参考答案（听课手册）

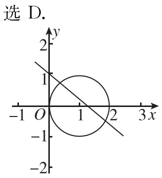
方法篇　选填题的特殊解法

方法一

1. A ［解析］由题意,令 $a=2,b=1$,则 $x=2+\mathrm{e}$,$y=1+2\mathrm{e}^2$,$z=1+2\mathrm{e}$,显然有 $1+2\mathrm{e}^2>1+2\mathrm{e}>2+\mathrm{e}$,即 $x<z<y$.
2. D ［解析］由题知 $\tan\alpha=\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$,因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以可取 $\beta=\frac{\pi}{6}$,所以 $\sin\beta=\frac{1}{2}$,$\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,则有 $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.
3. A ［解析］不妨取特殊点 $P(2,0)$,$M(2,1)$,$N(2,-1)$,则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=4-1=3$,故选 A.
4. D ［解析］设等比数列$\{a_n\}$的前三项分别为 $a_1=1,a_2=2,a_3=4$,则 $S_1=1,S_2=3,S_3=7$,显然选项 A,B,C 均不成立,D 成立,故选 D.
5. 2 ［解析］由题意可知,$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$的值与点 P,Q 的位置无关,而当直线 BC 与直线 PQ 重合时,有 $\lambda=\mu=1$,所以$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$.

方法二

1. A ［解析］易知函数 $f(x)=x^2+x\sin x$ 是偶函数,其图像关于 y 轴对称,故排除 B;令 $g(x)=x+\sin x$,则 $g'(x)=1+\cos x\geqslant0$ 恒成立,∴$g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,∵$g(0)=0$,∴$f(x)=xg(x)\geqslant0$,故排除 D;当 $x>0$ 时,$f(x)=xg(x)$单调递增,当 $x<0$ 时,$f(x)=xg(x)$单调递减,故排除 C.故选 A.
2. C ［解析］注意到直线 l 恒过定点$(0,1)$,所以当 $b=1$ 时,直线 l 与椭圆 C 恒有公共点,排除 D;若 $b=4$,则方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b}=1$不表示椭圆,排除 B;若 $b>4$,则显然点$(0,1)$恒在椭圆内部,满足题意,排除 A.故选 C.
3. C ［解析］$f(x)=\sin(x-\varphi+\varphi)-2\cos(x-\varphi)\sin\varphi=\sin(x-2\varphi)$,
令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-2\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $2\varphi-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant2\varphi+\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,因为 $0<\varphi<\pi$,所以可分别令 φ 取$\frac{\pi}{4}$,$\frac{5\pi}{6}$,代入可知 $f(x)$在$\left[3\pi,\frac{7\pi}{2}\right]$上均不为增函数,故排除 A,B,D,故选 C.
4. D ［解析］由题知当 $m=0$ 时不符合题意.直线 $x-my+m=0$ 恒过点$(0,1)$,斜率为$\frac{1}{m}$,在同一坐标系中画出直线与圆,如图所示.由直线与圆有两个交点,可得直线的斜率一定为负数,排除 A,B.当直线的斜率为-1 时,符合题意.排除 C.故选 D.



方法三

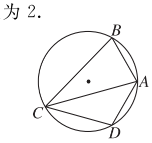
1. D ［解析］对于 A,$y'=\mathrm{e}^x-1>0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,所以函数在$(0,+\infty)$上单调递增,其值域为$(1,+\infty)$,排除 A;对于 B,函数 $y=\mathrm{e}^x+\ln x$,当 $x\to0$ 时,$\ln x\to-\infty$,$\mathrm{e}^x\to1$,所以 $y\to-\infty$,排除 B;对于 C,函数 $y=x-\sqrt{x}$ 可以看作是关于$\sqrt{x}$的二次函数,即 $y=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}$,易得其值域为$\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$,排除 C.故选 D.
2. B ［解析］(从选项验证)若 $\omega=2$,则$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,不符合题意;若 $\omega=4$,则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(4\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=1$,符合题意.所以 ω 的最小值为 4.
3. D ［解析］对于 A,函数 $y=x^{\mathrm{e}}$ 是$(0,+\infty)$上的增函数,故 A 错;对于 B,若 $\pi3^{\mathrm{e}-2}<3\pi^{\mathrm{e}-2}$,则 $3^{\mathrm{e}-3}<\pi^{\mathrm{e}-3}$,而函数 $y=x^{\mathrm{e}-3}$是$(0,+\infty)$上的减函数,故 B 错;对于 C,若 $\log_\pi\mathrm{e}>\log_3\mathrm{e}$,则$\frac{1}{\log_\mathrm{e}\pi}>\frac{1}{\log_\mathrm{e}3}$,即 $\log_\mathrm{e}\pi<\log_\mathrm{e}3$,而函数 $y=\log_\mathrm{e}x$ 是$(0,+\infty)$上的增函数,故 C 错;对于 D,若 $\pi\log_3\mathrm{e}>3\log_\pi\mathrm{e}$,则$\frac{\pi}{\log_\mathrm{e}3}>\frac{3}{\log_\mathrm{e}\pi}$,即 $\pi\log_\mathrm{e}\pi>3\log_\mathrm{e}3$,即 $\pi^\pi>3^3$,D 正确.故选 D.
4. D ［解析］显然函数 $f(x)$为奇函数.从各选项分析,若 $a=1$,则 $f(a^2)+f(a-2)=f(1)+f(-1)=0$,不满足 $f(a^2)+f(a-2)>0$,所以 B,C 错;若 $a=-2$,则 $f(a^2)+f(a-2)=f(4)+f(-4)=0$,也不满足 $f(a^2)+f(a-2)>0$,所以 A 错.故选 D.

