-a_4\leqslant a_6-a_5\leqslant a_7-a_6$,
所以 $3(a_7-a_6)\geqslant a_6-a_5+a_5-a_4+a_4-a_3=a_6-a_3$,所以 C 正确,故选 C.

4. A 【解析】因为 $a_{n+1}+a_n=2n+1$①,
所以 $a_{n+2}+a_{n+1}=2(n+1)+1=2n+3$②,由②-①得 $a_{n+2}-a_n=2$,所以数列$\{a_n\}$的奇数项构成以 $a_1$ 为首项,2 为公差的等差数列,数列$\{a_n\}$的偶数项构成以 $a_2$ 为首项,2 为公差的等差数列,又 $a_{2n-1}+a_{2n}=2(2n-1)+1=4n-1$,所以数列$\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$是以 4 为公差的等差数列,
所以 $S_n=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{2}+(a_1-1),n\text{ 为奇数},\\ \frac{n(n+1)}{2},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$
当 $n$ 为偶数时,$\frac{n(n+1)}{2}=1350$ 无解(因为 $51\times 52=2652,52\times 53=2756$,所以不存在相邻的两个自然数之积为 2700).
当 $n$ 为奇数时,由$\frac{n(n+1)}{2}+(a_1-1)=1350$,得 $a_1=1351-\frac{n(n+1)}{2}$,
因为 $a_2<2$,所以 $3-a_1<2$,所以 $a_1>1$,所以 $1351-\frac{n(n+1)}{2}>1$,
即 $n(n+1)<2700$,又 $n$ 为奇数,所以 $n\leqslant 51$.故选 A.

5. D 【解析】设 $x\in\{a_2,a_3,\cdots,a_8\}$,即 $1<x<9$,因为 $9+x,9x$ 不在该数列中,所以$\frac{a_9}{x}=\frac{9}{x}\in\{a_2,a_3,\cdots,a_8\}$,即 $x,\frac{9}{x}$ 均是$\{a_2,a_3,\cdots,a_8\}$中的元素,由于$\{a_2,a_3,\cdots,a_8\}$中共有 7 个元素,所以一定有 1 个元素满足 $x=\frac{9}{x}$,得 $x=3$.当 $x\neq 3$ 时,$x$ 与$\frac{9}{x}$中一个比 3 大,一个比 3 小,所以 $a_5=3$,可知 $a_6>3$.
构造满足条件的数列:$1,\sqrt[4]{3},\sqrt{3},\sqrt[4]{3^3},3,\sqrt[4]{3^5},3\sqrt{3},\sqrt[4]{3^7},9$,
由于$\sqrt[4]{3}<\frac{1+\sqrt{3}}{2},\sqrt[4]{3^3}<\frac{3+\sqrt{3}}{2},\sqrt[4]{3^5}<\frac{3+3\sqrt{3}}{2},\sqrt[4]{3^7}<\frac{3\sqrt{3}+9}{2}$,
所以 $S_9=1+\sqrt[4]{3}+\sqrt{3}+\sqrt[4]{3^3}+3+\sqrt[4]{3^5}+3\sqrt{3}+\sqrt[4]{3^7}+9<21+8\sqrt{3}<36$.故选 D.

6. B 【解析】设 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 所成等差数列的公差为 $d$,由 $3a_1-a_2+a_3+1=e^{a_2+a_3-a_4}\geqslant a_2+a_3-a_4+1$,得 $2a_1+d\geqslant 0$,即 $a_1+a_2\geqslant 0$,又 $a_2<0$,所以 $a_1>0$,所以公差 $d<0$.若 $a_1=-a_2$,则 $d=-2a_1$,此时由 $3a_1-a_2+a_3+1=e^{a_2+a_3-a_4}$ 得 $e^{a_1}=a_1+1$,所以 $a_1=0,a_2=0$,这与 $a_2<0$ 矛盾,故 $a_1\neq -a_2$,即 $a_1+a_2>0$,所以 $a_1>-a_2>0$,则$|a_1|>|a_2|$,又 $a_4<a_3<0$,则$|a_3|<|a_4|$.故选 B.

7. C 【解析】令 $a_n=2018b_n$,则由题意得 $b_{n+1}=b_n^2+b_n$,所以$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{1+b_n}$,从而$\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{1+b_2}+\cdots+\frac{1}{1+b_n}$,又$\frac{1}{b_1}=\frac{2018}{a_1}=4036$,所以$\frac{1}{b_{n+1}}=4036-\left(\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{1+b_2}+\cdots+\frac{1}{1+b_n}\right)$.
因为 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2018}+a_n>a_n$,所以数列$\{a_n\}$为递增数列,
设当 $1\leqslant n\leqslant m$ 时,$\frac{1}{2}\leqslant a_n\leqslant 1$,当 $n\geqslant m+1$ 时,$a_n>1,m\in\mathbf{N}^*$,
所以当 $1\leqslant n\leqslant m$ 时,$\frac{1}{4036}\leqslant b_n\leqslant\frac{1}{2018}$,则$\frac{4037}{4036}\leqslant 1+b_n\leqslant\frac{2019}{2018}$,则$\frac{2018}{2019}\leqslant\frac{1}{1+b_n}\leqslant\frac{4036}{4037}$,
从而当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{2018n}{2019}<\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{1+b_2}+\cdots+\frac{1}{1+b_n}<\frac{4036n}{4037}$,故$\frac{1}{b_{n+1}}\in\left(4036-\frac{4036n}{4037},4036-\frac{2018n}{2019}\right)$,
所以$\frac{1}{b_{2019}}\in(2018,2019)$,$\frac{1}{b_{2020}}\in(2017,2018)$,所以 $a_{2019}<1,a_{2020}>1$,故选 C.