方法四

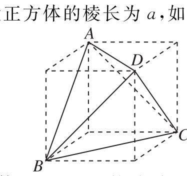
1. A ［解析］$1<a=\sqrt{2}<1.5$,$b=\mathrm{e}^{-\pi}<1$,$c=\log_2 3>\log_2\sqrt{8}=1.5$,故 $b<a<c$,故选 A.
2. C ［解析］由方程 $x+2^x=4$,可估计 $1<x_1<2$,由方程 $x+\log_2 x=4$,可估计 $2<x_2<3$,所以 $3<x_1+x_2<5$.
3. A ［解析］因为 $a=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2})$,$b=\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\in(1,\sqrt{2})$,故排除 C,D.又 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$,所以 $a<b$.故选 A.
4. B ［解析］易知 $F(1,0)$,对点 A,B,C 的位置进行估计,不妨取 A 为坐标原点,则$|\overrightarrow{FA}|=1$,根据对称性知 $B\left(\frac{3}{2},\sqrt{6}\right)$,$C\left(\frac{3}{2},-\sqrt{6}\right)$,则$|\overrightarrow{FB}|=|\overrightarrow{FC}|=\frac{5}{2}$,∴$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=6$.故选 B.

方法五

1. C ［解析］∵$0<b<a<1$,∴构造函数 $y=a^x$ 和 $y=b^x$,则两个函数均为减函数,∴$a^b>a^a$,$b^a<b^b$,又∵$y=x^b$ 在$(0,+\infty)$上为增函数,∴$a^b>b^b$,即在 a^b,b^a,a^a,b^b 中最大的是 a^b,故选 C.
2. A ［解析］构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$,满足函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,$f(x)+2>f'(x)$,$f(0)=1$,则不等式 $\ln[f(x)+2]-\ln3>x$ 即为 $\ln(\mathrm{e}^x+2)-\ln3>x$,即 $\ln\frac{\mathrm{e}^x+2}{3}>x$,所以$\frac{\mathrm{e}^x+2}{3}>\mathrm{e}^x$,即 $\mathrm{e}^x<1$,得 $x<0$,所以不等式的解集为$(-\infty,0)$.
3. A ［解析］如图,构造四边形 $ABCD$,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,则 $AB=AD=1$,$\angle BAD=120°$,$\angle BCD=60°$,所以 A,B,C,D 四点共圆,分析可知当线段 AC 为圆的直径时,$|\boldsymbol{c}|$取得最大值,最大值为 2.



4. $16\sqrt{3}$ ［解析］将正四面体 $ABCD$ 放在一个正方体内,设正方体的棱长为 a,如图所示.



设正四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为 R,则$\frac{4}{3}\pi R^3=8\sqrt{6}\pi$,得 $R=\sqrt{6}$.∵正四面体的外接球和正方体的外接球是同一个球,∴$\sqrt{3}a=2R=2\sqrt{6}$,∴$a=2\sqrt{2}$,∵正四面体 $ABCD$ 的每条棱长均等于正方体的面对角线长,∴正四面体 $ABCD$ 的棱长为$\sqrt{2}a=4$,因此,这个正四面体的表面积为 $4\times\frac{1}{2}\times4^2\times\sin\frac{\pi}{3}=16\sqrt{3}$.

思想篇　数学思想方法应用

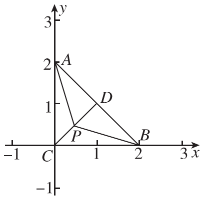
思想一

1. D ［解析］构造函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\pi^{-x}$,则 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $\mathrm{e}^a+\pi^b\geqslant\mathrm{e}^{-b}+\pi^{-a}$,所以 $\mathrm{e}^a-\pi^{-a}\geqslant\mathrm{e}^{-b}-\pi^b$,即 $f(a)\geqslant f(-b)$,所以 $a\geqslant-b$,即 $a+b\geqslant0$.故选 D.
2. B ［解析］由 $a_1+a_3+a_5=42$,$a_2+a_4=28$,可得 $S_5=70$,由已知得 $tS_5=5^2-12\times5$,得 $t=-\frac{1}{2}$,故$-\frac{1}{2}S_n=n^2-12n$,即 $S_n=-2n^2+24n=-2(n-6)^2+72$,所以当 $n=6$ 时,S_n 取得最大值.故选 B.
3. A ［解析］由题可知,圆的圆心为 $C(0,2)$,半径为 1,设椭圆上任意一点 $Q(3\cos\alpha,\sin\alpha)$,则$|CQ|=\sqrt{9\cos^2\alpha+(2-\sin\alpha)^2}=\sqrt{-8\sin^2\alpha-4\sin\alpha+13}$,$\sin\alpha\in[-1,1]$,根据二次函数的性质可知,当 $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$时,$|CQ|_{\max}=\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$,故$|PQ|$的最大值为$|CQ|_{\max}+1=\frac{3\sqrt{6}}{2}+1$.故选 A.
4. C ［解析］∵$f(x)=\frac{x\ln x+a}{x+1}$只有一个零点,∴$x\ln x+a=0$ 只有一个实数解,即 $a=-x\ln x$ 只有一个实数解.设 $g(x)=-x\ln x(x>0)$,则 $g'(x)=-\ln x-1=-(\ln x+1)$,∴当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$g'(x)>0$,当 $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$g'(x)<0$,∴$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$上单调递减,∴当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$时,$g(x)$取得最大值,最大值为 $g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$,且当 $x\to0$ 时,$g(x)\to0$,当 $x\to+\infty$时,$g(x)\to-\infty$.∵$a=g(x)$只有一个实数解,∴$a\leqslant0$ 或 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$.故选 C.