8. A 【解析】因为 $x_{n+1}=\begin{cases}x_n+\sin x_n,x_n\leqslant x_{n-1},\\ x_n+\cos x_n,x_n>x_{n-1}\end{cases}(n\geqslant 2)$,$0<x_1<x_2<\pi$,所以 $x_3=x_2+\cos x_2$,所以 $x_3-x_2=\cos x_2$.当 $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$0<\cos x_2<1$,所以 $x_3>x_2$,则 $x_4=x_3+\cos x_3$,因为 $y=x+\cos x$ 单调递增,$x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $x_3\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $x_4-x_3=\cos x_3>0$,即 $x_4>x_3$;当 $x_2\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$-1<\cos x_2\leqslant 0$,所以 $x_3\leqslant x_2$,则 $x_4=x_3+\sin x_3$,因为 $y=x+\sin x$ 单调递增,$x_2\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $x_3\in\left[\frac{\pi}{2},\pi-1\right)$,所以 $x_4-x_3=\sin x_3>0$,即 $x_4>x_3$.综上可知 $x_4>x_3$,$x_4\in\left(1+\cos 1,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\frac{\pi}{2}+1,\pi-1+\sin(\pi-1)\right)$.当 $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,易知 $x_n<\frac{\pi}{2}$;当 $x_2\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$\frac{\pi}{2}\leqslant x_3<x_4<\pi$,因为函数 $y=x+\sin x,y=x+\cos x$ 均单调递增,所以当 $x<\pi$ 时,$x+\sin x<\pi,x+\cos x<\pi$,所以 $x_n<\pi$.故 $x_{2019}<\pi$.故选 A.

9. $\frac{13}{16}$ $3^n-1$ 【解析】因为 $a_1,a_3,a_9$ 构成等比数列$\{b_n\}$的前 3 项,所以 $a_3^2=a_1a_9$,即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$,又 $d\neq 0$,所以 $a_1=d$,则$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\frac{13d}{16d}=\frac{13}{16}$.当 $d=2$ 时,$b_1=a_1=2,b_2=a_3=6$,则等比数列$\{b_n\}$的首项为 2,公比为 3,所以数列$\{b_n\}$的前 $n$ 项和 $S_n=\frac{2\times(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$.

10. 6 12 【解析】依题意得 $a_6=S_6-S_5>0,a_7=S_7-S_6<0,a_6+a_7=S_7-S_5>0$,则使 $a_n>0$ 的最大正整数 $n=6$.因为 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0,S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=\frac{12(a_6+a_7)}{2}>0,S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7<0$,所以 $S_{12}S_{13}<0$,即满足 $S_kS_{k+1}<0$ 的正整数 $k=12$.

11. $\frac{1}{49}$ 【解析】当 $n=1$ 时,由 $6a_1=a_1^2+3a_1$,解得 $a_1=3$ 或 $a_1=0$,
由 $a_n>0$,得 $a_1=3$.
由 $6S_n=a_n^2+3a_n$,得 $6S_{n+1}=a_{n+1}^2+3a_{n+1}$.
两式相减得 $6a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$,
所以$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$.
因为 $a_n>0$,所以 $a_{n+1}+a_n>0$,所以 $a_{n+1}-a_n=3$,
即数列$\{a_n\}$是以 3 为首项,3 为公差的等差数列,
所以 $a_n=3+3(n-1)=3n$.
因为 $b_n=\frac{2^{a_n}}{(2^{a_n}-1)(2^{a_{n+1}}-1)}=\frac{8^n}{(8^n-1)(8^{n+1}-1)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8^n-1}-\frac{1}{8^{n+1}-1}\right)$,
所以 $T_n=\frac{1}{7}\times\left(\frac{1}{8-1}-\frac{1}{8^2-1}+\frac{1}{8^2-1}-\frac{1}{8^3-1}+\cdots+\frac{1}{8^n-1}-\frac{1}{8^{n+1}-1}\right)=\frac{1}{7}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8^{n+1}-1}\right)<\frac{1}{49}$.
要使对任意 $n\in\mathbf{N}^*,k>T_n$ 恒成立,只需 $k\geqslant\frac{1}{49}$,
所以 $k$ 的最小值为$\frac{1}{49}$.

12. 6 【解析】由 $a_1=0$,且 $a_n-a_{n-1}-1=2(n-1)(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,
得 $a_n-a_{n-1}=2n-1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,
则 $a_2-a_1=2\times 2-1,a_3-a_2=2\times 3-1$,
$a_4-a_3=2\times 4-1,\cdots,a_n-a_{n-1}=2n-1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,以上各式累加得 $a_n-a_1=2\times(2+3+\cdots+n)-(n-1)=2\times\frac{(n+2)(n-1)}{2}-n+1=n^2-1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,即 $a_n=n^2-1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$,当 $n=1$ 时,上式仍成立,
所以 $b_n=n\cdot\sqrt{a_{n+1}+1}\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-1}=n\cdot\sqrt{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-1}=(n^2+n)\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.
由$\begin{cases}b_n\geqslant b_{n-1},\\ b_n\geqslant b_{n+1},\end{cases}$得
$\begin{cases}(n^2+n)\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-1}\geqslant(n^2-n)\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-2},\\ (n^2+n)\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^{n-1}\geqslant(n^2+3n+2)\cdot\left(\frac{8}{11}\right)^n,\end{cases}$
解得$\frac{16}{3}\leqslant n\leqslant\frac{19}{3}$.因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n=6$,所以数列$\{b_n\}$的最大项为第 6 项.

13. $\left[-4,\frac{5}{2}\right]$ [解析] 当 $t=4$ 时,$\{b_n\}$是首项为 2,公差为$\frac{3}{4}$的等差数列,显然不合题意.

当 $t\neq4,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$ 时,由 $b_n=\frac{t}{4}b_{n-1}+\frac{3}{4}$,得 $b_n-\frac{3}{4-t}=\frac{t}{4}\left(b_{n-1}-\frac{3}{4-t}\right)$,

且 $b_1-\frac{3}{4-t}=2-\frac{3}{4-t}=\frac{5-2t}{4-t}$.