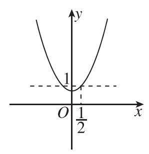
思想二

1. A ［解析］根据题意,以 C 为坐标原点,CB 所在直线为 x 轴,CA 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系,如图所示,则 $B(2,0)$,$A(0,2)$,由 D 为 AB 的中点,知 $D(1,1)$,由点 P 是线段 CD 上的动点,可设 $P(m,m)(0\leqslant m\leqslant1)$,则$\overrightarrow{PA}=(-m,2-m)$,$\overrightarrow{PB}=(2-m,-m)$,则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-m)\cdot(2-m)+(2-m)\cdot(-m)=2m^2-$

$4m=2(m-1)^2-2$. 又 $0\leqslant m\leqslant 1$，所以当 $m=1$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值 -2. 故选 A.

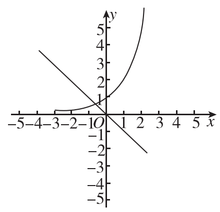


2. C ［解析］根据题意作出函数 $f(x)$ 的大致图像如图所示.



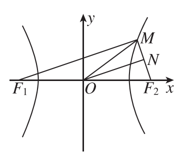
因为 $f(\log_4 x)>1$，所以结合图像可得 $\log_4 x>\frac{1}{2}$ 或 $\log_4 x<-\frac{1}{2}$，解得 $x>2$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$，故选 C.

3. D ［解析］作出函数 $y=2^x$ 和 $y=-x$ 的图像如图所示，



结合图像可知，若函数 $f(x)$ 存在零点，则实数 a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. 故选 D.

4. C ［解析］如图，不妨设 M 位于 x 轴上方，取 MF_2 的中点 N，连接 ON，$\because(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，$\therefore\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$，又易知 $ON\parallel MF_1$，$\therefore MF_1\perp MF_2$. 由双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{12}=1$，知实轴长为 $4\sqrt{2}$，$c^2=8+12=20$，设 $|MF_2|=x$，则 $|MF_1|=x+4\sqrt{2}$，在直角三角形 MF_1F_2 中，由勾股定理得 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=4c^2=80$，$\therefore x=2\sqrt{2}$，$\therefore|MF_1|=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，则 $t=\frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=3$. 故选 C.



思想三

1. B ［解析］若双曲线的焦点在 x 轴上，则渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，可得 $b=2a$，则 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$. 若双曲线的焦点在 y 轴上，则渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，可得 $a=2b$，则 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 B.

2. A ［解析］根据题意，将 7 名大学生分成两组，每组最少 2 人，分两类讨论：一组 3 人一组 4 人，由于女生不能单独成组，所以有 $C_7^3-1=34$(种)分组方法；一组 2 人一组 5 人，有 $C_7^2-C_3^2=18$(种)分组方法. 故共有 $34+18=52$(种)不同的分组方法. 故选 A.

3. D ［解析］当 $a>1$ 时，若 $a^x>a^y$，则 $x>y$，但是不能推出 $|x|>|y|$，所以不能推出 $\log_a|x|>\log_a|y|$，所以此时“$a^x>a^y$”不是“$\log_a|x|>\log_a|y|$”的充分条件；当 $0<a<1$ 时，同理可得“$a^x>a^y$”不是“$\log_a|x|>\log_a|y|$”的充分条件. 综上，“$a^x>a^y$”不是“$\log_a|x|>\log_a|y|$”的充分条件. 当 $a>1$ 时，若 $\log_a|x|>\log_a|y|$，则 $|x|>|y|$，且 $x,y\neq 0$，但是不能推出 $x>y$，所以不能推出 $a^x>a^y$，所以此时“$a^x>a^y$”不是“$\log_a|x|>\log_a|y|$”的必要条件；当 $0<a<1$ 时，同理可得“$a^x>a^y$”不是“$\log_a|x|>\log_a|y|$”的必要条件. 综上，“$a^x>a^y$”不是“$\log_a|x|>\log_a|y|$”的必要条件. 故选 D.

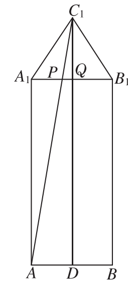
4. $\left(\frac{3}{5},2\right)$ ［解析］函数 $f(x)=\begin{cases}-1,x<1,\\x-2,x\geqslant 1,\end{cases}$ 显然当 $x\geqslant 1$ 时，函数是增函数，有 $f(x)\geqslant f(1)=-1$，而当 $x<1$ 时，函数是常函数，且 $f(x)=-1$，由 $f(5a-2)>f(2a^2)$，可知 $5a-2\geqslant 1$ 恒成立. 当 $\begin{cases}5a-2\geqslant 1,\\2a^2\geqslant 1,\end{cases}$ 即 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，因为 $f(5a-2)>f(2a^2)$，所以 $5a-2>2a^2$，解得 $\frac{1}{2}<a<2$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a<2$；当 $\begin{cases}5a-2\geqslant 1,\\2a^2<1,\end{cases}$ 即 $\frac{3}{5}\leqslant a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，由 $f(5a-2)>f(2a^2)$，可得 $5a-2>1$，得 $a>\frac{3}{5}$，所以 $\frac{3}{5}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$. 综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{3}{5},2\right)$.

思想四

1. A ［解析］由 $f(x+4)=f(x)$ 可得函数 $f(x)$ 的周期为 4，又因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(2019)=f(505\times 4-1)=f(-1)=-f(1)=-1$.

2. B ［解析］不妨设 M,N 分别是椭圆的上、下顶点，P 是右顶点，则 $M(0,b)$，$N(0,-b)$，$P(a,0)$，所以 $k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{3}$，即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，故离心率 $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 B.