若 $t=0$,则 $b_1=2,b_n=\frac{3}{4}(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2)$,满足题意.

若 $t\neq0$,则 $b_n=\frac{5-2t}{4-t}\cdot\left(\frac{t}{4}\right)^{n-1}+\frac{3}{4-t}$,

所以由$|b_n|\leqslant2$,得$\frac{2t-11}{4-t}\leqslant\frac{5-2t}{4-t}\cdot\left(\frac{t}{4}\right)^{n-1}\leqslant\frac{5-2t}{4-t}$(*).

当$\frac{5-2t}{4-t}<0$,即$\frac{5}{2}<t<4$ 时,由(*)式可得 $1\leqslant\left(\frac{t}{4}\right)^{n-1}\leqslant\frac{2t-11}{5-2t}$,该式不可能恒成立.

当$\frac{5-2t}{4-t}=0$,即 $t=\frac{5}{2}$时,由(*)式可得$-4\leqslant0\leqslant0$,该式恒成立.

当$\frac{5-2t}{4-t}>0$,即 $t>4$ 或 $0<t<\frac{5}{2}$ 或 $t<0$ 时,由(*)式可得$\frac{2t-11}{5-2t}\leqslant\left(\frac{t}{4}\right)^{n-1}\leqslant1$.

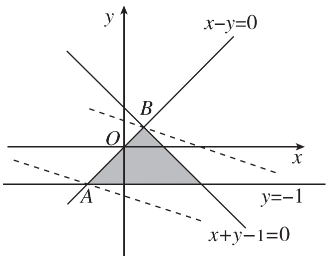
若 $t>4$,则右边不等式不可能恒成立;若 $t<-4$,则右边不等式不可能恒成立;

若$-4\leqslant t<0$ 或 $0<t<\frac{5}{2}$,则$\frac{2t-11}{5-2t}<-1$,$\left|\left(\frac{t}{4}\right)^{n-1}\right|\leqslant1$,可得$\frac{2t-11}{5-2t}\leqslant\left(\frac{t}{4}\right)^{n-1}\leqslant1$ 恒成立.

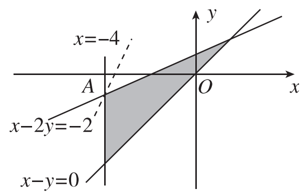
综上所述,$t\in\left[-4,\frac{5}{2}\right]$.

## 小题 13　不等式的性质与线性规划

1. D [解析] 若$|a|<b$,则 $a^2<b^2$,故 A 错误;若 $a=b<0$,则$|a|>b$,而 $a^2=b^2$,故 B 错误;若$-a=b<0$,则 $a>b$,而 $a^2=b^2$,故 C 错误;若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$,故 D 正确. 故选 D.
2. A [解析] ∵$c<b<a$ 且 $ac<0$,∴$c<0<a$.
由 $b>c,a>0$,得 $ab>ac$,故 A 恒成立;
由 $c<0,b-a<0$,得 $c(b-a)>0$,故 B 不成立;
当 $b=0$ 时,$cb^2=ab^2$,故 C 不恒成立;
由 $ac<0,a-c>0$,得 $ac(a-c)<0$,故 D 不成立. 故选 A.
3. D [解析] 作出约束条件表示的可行域,如图中阴影部分所示,令 $z=x+3y$,则当直线 $x+3y=z$ 过点 $A(-1,-1)$时,$z$ 取得最小值$-4$,当直线 $x+3y=z$ 过点 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$时,$z$ 取得最大值 2,所以$|x+3y|$的最大值是 4,故选 D.




4. A [解析] 由 $\Delta=a^2+8>0$,知方程 $x^2+ax-2=0$ 恒有两个不等实根,又由两根之积为$-2$,知方程 $x^2+ax-2=0$ 必有一个正根和一个负根,所以不等式 $x^2+ax-2>0$ 在区间[1,5]上有解的充要条件是 $5^2+5a-2>0$,解得 $a>-\frac{23}{5}$,故 $a$ 的取值范围为$\left(-\frac{23}{5},+\infty\right)$.
5. D [解析] 作出约束条件$\begin{cases}x-2y\geqslant-2,\\x-y\leqslant0,\\x\geqslant-4\end{cases}$表示的可行域,如图中阴影部分所示,令 $z=-2x+y$,则当直线$-2x+y=z$ 经过点 $A(-4,-1)$时,$z$ 取得最大值,即 $z_{\max}=-2\times(-4)+(-1)=7$,由题意可得 $m^2\geqslant7$,解得 $m\leqslant-\sqrt{7}$ 或 $m\geqslant\sqrt{7}$,所以实数 $m$ 的取值范围为$(-\infty,-\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7},+\infty)$,故选 D.




6. C [解析] 易知函数 $f(x)=x+\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上单调递增. 由 $\sqrt{a-1}-\sqrt{b-1}=2b-a-1$,得 $\sqrt{a-1}+a-1=\sqrt{b-1}+2(b-1)\geqslant\sqrt{b-1}+b-1$,所以 $a-1\geqslant b-1\geqslant0$,即 $a\geqslant b\geqslant1$. 故选 C.
7. B [解析] 当 $m\geqslant2$ 时,显然不符合题意. 当 $m<2$ 时,作出不等式组$\begin{cases}x+y\leqslant2,\\x\geqslant0,\\y\geqslant m\end{cases}$表示的平面区域,如图 1 中阴影部分所示,其中 $A(2-m,m),B(0,2),C(0,m)$,由题可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|2-m|^2=2$,解得 $m=0$ 或 $m=4$(舍去).
作出不等式组$\begin{cases}x+y\leqslant2,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0\end{cases}$表示的平面区域,如图 2 中阴影部分所示,其中 $A'(2,0),B(0,2)$,$\frac{x+y+2}{x+1}=1+\frac{y+1}{x+1}$,$\frac{y+1}{x+1}$表示图 2 中的平面区域内任意一点与点 $P(-1,-1)$连线的斜率,由图 2 可知$\frac{y+1}{x+1}$的最小值为 $k_{A'P}=\frac{0-(-1)}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$,所以$\frac{x+y+2}{x+1}$的最小值为$\frac{4}{3}$.