3. $\sqrt{31}$ ［解析］将三棱柱的面 $A_1B_1C_1$ 和面 ABB_1A_1 放在同一个平面内，如图所示，作 $C_1D\perp AB$，垂足为 D，且交 A_1B_1 于 Q，则 $C_1Q\perp A_1B_1$，$A_1Q=AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，连接 AC_1，$\because$ 两点之间线段最短，$\therefore AC_1$ 即为所求的最短距离. $\because C_1Q=A_1C_1\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$，$\therefore C_1D=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$，又 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AC_1=\sqrt{AD^2+C_1D^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{31}$.



4. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ ［解析］若函数 $g(x)=f(x)-kx$ 有 4 个零点，则方程 $f(x)=kx$ 有 4 个不同的实数解，$\therefore f(x)=\begin{cases}|\ln x|,x>0,\\2-x^2,x\leqslant 0\end{cases}$ 的图像与直线 $y=kx$ 有 4 个不同的交点. 记 $h(x)=\ln x$，过原点作 $h(x)$ 图像的切线，则易知切线斜率为 $\frac{1}{e}$，$\therefore$ 结合 $f(x)$ 的图像(图略)，可知 $0<k<\frac{1}{e}$，即实数 k 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

5. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ ［解析］设直线 PO(O 为坐标原点)与圆的交点为 C,D，根据相交弦定理，得 $|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|=(|AO|-|OP|)(|BO|+|OP|)$，$\because|AO|=|BO|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\therefore|PA|\cdot|PB|=a^2+b^2-|OP|^2=a^2-b^2$. $\therefore|OP|^2=2b^2$.
由题意可知，存在点 P 满足 $|OP|^2=2b^2$，$\therefore(|OP|^2)_{\max}=a^2\geqslant 2b^2$，即 $a^2\geqslant 2(a^2-c^2)$，$\therefore e^2\geqslant\frac{1}{2}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e<1$.

自习篇　集合、常用逻辑用语、复数、不等式与线性规划

自习一

1. C ［解析］因为 $B=\{x|y=\sqrt{2-x^2}\}=\{x|2-x^2\geqslant 0\}=\{x|-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$，故选 C.
2. D ［解析］因为 $\complement_U B=\{1,4,5\}$，所以 $A\cap(\complement_U B)=\{1,4\}$，故选 D.
3. A ［解析］由题意可得 $N=\left\{x\,\middle|\,\log_{\frac{1}{2}}x<0\right\}=\{x|x>1\}$，又 $M=\{x|-1\leqslant x<3\}$，所以 $M\cup N=\{x|x\geqslant -1\}$，故选 A.
4. C ［解析］由题意得 $M=\{5,4,1\}$，所以集合 M 的真子集的个数为 $2^3-1=7$，故选 C.
5. D ［解析］由题意可知，若 B 为空集，则方程 $ax=1$ 无解，可得 $a=0$；若 B 不为空集，则 $a\neq 0$，由 $ax=1$ 解得 $x=\frac{1}{a}$，所以 $\frac{1}{a}=-1$ 或 $\frac{1}{a}=2$，解得 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{2}$. 综上，由实数 a 的所有可能取值组成的集合为 $\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$. 故选 D.
6. C ［解析］由题设可知 $C=\{0,2,4\}$，则 $B\subseteq C$，故 $B\cap C=B$，故选 C.

自习二

1. B ［解析］若 $n\not\subset\alpha$，则 m,n 可能平行，可能相交，也可能异面，所以不是充分条件；反过来，若 n 与 m 异面，$m\subset\alpha$，则必有 $n\not\subset\alpha$，所以是必要条件. 故选 B.
2. A ［解析］由题知 $a>0,b>0$，
若 $a+b\leqslant 4$，则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立；
若 $ab\leqslant 4$，取 $a=6,b=\frac{1}{2}$，则 $a+b>4$.
所以“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的充分不必要条件.
3. B ［解析］$2^a>2^b\Leftrightarrow a>b$，$\ln a>\ln b\Leftrightarrow a>b>0$.
$\because$“$a>b$”是“$a>b>0$”的必要不充分条件，
$\therefore$“$2^a>2^b$”是“$\ln a>\ln b$”的必要不充分条件，故选 B.
4. B ［解析］在 $\triangle ABC$ 中，当 $\frac{\pi}{4}<A<\pi$ 时，可取 $A=\frac{\pi}{2}$，可得 $\sin A-\cos A=1$，可得 $\sin A-\cos A>1$ 不成立；
在 $\triangle ABC$ 中，当 $\sin A-\cos A>1$ 时，两边平方可得 $2\sin A\cdot\cos A<0$，即 $\sin A\cdot\cos A<0$，可得 $\frac{\pi}{2}<A<\pi$，即 $\frac{\pi}{4}<A<\pi$ 成立.
综上可知，在 $\triangle ABC$ 中，“$\frac{\pi}{4}<A<\pi$”是“$\sin A-\cos A>1$”的必要不充分条件，故选 B.
5. C ［解析］因为 α,β 是第一象限角，所以 $\sin\alpha,\sin\beta,\cos\alpha,\cos\beta>0$，因此 $\sin\alpha>\sin\beta\Leftrightarrow\sin^2\alpha>\sin^2\beta\Leftrightarrow\cos^2\alpha<\cos^2\beta\Leftrightarrow\cos\alpha<\cos\beta$，所以是充要条件，故选 C.
6. D ［解析］因为 S_n 递增 $\Leftrightarrow a_n>0(n\geqslant 2)$，所以“$d>0$”不能推出“$S_n$ 递增”，反之“S_n 递增”也推不出“$d>0$”，所以是既不充分也不必要条件，故选 D.

自习三

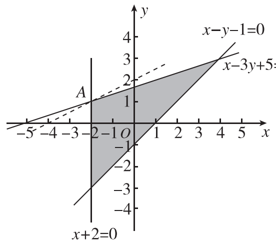
1. B ［解析］$z=\frac{2+i}{2-i}=\frac{(2+i)\times(2+i)}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，虚部为 $\frac{4}{5}$，故选 B.
2. D ［解析］$i^5-\frac{3}{i}=i+3i=4i$，故选 D.
3. D ［解析］由题意得 $\frac{a+i}{(2-i)^2}=\frac{a+i}{4-4i-1}=\frac{a+i}{3-4i}=\frac{(a+i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3a+(4a+3)i-4}{9+16}$，

由复数$\frac{a+i}{(2-i)^2}$是纯虚数,可得 $3a-4=0$ 且 $4a+3\neq0$,可得 $a=\frac{4}{3}$,故选 D.

4. C [解析] 由 $z\cdot i=z-i$,得 $z(1-i)=i$,所以 $z=\frac{i}{1-i}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$,所以$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. D [解析] $\frac{i}{2+i}=\frac{1+2i}{5}$的共轭复数为$\frac{1-2i}{5}$,易知$\frac{1-2i}{5}$在复平面内对应的点的坐标为$\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$,在第四象限.
6. A [解析] 设 $z=x+yi$,则由$|z-i|=|z+3i|$,得$|x+(y-1)i|=|x+(y+3)i|\Rightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y+3)^2\Rightarrow y=-1$,因此$|z|=\sqrt{x^2+1}\geqslant1$,故选 A.

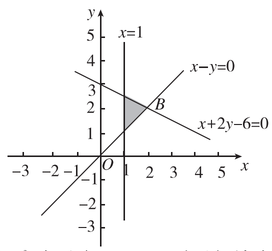
自习四

1. C [解析] 当 $a=-1,b=-2,c=-3,d=-4$ 时,$ac<bd$,故 A 错误;当 $a=2,b=1,c=-1,d=3$ 时,$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$,故 B 错误;当 $a=-1,b=-2,c=2$ 时,$a^c<b^c$,故 D 错误;由 $y=x^3$ 的单调性知 C 正确.故选 C.
2. B [解析] 作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示.



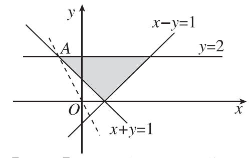
由 $z=x-2y$ 得 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$,由图易知当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$ 经过点 A 时,z 取得最小值,由$\begin{cases}x-3y+5=0,\\x+2=0,\end{cases}$得点 A 的坐标为$(-2,1)$,所以 z 的最小值为$-4$,故选 B.

3. D [解析] 根据实数 x,y 满足$\begin{cases}x\geqslant1,\\x-y\leqslant0,\\x+2y-6\leqslant0,\end{cases}$画出可行域如图中阴影部分所示.

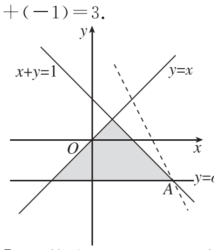


$z=x^2+y^2$ 表示点 $O(0,0)$到可行域内点的距离的平方,由图可知,可行域内的点 B 与原点 O 的距离的平方最大.由$\begin{cases}x-y=0,\\x+2y-6=0,\end{cases}$可得$B(2,2)$,则 $z=x^2+y^2$ 的最大值是 $2^2+2^2=8$,故选 D.

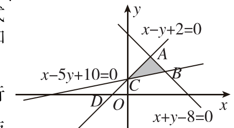
4. 1 [解析] 画出可行域如图中阴影部分所示,设 $t=2x+y$,则 $y=-2x+t$,由图易得直线$y=-2x+t$ 过点 $A(-1,2)$时,t 取得最小值 0,$\therefore z=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+y}$的最大值为 1.



5. -1 3 [解析] 由题知 $a<0$,作出可行域如图中阴影部分所示,由图可知,阴影部分的面积$S=\frac{1}{2}\times|1-2a|\times\left|\frac{1}{2}-a\right|=\frac{9}{4}$,解得 $a=-1$ 或 $a=2$(舍去).
由 $z=2x+y$ 得 $y=-2x+z$,易知当直线 $y=-2x+z$ 过点 $A(2,-1)$时,z 取得最大值,最大值为 $2\times2+(-1)=3$.



6. 1 [解析] 不等式组表示的可行域如图中阴影部分所示. $z=\frac{y}{x+2}$表示可行域内的点(x,y)与点$(-2,0)$连线的斜率,由可行域可知,直线 AD 的斜率最大,即 $z_{max}=1$.