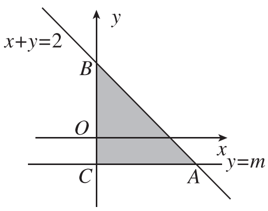


图1

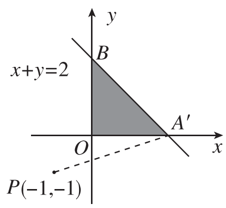


图2

8. D [解析] $|\sqrt{a}-b|^2-|\sqrt{b}-a|^2=(\sqrt{a}-b+\sqrt{b}-a)(\sqrt{a}-b-\sqrt{b}+a)$,由题知$\sqrt{a}-b-\sqrt{b}+a=a-b+\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$.
当 $0<b<a\leqslant1$ 时,$\sqrt{a}\geqslant a,\sqrt{b}>b$,则$\sqrt{a}-b+\sqrt{b}-a>0$,即$|\sqrt{a}-b|^2-|\sqrt{b}-a|^2>0$,所以$|\sqrt{a}-b|>|\sqrt{b}-a|$;
当 $a>b\geqslant1$ 时,$\sqrt{a}<a,\sqrt{b}\leqslant b$,则$\sqrt{a}-b+\sqrt{b}-a<0$,即$|\sqrt{a}-b|^2-|\sqrt{b}-a|^2<0$,所以$|\sqrt{a}-b|<|\sqrt{b}-a|$. 故 A,B 均不恒成立.
$|e^a-b|^2-|e^b-a|^2=(e^a-b+e^b-a)(e^a-b-e^b+a)$,
由题知 $e^a-b-e^b+a=e^a-e^b+a-b>0$.
构造函数 $f(x)=e^x-x$,则 $f'(x)=e^x-1$,当 $x>0$ 时,$f'(x)=e^x-1>0$,故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $a>b>0,f(0)=1$,所以 $f(a)>f(b)>f(0)$,即 $e^a-a>e^b-b>1$,所以 $e^a-b+e^b-a=e^a-a+e^b-b>2$,
所以$|e^a-b|^2-|e^b-a|^2>0$,即$|e^a-b|>|e^b-a|$. 故 C 不成立,D 恒成立.
9. 12　$\frac{2}{3}$ [解析] 作出不等式组$\begin{cases}x+y-2\geqslant0,\\x-3y+6\geqslant0,\\2x-y-3\leqslant0\end{cases}$表示的平面区域,如图 1 中阴影部分所示,

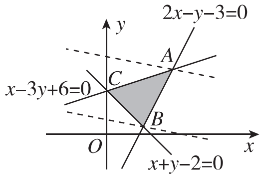


图1

易得 $A(3,3),B\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right),C(0,2)$,

令 $a=x+5y-6$,则 $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}+\frac{1}{5}a$,

由图可知，当直线 $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}+\frac{1}{5}a$ 过点 $A(3,3)$ 时，$a$ 取得最大值，且 $a_{\max}=12$，

当直线 $y=-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}+\frac{1}{5}a$ 过点 $B\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$ 时，$a$ 取得最小值，且 $a_{\min}=-\frac{8}{3}$，

又 $z=|a|$，所以 $z$ 的最大值为 12.

作出不等式组 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\x-3y+6\geqslant 0,\\mx-y-3\leqslant 0\left(m>\frac{1}{3}\right)\end{cases}$ 表示的平面区域，如图 2 中阴影部分所示.

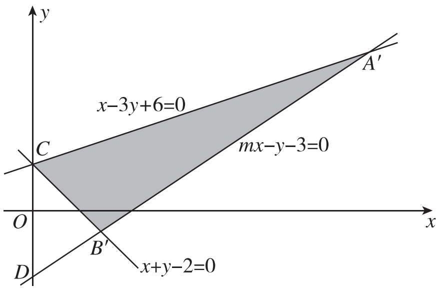


图2

由 $\begin{cases}x-3y+6=0,\\mx-y-3=0,\end{cases}$ 得 $A'\left(\frac{15}{3m-1},\frac{6m+3}{3m-1}\right)$，

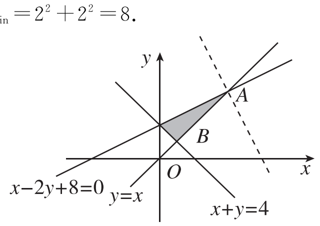
由 $\begin{cases}x+y-2=0,\\mx-y-3=0,\end{cases}$ 得 $B'\left(\frac{5}{m+1},\frac{2m-3}{m+1}\right)$，

易得 $D(0,-3)$，

所以 $S_{\triangle A'B'C}=S_{\triangle A'CD}-S_{\triangle B'CD}=\frac{1}{2}\times 5\times\left(\frac{15}{3m-1}-\frac{5}{m+1}\right)=30$，

即 $9m^2+6m-8=0$，解得 $m=\frac{2}{3}$ 或 $m=-\frac{4}{3}$（舍去）.

10. 24　8　［解析］作出不等式组 $\begin{cases}y\geqslant x,\\x+y\geqslant 4,\\x-2y+8\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图中阴影部分所示. 令 $z=2x+y$，则 $y=-2x+z$，由图可知，当直线 $y=-2x+z$ 过点 $A$ 时，$z$ 取得最大值. 由 $\begin{cases}x=y,\\x-2y+8=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=8,\\y=8,\end{cases}$ 即点 $A$ 的坐标为 $(8,8)$，故 $z_{\max}=2\times 8+8=24$. $x^2+y^2$ 表示平面区域内的点 $(x,y)$ 到原点的距离的平方，因为直线 $y=x$ 与直线 $x+y=4$ 互相垂直，所以 $x^2+y^2$ 的最小值是点 $B$ 到原点的距离的平方，由 $\begin{cases}x+y=4,\\y=x,\end{cases}$ 得 $B(2,2)$，故 $(x^2+y^2)_{\min}=2^2+2^2=8$.




11. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　［解析］由题知 $(a^2-ab)+(b^2-bc)+c^2-1=0$，即 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{3b^2}{4}-bc\right)+c^2-1=0$，

即 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-\frac{2}{3}c\right)^2=1-\frac{2}{3}c^2$，

则 $1-\frac{2}{3}c^2\geqslant 0$，得 $0<c\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$，

故 $c_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，此时 $a=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$b=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

12. $\frac{2}{5}$　［解析］由 $x^2+2y^2-\sqrt{3}xy=1(x,y\in\mathbf{R})$，得 $x^2+y^2=\frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2-\sqrt{3}xy}$.

若 $y=0$，则 $x=\pm 1$，得 $x^2+y^2=1$.

若 $y\neq 0$，则 $x^2+y^2=\frac{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{\sqrt{3}x}{y}+2}$，设 $\frac{x}{y}=t$，令 $z=x^2+y^2=\frac{1+t^2}{t^2-\sqrt{3}t+2}$，得 $(z-1)t^2-\sqrt{3}zt+2z-1=0$.

若 $z=1$，则 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

若 $z\neq 1$，则 $\Delta\geqslant 0$，即 $3z^2-4(z-1)(2z-1)\geqslant 0$，可得 $\frac{2}{5}\leqslant z<1$ 或 $1<z\leqslant 2$，即 $z$ 的最小值为 $\frac{2}{5}$，此时 $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上，$x^2+y^2$ 的最小值为 $\frac{2}{5}$.

13. $\left[\frac{1}{3},2\right]$　［解析］作出不等式组 $\begin{cases}2x-y+2\leqslant 0,\\x+2y-4\geqslant 0,\\x-3y+11\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图 1 中阴影部分所示，作出直线 $x+y+1=0$，

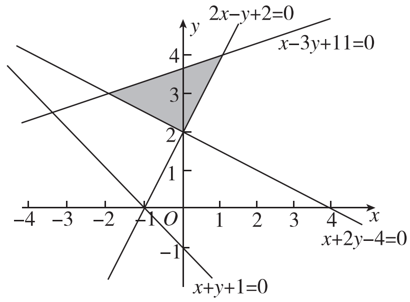


图1

由图可知 $x+y+1>0$，所以由 $(t+1)x+(t-1)y+t+1=0$，可得 $t=\frac{-x+y-1}{x+y+1}=-1+\frac{2y}{x+y+1}$.

令 $x+y+1=m(m>0)$，$y=n$，则 $x=m-n-1$，$t=-1+\frac{2n}{m}$.

由 $\begin{cases}2x-y+2\leqslant 0,\\x+2y-4\geqslant 0,\\x-3y+11\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2m-3n\leqslant 0,\\m+n-5\geqslant 0,\\m-4n+10\geqslant 0,\end{cases}$ 作出不等式组 $\begin{cases}2m-3n\leqslant 0,\\m+n-5\geqslant 0,\\m-4n+10\geqslant 0,\\m>0\end{cases}$ 表示的平面区域，如图 2 中阴影部分所示，其中 $A(3,2)$，$B(2,3)$，$\frac{n}{m}$ 表示图 2 中可行域内的点与原点连线的斜率，又 $k_{OA}=\frac{2}{3}$，$k_{OB}=\frac{3}{2}$，故 $\frac{n}{m}\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$，

所以 $t=-1+\frac{2n}{m}\in\left[\frac{1}{3},2\right]$.

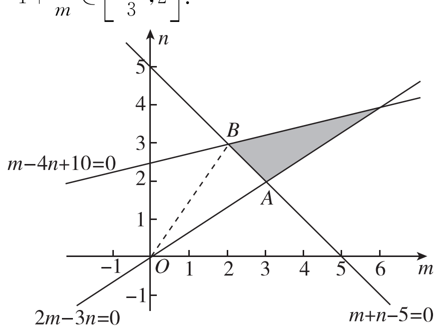


图2

## 小题 14　基本不等式、绝对值不等式

1. B　［解析］$|x-1|-|x-3|\leqslant|x-1-x+3|=2$，由题意知 $a^2-3a<2$，解得 $\frac{3-\sqrt{17}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

2. D　［解析］由 $x^2+2xy-1=0$，得 $y=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}$，所以 $2x+y=2x+\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\times\left(3x+\frac{1}{x}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3x\cdot\frac{1}{x}}=\sqrt{3}$，

当且仅当 $3x=\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立，此时 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$，符合题意，所以 $2x+y$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，故选 D.

3. C ［解析］当 $t\leqslant 0$ 时，该不等式无解；当 $t>0$ 时，因为 $|x+t^2-2|+|x+t^2+2t-1|\geqslant|x+t^2-2-(x+t^2+2t-1)|=2t+1$，所以要使原不等式无解，只需 $3t\leqslant 2t+1$，得 $0<t\leqslant 1$. 综上所述，实数 $t$ 的取值范围为 $(-\infty,1]$，故选 C.

4. B ［解析］由题得 $0=x+2y+2xy-8\leqslant x+2y+\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2-8$（当且仅当 $x=2y$ 时取等号）.

设 $x+2y=t(t>0)$，则 $t+\frac{1}{4}t^2-8\geqslant 0$，

所以 $t^2+4t-32\geqslant 0$，即 $(t+8)(t-4)\geqslant 0$，所以 $t\geqslant 4$，故 $x+2y$ 的最小值为 4.