模块一 函数与导数

第 1 讲 函数的图像与性质

典型真题研析

1. (1)D (2)D [解析] (1)因为 $x\in[-\pi,\pi]$,所以由 $f(-x)=\frac{\sin(-x)+(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=-\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}=-f(x)$,可知函数 $f(x)$为奇函数,所以选项 A 错误.又由当 $x=\pi$ 时,$f(\pi)=\frac{\sin\pi+\pi}{\cos\pi+\pi^2}=\frac{\pi}{\pi^2-1}$,可知 $0<f(\pi)<1$,所以只有 D 符合.
(2)令 $y=f(x)$,则 $f(-x)=2^{|-x|}\sin(-2x)=-2^{|x|}\sin 2x=-f(x)$,故 $f(x)$为奇函数,其图像关于原点对称,排除 A,B.当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f(x)>0$,当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$f(x)<0$,故选 D.
2. (1)C (2)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ [解析] (1)因为 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$①,且 $f(0)=0$.而 $f(1-x)=f(1+x)$,所以 $f(-x)=f(2+x)$②,由①②可得 $f(x+2)=-f(x)$,则有 $f(x+4)=f(x)$,所以函数 $f(x)$的周期为 4.由 $f(1)=2$,得 $f(-1)=-2$,于是有 $f(2)=f(0)=0$,$f(3)=f(-1)=-2$,$f(4)=f(0)=0$,所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(49)+f(50)=12\times0+f(1)+f(2)=2+0=2$.
(2)由 $f(x+4)=f(x)(x\in\mathbf{R})$,得 $f(15)=f(-1+4\times4)=f(-1)$,又$-1\in(-2,0]$,所以 $f(15)=f(-1)=\left|-1+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.而$\frac{1}{2}\in(0,2]$,所以 $f(f(15))=f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. (1)B (2)C (3)-3 [解析] (1)由题意,得 $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$.因此函数 $f(x)$的图像的对称轴为直线 $x=-\frac{a}{2}$.当$-\frac{a}{2}\leqslant0$,即 $a\geqslant0$ 时,函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上单调递增,所以函数 $f(x)$的最大值 $M=f(1)=1+a+b$,最小值 $m=f(0)=b$,所以 $M-m=1+a$;当$-\frac{a}{2}\geqslant1$,即 $a\leqslant-2$ 时,函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上单调递减,所以函数 $f(x)$的最大值 $M=f(0)=b$,最小值 $m=f(1)=1+a+b$,所以 $M-m=-1-a$;当 $0<-\frac{a}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,即$-1\leqslant a<0$ 时,函数 $f(x)$在$[0,1]$上的最小值 $m=f\left(-\frac{a}{2}\right)=b-\frac{a^2}{4}$,最大值 $M=f(1)=1+a+b$,所以 $M-m=1+a+\frac{a^2}{4}$;当$\frac{1}{2}<-\frac{a}{2}<1$,即$-2<a<-1$ 时,函数 $f(x)$在$[0,1]$上的最小值 $m=f\left(-\frac{a}{2}\right)=b-\frac{a^2}{4}$,最大值 $M=f(0)=b$,所以 $M-m=\frac{a^2}{4}$.结合各选项,可得 B 正确,A,C,D 错误.因此选 B.
(2)因为 $f(x)$为偶函数且在$(0,+\infty)$单调递减,$\log_3 4>1$,$0<2^{-\frac{3}{2}}<2^{-\frac{2}{3}}<2^0=1$,所以$f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)=f(-\log_3 4)=f(\log_3 4)<f(1)$,$f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f(2^0)=f(1)$,所以$f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$.
(3)因为 $\ln 2>0$,函数 $f(x)$为奇函数,所以 $f(\ln 2)=-f(-\ln 2)=-[-e^{a(-\ln 2)}]=e^{-a\ln 2}=8$,所以$-a\ln 2=\ln 8$,即 $a=-\frac{\ln 8}{\ln 2}=-3$.
4. D [解析] 因为 $f(x)$为奇函数,所以 $f(-1)=1$,不等式$-1\leqslant f(x-2)\leqslant1$,即 $f(1)\leqslant f(x-2)\leqslant f(-1)$,因为 $f(x)$单调递减,所以$-1\leqslant x-2\leqslant1$,解得 $1\leqslant x\leqslant3$,故 x 的取值范围为$[1,3]$.

考点考法探究

小题 1

例 1 (1)A (2)A [解析] (1)$f(x)=\begin{cases}-\frac{x^2+1}{x},x<0,\\2^{x+1},x\geqslant0,\end{cases}$当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=2^{x+1}$单调递增,故 $f(x)=2^{x+1}\geqslant2$;当 $x<0$ 时,$f(x)=-\frac{x^2+1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\geqslant2$,当且仅当$-x=-\frac{1}{x}$,即 $x=-1$时,等号成立.综上可得,$f(x)\in[2,+\infty)$.又因为存在实数 a,使得 $g(b)+f(a)=2$ 成立,所以只需 $g(b)\leqslant2-f(a)_{min}$,即 $g(b)=b^2-b-2\leqslant0$,解得$-1\leqslant b\leqslant2$.
(2)当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$ 时,$\log_2\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\log_2 2$,即$-1\leqslant f(x)\leqslant1$,则 $f(x)$的值域为$[-1,1]$.当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$ 时,$2\times\frac{1}{2}+a\leqslant g(x)\leqslant2\times2+a$,即 $1+a\leqslant g(x)\leqslant4+a$,则 $g(x)$的值域为$[1+a,4+a]$.若存在 $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,则$[1+a,4+a]\cap[-1,1]\neq\varnothing$.若$[1+a,4+a]\cap[-1,1]=\varnothing$,则 $1+a>1$ 或 $4+a<-1$,解得 $a>0$ 或 $a<-5$,则当$[1+a,4+a]\cap[-1,1]\neq\varnothing$时,$-5\leqslant a\leqslant0$,故实数 a 的取值范围是$[-5,0]$.

【自我检测】

1. B [解析] 要使 $f(x)$有意义,则 $4-x>0$,解得 $x<4$,∴$f(x)$的定义域为$(-\infty,4)$.若使函数 $g(x)$有意义,则$\begin{cases}2x<4,\\x\neq1,\end{cases}$解得 $x<2$ 且 $x\neq1$,∴函数 $g(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)$.故选 B.
2. A [解析] 由函数的解析式得 $f(-1)=1-4+6=3$,则不等式 $f(x)<f(-1)$等价于 $f(x)<3$.当 $x>0$ 时,由$-x+6<3$,得 $x>3$;当 $x\leqslant0$ 时,由 $x^2+4x+6<3$,得$-3<x<-1$.综上,不等式 $f(x)<f(-1)$的解集为$(-3,-1)\cup(3,+\infty)$,故选 A.