5. B ［解析］由 $x+y=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+8$ 得 $x+y-8=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$，则 $(x+y-8)(x+y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)(x+y)=5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=9$，当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，即 $y=2x$ 时，等号成立. 令 $t=x+y(t>0)$，可得 $(t-8)\cdot t\geqslant 9$，解得 $t\leqslant -1$（舍去）或 $t\geqslant 9$，所以 $x+y$ 的最小值为 9，故选 B.

6. A ［解析］由 $a,b$ 为正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，得 $b=\frac{2a}{a-1}>0(a\neq 1)$，所以 $a-1>0$，所以 $\frac{2}{a-1}+\frac{1}{b-2}=\frac{2}{a-1}+\frac{1}{\frac{2a}{a-1}-2}=\frac{2}{a-1}+\frac{a-1}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{a-1}\cdot\frac{a-1}{2}}=2$，当且仅当 $\frac{2}{a-1}=\frac{a-1}{2}$，即 $a=3$ 时等号成立，所以 $\frac{2}{a-1}+\frac{1}{b-2}$ 的最小值为 2，故选 A.

7. B ［解析］$\because a+b=1,c+d=1,\therefore ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号，$\therefore \frac{1}{ab}\geqslant 4$，则 $\frac{1}{abc}+\frac{1}{d}\geqslant 4\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=(c+d)\cdot\left(\frac{4}{c}+\frac{1}{d}\right)=5+\frac{4d}{c}+\frac{c}{d}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4d}{c}\cdot\frac{c}{d}}=9$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2},c=\frac{2}{3},d=\frac{1}{3}$ 时，等号成立，$\therefore \frac{1}{abc}+\frac{1}{d}$ 的最小值为 9，故选 B.

8. B ［解析］对于 A，取 $x=\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2}$，此时 $|x-y^2|+|x^2+y|\leqslant 1$，但 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{3}{2}$，故 A 中说法错误；对于 B，由 $(x^2-y)+(y^2-x)\leqslant|x^2-y|+|y^2-x|=|x-y^2|+|x^2-y|\leqslant 1$，得 $x^2-x+y^2-y\leqslant 1$，即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}$，故 B 中说法正确；对于 C，取 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$，此时 $|x+y^2|+|x^2-y|\leqslant 1$，但 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2>\frac{3}{2}$，故 C 中说法错误；对于 D，取 $x=-\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$，此时 $|x+y^2|+|x^2+y|\leqslant 1$，但 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2>\frac{3}{2}$，故 D 中说法错误. 故选 B.

9. 8 ［解析］$(x-2y)^2+\frac{4}{y(x-3y)}\geqslant(x-2y)^2+\frac{4}{\left[\frac{y+(x-3y)}{2}\right]^2}=(x-2y)^2+\frac{16}{(x-2y)^2}\geqslant 8$，当且仅当 $4y=x$ 且 $x-2y=\pm 2$，即 $x=4,y=1$ 或 $x=-4,y=-1$ 时取等号.

10. $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ ［解析］设 $\frac{y}{x}=t(t>0)$，则 $\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{x}=\frac{1}{1+2t}+t=\frac{1}{1+2t}+\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{1+2t}\times\frac{1+2t}{2}}-\frac{1}{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$，当且仅当 $t=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ 时取等号.

11. 4 16 ［解析］$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=4$，当且仅当 $a=b=2$ 时取等号，所以 $ab$ 的最大值为 4.

$(a^2+1)(b^2+1)=(ab)^2+a^2+b^2+1=(ab)^2+(a+b)^2-2ab+1=(ab)^2-2ab+17=(ab-1)^2+16$，故当 $ab=1$ 时，$(a^2+1)(b^2+1)$ 取得最小值 16.

12. 2 ［解析］由题意得 $\frac{1-2a+b}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+3\sqrt{c})}=\frac{a+4b+3c}{\sqrt{ab}+3\sqrt{bc}}\geqslant\frac{a+4b+3c}{\frac{a+b}{2}+\frac{3(b+c)}{2}}=2$，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{9}$ 时取等号，故 $\frac{1-2a+b}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+3\sqrt{c})}$ 的最小值为 2.

13. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ［解析］$1=x^2+2y^2+z^2=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}y^2+\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}z^2\geqslant 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}xy+2\times\frac{\sqrt{3}}{3}yz+2\times\frac{\sqrt{6}}{6}xz$，

当且仅当 $x=\sqrt{2}y=\frac{\sqrt{6}}{2}z$ 时等号成立，

$\therefore\left(2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}xy+2\times\frac{\sqrt{3}}{3}yz+2\times\frac{\sqrt{6}}{6}xz\right)\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\leqslant 1\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$，

即 $t=\frac{4\sqrt{3}}{3}xy+\sqrt{2}yz+xz$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

## 小题 15 直线与圆

1. C ［解析］直线 $x-2y-2=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$，故所求直线的斜率为 $-2$，所以所求直线的方程为 $y-0=-2(x-1)$，即 $2x+y-2=0$，故选 C.

2. C ［解析］由圆 $C_1$ 与圆 $C_2$ 相外切，可得 $\sqrt{(a+b)^2+(-2+2)^2}=2+1=3$，即 $(a+b)^2=9$，又 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，当且仅当 $a=b=\pm\frac{3}{2}$ 时等号成立，故 $ab$ 的最大值为 $\frac{9}{4}$.

3. B ［解析］圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $C(1,0)$，半径为 1，故 $|PC|=\sqrt{(1-1)^2+(-2-0)^2}=2$，易得以 $PC$ 为直径的圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$，将两圆的方程相减，得 $AB$ 所在直线的方程为 $2y+1=0$，即 $y=-\frac{1}{2}$.

4. B ［解析］由题意得 $\frac{|-2k|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{k^2-2k+3}$，且 $k^2-2k+3>0$，解得 $-3\leqslant k\leqslant 1$. 因为 $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=4k^2-(k^2-2k+3)=3k^2+2k-3=3\left(k+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{10}{3}$，所以当 $k=-3$ 时，$2ab$ 取得最大值 18，即 $ab$ 取得最大值 9.