3. $\frac{1}{8}$ $(-\infty,2)$ [解析]∵函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x<1,\\-x^2+1,x\geq1,\end{cases}$ ∴$f(2)=-4+1=-3$,
∴$f[f(2)]=f(-3)=2^{-3}=\frac{1}{8}$.
当 $x<1$ 时,$0<f(x)=2^x<2$,当 $x\geq1$ 时,$f(x)=-x^2+1\leq0$,∴$f(x)$的值域为$(-\infty,2)$.
4. 0 [解析]根据题意,函数 $f(x)$满足 $f(x-a)=x^3+1$,则 $f(x)=(x+a)^3+1$,则 $f(2-x)=(2-x+a)^3+1$,若对任意实数 x 都有 $f(x)+f(2-x)=2$,则有 $f(x)+f(2-x)=(x+a)^3+1+(2-x+a)^3+1=2$,可得 $(x+a)^3+(2-x+a)^3=0$,解得 $a=-1$,则 $f(x)=(x-1)^3+1$,则 $f(0)=(0-1)^3+1=-1+1=0$.

小题 2

例 2 (1)C (2)B [解析](1)易知 $f(x)=\cos\frac{x}{5}$ 在$(0,5\pi)$上单调递减,且 $f(x)$为偶函数,
$a=f\left(\log_e\frac{1}{\pi}\right)=f(-\log_e\pi)=f(\log_e\pi)$,$b=f\left(\log_\pi\frac{1}{e}\right)=f(-\log_\pi e)=f(\log_\pi e)$,$c=f\left(\log_{\frac{1}{e}}\frac{1}{\pi^2}\right)=f(\log_e\pi^2)$,∵$0<\log_\pi e<1<\log_e\pi<\log_e\pi^2<5\pi$,∴$f(\log_\pi e)>f(\log_e\pi)>f(\log_e\pi^2)$,即 $b>a>c$.故选 C.
(2)$f(x+6)+f(x)=0$,即 $f(x+6)=-f(x)$,则 $f(x+12)=-f(x+6)=f(x)$,所以 $f(x)$是周期为 12 的周期函数.由 $y=f(x-1)$的图像关于点(1,0)对称,得 $y=f(x)$的图像关于点(0,0)对称,则 $f(x)$为奇函数,即有 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(2019)=f(12\times168+3)=f(3)=-f(-3)=-4$.故选 B.

【自我检测】

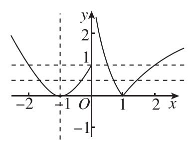
1. C [解析]∵$f(-2)=-f(2)=-4$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,∴$\frac{f(-2)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=-4$.
2. C [解析]由函数 $f(x)$对任意的实数 x,都有 $f(x)=f(1-x)$,可得 $f(x)$的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$对称.当 $x\geq\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=\log_2(3x-1)$,$f(x)$为增函数,故当 $x<\frac{1}{2}$时,$f(x)$为减函数,故函数 $f(x)$在$[-2,0]$上单调递减,故 $f(x)$在$[-2,0]$上的最大值为 $f(-2)=f(3)=\log_2(9-1)=3$.
3. D [解析]由 $f(x+5)=f(x-3)$,得 $f(x+8)=f(x)$,所以 $f(x)$是周期为 8 的周期函数,所以 $f(766)=f(96\times8-2)=f(-2)$,又 $f(x)$是偶函数,所以 $f(-2)=f(2)=\log_2 4=2$.
4. $\left(\frac{1}{2},2\right)$ [解析]由题得,当 $x\geq0$ 时,$f'(x)=e^x-\cos x$,因为 $x\geq0$,所以 $e^x\geq e^0=1$,又 $\cos x\leq1$,所以 $e^x-\cos x\geq0$,所以函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.因为 $f(-x)=f(x)$,所以函数 $f(x)$是偶函数,所以函数 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.因为 $f(\log_2 a)<f(1)$,所以$|\log_2 a|<1$,所以$-1<\log_2 a<1$,所以$\frac{1}{2}<a<2$.

小题 3

例 3 (1)B (2)A [解析](1)令 $y=f(x)=\frac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$,易知 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,排除选项 C;$f(4)=\frac{2\times4^3}{2^4+2^{-4}}=\frac{128}{16+\frac{1}{16}}>0$,排除选项 D;$f(6)=\frac{2\times6^3}{2^6+2^{-6}}=\frac{432}{64+\frac{1}{64}}\approx6.75$,排除选项 A.故选 B.
(2)令 $g(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}$,则 $g(-x)=\frac{1-3^{-x}}{1+3^{-x}}=\frac{3^x-1}{3^x+1}=-\frac{1-3^x}{1+3^x}=-g(x)$.
对于 A,B,图像关于 y 轴对称,所以 $f(x)$是偶函数,则有 $a=\frac{\pi}{2}$,$f(x)=-\frac{1-3^x}{1+3^x}\sin 2x$,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f(x)>0$,所以,A 不可能,B 有可能.
对于 C,D,图像关于原点对称,所以 $f(x)$是奇函数,则有 $a=0$ 或 π,$f(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}\cos 2x$ 或 $f(x)=-\frac{1-3^x}{1+3^x}\cos 2x$,C,D 都有可能.故选 A.