5. D ［解析］圆 $M$ 的标准方程为 $x^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$，则圆心为 $M(0,a)$，半径 $R=a$，圆心到直线 $x+y=0$ 的距离 $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$\because$ 直线 $x+y=0$ 被圆 $M:x^2+y^2-2ay=0(a>0)$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，$\therefore 2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=2\sqrt{\frac{a^2}{2}}=2\sqrt{2}$，即 $\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\sqrt{2}$，即 $a^2=4$，$\therefore a=2$，则圆 $M$ 的圆心为 $M(0,2)$，半径 $R=2$. $\because$ 圆 $N:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心为 $N(1,1)$，半径 $r=1$，$\therefore|MN|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，又 $R+r=3,R-r=1$，$\therefore R-r<|MN|<R+r$，即圆 $M$ 与圆 $N$ 相交. 故选 D.

6. A ［解析］因为圆心 $C$ 在直线 $y=2x-4$ 上，所以 $C(a,2a-4)$，则圆 $C$ 的方程为 $(x-a)^2+[y-2(a-2)]^2=1$.

设点 $M(x,y)$，因为 $|MA|=2|MO|$，所以 $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$，

化简得 $x^2+y^2+2y-3=0$，即 $x^2+(y+1)^2=4$，

设 $D(0,-1)$，则点 $M$ 在以 $D(0,-1)$ 为圆心，2 为半径的圆上.

由题意，点 $M(x,y)$ 在圆 $C$ 上，所以圆 $C$ 与圆 $D$ 有公共点，则 $2-1\leqslant|CD|\leqslant 2+1$，即 $1\leqslant\sqrt{a^2+(2a-3)^2}\leqslant 3$. 由 $\sqrt{a^2+(2a-3)^2}\geqslant 1$ 得 $5a^2-12a+8\geqslant 0$，解得 $a\in\mathbf{R}$；

由 $\sqrt{a^2+(2a-3)^2}\leqslant 3$ 得 $5a^2-12a\leqslant 0$，解得 $0\leqslant a\leqslant\frac{12}{5}$. 所以圆心 $C$ 的横坐标 $a$ 的取值范围为 $\left[0,\frac{12}{5}\right]$. 故选 A.

7. B [解析] 设 $P(4-2m,m)$,∵$PA,PB$ 是圆 $C$ 的两条切线,
∴$CA\perp PA,CB\perp PB$,
∴$AB$ 是圆 $C$ 与以 $PC$ 为直径的圆的公共弦.
易得以 $PC$ 为直径的圆的方程为$[x-(2-m)]^2+\left(y-\dfrac{m}{2}\right)^2=(2-m)^2+\dfrac{m^2}{4}$①,
又 $x^2+y^2=1$②,
∴①−②得 $AB$ 所在直线的方程为 $2(2-m)x+my=1$,可化为 $4x-1+m(y-2x)=0$,由 $\begin{cases}4x-1=0,\\ y-2x=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4},\\ y=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 故直线 $AB$ 经过定点 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$,故选 B.

8. B [解析] 由题意得 $f(x_0)=\left|x_0^2+\dfrac{1}{x_0}\right|+\left|x_0^2-\dfrac{1}{x_0}\right|+ax_0+b+3=0$,
因为 $|x_0|\geqslant 1$,所以 $f(x_0)=x_0^2+\dfrac{1}{x_0}+x_0^2-\dfrac{1}{x_0}+ax_0+b+3=2x_0^2+ax_0+b+3=0$,整理得 $x_0a+b+2x_0^2+3=0$,即 $(a,b)$ 可看成直线 $x_0x+y+2x_0^2+3=0$ 上一点.
原点到直线 $x_0x+y+2x_0^2+3=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2x_0^2+3|}{\sqrt{x_0^2+1}}$,
所以 $a^2+b^2\geqslant d^2=\left(\dfrac{2x_0^2+3}{\sqrt{x_0^2+1}}\right)^2=\dfrac{(2x_0^2+3)^2}{x_0^2+1}$.
设 $x_0^2+1=t(t\geqslant 2)$,则 $\dfrac{(2x_0^2+3)^2}{x_0^2+1}=\dfrac{4t^2+4t+1}{t}=4t+\dfrac{1}{t}+4$.因为 $y=4t+\dfrac{1}{t}+4(t\geqslant 2)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $y_{\min}=8+\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{25}{2}$,即当 $|x_0|=1$ 时,$a^2+b^2$ 取得最小值 $\dfrac{25}{2}$,故选 B.

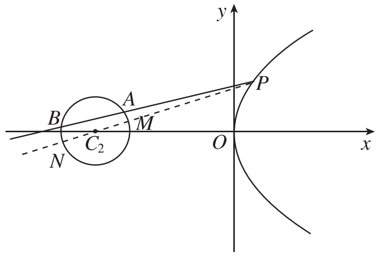
9. $\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{64}{9}$ [解析] 设 $P(x,y)$,∵$|PA|=2|PB|$,
∴$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,即 $(x+2)^2+y^2=4(x-2)^2+4y^2$,化简可得 $\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{64}{9}$,故点 $P$ 的轨迹方程为 $\left(x-\dfrac{10}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{64}{9}$.

10. 5 [解析] 由题易知 $A(0,0)$.$mx=y+m-3$ 可化为 $m(x-1)-(y-3)=0$,可得 $B(1,3)$.因为 $1\times m+m\times(-1)=0$,所以 $l_1$ 与 $l_2$ 互相垂直,所以 $|MA|^2+|MB|^2=|AB|^2=10$,所以 $10\geqslant 2|MA|\cdot|MB|$,即 $|MA|\cdot|MB|\leqslant 5$,当且仅当 $|MA|=|MB|$ 时取等号,故 $|MA|\cdot|MB|$ 的最大值为 5.

11. −1 3 [解析] $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 可化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$,故圆心 $C(1,2)$,半径 $r=2$.
因为圆 $C$ 上存在两点关于直线 $l:x+my+1=0$ 对称,所以直线 $l$ 过圆心 $C(1,2)$,所以 $1+2m+1=0$,解得 $m=-1$.
过点 $M(-1,-1)$ 作圆 $C$ 的切线,切点为 $P$,则 $|MP|=\sqrt{(1+1)^2+(2+1)^2-4}=3$.

12. 1 0或6 [解析] 圆 $C$ 的方程可化为 $(x-1)^2+y^2=1$,则圆心 $C(1,0)$,半径为 1,直线 $l$ 的方程可化为 $(k+1)x-y-2k=0$.
易知当直线 $l$ 经过圆心 $C$ 时,$|AB|$ 取得最大值,此时 $k=1$.
设 $\angle ACB=\theta$,则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\theta$,故当 $\theta=90^\circ$ 时,$\triangle ABC$ 的面积最大,此时圆心 $C$ 到直线 $l$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,即 $\dfrac{|1-k|}{\sqrt{(k+1)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $k=0$ 或 $k=6$.

13. $[0,3\sqrt{5}-6]$ [解析] 如图,过点 $P$ 作射线 $PC_2$,交圆 $C_2$ 于点 $M,N$,可得 $\begin{cases}|PM|\cdot|PN|=|PA|\cdot|PB|,\\ |PM|=|PC_2|-1,\\ |PN|=|PC_2|+1.\end{cases}$
设 $|AB|=x$,因为 $|PA|=2|AB|$,所以 $|PC_2|^2-1=2|AB|\cdot 3|AB|=2x\cdot 3x$,则 $|PC_2|^2=6x^2+1$.又 $x\in(0,2]$,所以 $|PC_2|^2\in(1,25]$,由题知 $C_2(-4,0)$,故 $1<(x_0+4)^2+y_0^2\leqslant 25$,将 $y_0^2=4x_0$ 代入,得 $1<x_0^2+12x_0+16\leqslant 25$,又 $x_0\geqslant 0$,可得 $x_0\in[0,3\sqrt{5}-6]$.




## 小题 16 椭圆及其标准方程

1. C [解析] 方法一:设所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$,半焦距为 $c$,由椭圆 $\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{x^2}{9}=1$ 的焦点为 $(0,-4),(0,4)$,知 $c=4$.
由椭圆的定义知,$2a=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(-\sqrt{5}+4)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(-\sqrt{5}-4)^2}$,解得 $a=2\sqrt{5}$,由 $c^2=a^2-b^2$,得 $b^2=4$,所以所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{20}+\dfrac{x^2}{4}=1$,故选 C.
方法二:设所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{25-k}+\dfrac{x^2}{9-k}=1(k<9)$,则由题意得 $\dfrac{5}{25-k}+\dfrac{3}{9-k}=1$,解得 $k=5$ 或 $k=21$(舍),所以所求椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{20}+\dfrac{x^2}{4}=1$,故选 C.

2. D [解析] 由题意知 $F_2(1,0)$,将 $x=1$ 代入方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 中,可得 $y=\pm\dfrac{3}{2}$,故 $|AB|=3$,则 $S_{\triangle ABF_1}=\dfrac{1}{2}\times2\times3=3$.因为 $\triangle ABF_1$ 的周长 $C=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=8$,$S_{\triangle ABF_1}=\dfrac{1}{2}C\cdot r$,所以 $\dfrac{1}{2}\times 8r=3$,解得 $r=\dfrac{3}{4}$,故选 D.

3. A [解析] 由题可设椭圆 $C$ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,椭圆 $C$ 的右焦点为 $M$,连接 $PM$,则 $|FM|=2|OF|=10$.由 $|OP|=|OF|=|OM|$ 知 $FP\perp PM$,又 $|PF|=6$,所以 $|PM|=\sqrt{10^2-6^2}=8$,所以 $2a=|PF|+|PM|=14$,所以 $a=7$.又 $c=5$,所以 $b^2=a^2-c^2=49-25=24$,所以椭圆 $C$ 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{24}=1$.

4. A [解析] 因为圆 $O$ 与直线 $BF$ 相切,所以圆 $O$ 的半径为 $\dfrac{bc}{a}$,即 $|OC|=\dfrac{bc}{a}$,因为四边形 $FAMN$ 是平行四边形,所以点 $M$ 的坐标为 $\left(\dfrac{a+c}{2},\dfrac{bc}{a}\right)$,代入椭圆方程得 $\dfrac{(a+c)^2}{4a^2}+\dfrac{c^2b^2}{a^2b^2}=1$,所以 $5e^2+2e-3=0$,又 $0<e<1$,所以 $e=\dfrac{3}{5}$.故选 A.

5. A [解析] 设椭圆 $C_1$ 和双曲线 $C_2$ 的离心率分别为 $e_1,e_2$.连接 $AF_2,BF_2$,由题易知四边形 $AF_1BF_2$ 为矩形.在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中,$|F_1F_2|=2c$,$\angle AF_1F_2=\dfrac{\pi}{3}$,所以 $|AF_1|=c$,$|AF_2|=\sqrt{3}c$,则 $e_1=\dfrac{2c}{\sqrt{3}c+c}=\sqrt{3}-1$,$e_2=\dfrac{2c}{\sqrt{3}c-c}=\sqrt{3}+1$,所以 $e_1+e_2=2\sqrt{3}$.故选 A.

6. D [解析] 由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(3a^2+b^2)x^2=a^2b^2$,解得 $x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$,可得 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$.
不妨令 $A\left(\dfrac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}},\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$,$B\left(-\dfrac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}},-\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$,
则 $\overrightarrow{AF}=\left(-c-\dfrac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}},-\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$,$\overrightarrow{BF}=\left(-c+\dfrac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}},\dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}\right)$,