【自我检测】

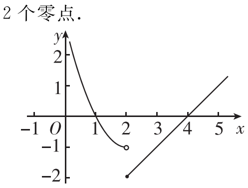
1. C [解析]易知函数 $f(x)$为奇函数,排除选项 B,D,当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f(x)>0$,排除选项 A.故选 C.
2. D [解析]根据函数图像可知,当 $x\to-\infty$时,$y\to0$,故 A 不符合;根据函数图像可知,该函数为非奇非偶函数,故 B 不符合;根据函数图像可知,该函数的定义域为 **R**,故 C 不符合;对于 $y=(x^2-2x)e^x$,$y'=e^x(x^2-2)$,令 $y'=0$ 得 $x=\pm\sqrt{2}$,可得该函数在$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$上单调递减,在$(-\infty,-\sqrt{2})$和$(\sqrt{2},+\infty)$上单调递增,当 $y=0$ 时,$x=0$ 或 $x=2$,当 $x\to+\infty$时,$y\to+\infty$,当 $x\to-\infty$时,$y\to0$,故 D 符合.
3. B [解析]作出函数 $f(x)$的图像,如图所示.∵方程 $f(x)=a$ 有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4,∴函数 $y=f(x)$的图像与直线 $y=a$ 有四个不同的交点,由图可知 $0<a\leq1$,又 $x_1<x_2<x_3<x_4$,∴$x_1+x_2=-2$,$0<x_3<1<x_4$,且$|\log_2 x_3|=|\log_2 x_4|$,即$-\log_2 x_3=\log_2 x_4$,则 $\log_2 x_3+\log_2 x_4=0$,即 $\log_2 x_3x_4=0$,则 $x_3x_4=1$.由$|\log_2 x|=1$ 得 $x=\frac{1}{2}$或 2,则$\frac{1}{2}\leq x_3<1$,$1<x_4\leq2$,故 $x_3(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3^2x_4}=-2x_3+\frac{1}{x_3}$,$\frac{1}{2}\leq x_3<1$,又函数 $y=-2x+\frac{1}{x}$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right)$上为减函数,故$-1<-2x_3+\frac{1}{x_3}\leq1$,故 $x_3(x_1+x_2)+\frac{1}{x_3^2x_4}$的取值范围为$(-1,1]$.故选 B.



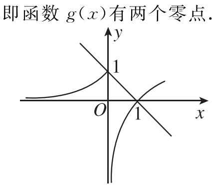
第 2 讲 基本初等函数、函数与方程

典型真题研析

1. (1)C (2)B (3)D [解析](1)因为 $a>b$,不妨设 $a=-1$,$b=-2$,则 $\ln(a-b)=\ln1=0$,$3^{-1}>3^{-2}$,$|-1|<|-2|$,选项 A,B,D 均错,故选 C.
(2)∵$a=\log_{0.2}0.3$,$b=\log_2 0.3$,
∴$\frac{1}{a}=\log_{0.3}0.2$,$\frac{1}{b}=\log_{0.3}2$,∴$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_{0.3}0.4$,
∴$0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$,即 $0<\frac{a+b}{ab}<1$,又∵$a>0$,$b<0$,∴$ab<0$,即 $ab<a+b<0$,故选 B.
(3)两函数的底数分别为$\frac{1}{a}$,a,显然两函数的单调性不一致,所以排除 B.对数函数 $y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$的图像过定点$\left(\frac{1}{2},0\right)$,排除 A,C,所以选 D.
2. C [解析]∵$f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$,∴$f(2-x)=(2-x)^2-2(2-x)+a(e^{2-x-1}+e^{x-2+1})=x^2-4x+4-4+2x+a(e^{1-x}+e^{x-1})=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$,∴$f(2-x)=f(x)$,则直线 $x=1$ 为 $f(x)$图像的对称轴.∵$f(x)$有唯一零点,∴$f(x)$的零点只能为 $x=1$,即 $f(1)=1^2-2\times1+a(e^{1-1}+e^{-1+1})=0$,解得 $a=\frac{1}{2}$.
3. (1)C (2)(1,4) $(1,3]\cup(4,+\infty)$ (3)C
[解析](1)令 $F(x)=f(x)-ax-b=\begin{cases}(1-a)x-b,x<0,\\\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2-b,x\geq0.\end{cases}$
当 $x\geq0$ 时,$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2-b$,$F'(x)=x^2-(a+1)x=x[x-(a+1)]$.
当 $a\leq-1$ 时,$F(x)$在 **R** 上单调递增,不符合题意,舍去.
当 $a>1$ 时,$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$[0,a+1]$上单调递减,在$(a+1,+\infty)$上单调递增,不符合题意,舍去.
当 $a=1$ 时,$F(x)$在$(-\infty,0)$上为定值,在$[0,2]$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,不符合题意,舍去.
当$-1<a<1$ 时,$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,在$[0,a+1]$上单调递减,在$(a+1,+\infty)$上单调递增,若函数 $F(x)=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点,则需 $F(0)=-b>0$,$F(a+1)=-\frac{1}{6}(a+1)^3-b<0$,所以$-1<a<1$ 且$-\frac{1}{6}(a+1)^3<b<0$.故选 C.
(2)当 $\lambda=2$ 时,函数 $f(x)$的图像如图所示,$f(x)<0$ 的解集为(1,4).
当 $\lambda\leq1$ 时,$f(x)$只有 1 个零点为 4;当 $1<\lambda\leq3$ 时,$f(x)$有 2 个零点为 1 和 4;当 $3<\lambda\leq4$ 时,$f(x)$有 3 个零点为 1,3 和 4;当 $\lambda>4$ 时,$f(x)$有 2 个零点为 1 和 3.故当 $1<\lambda\leq3$ 或 $\lambda>4$ 时,$f(x)$有 2 个零点.



(3)函数 $g(x)=f(x)+x+a$ 有两个零点,即方程 $f(x)=-x-a$ 有两个不同的解,即函数 $f(x)$的图像与直线 $y=-x-a$ 有两个不同的交点.分别作出函数 $f(x)$的图像与直线 $y=-x-a$,由图可知,当$-a\leq1$,即 $a\geq-1$ 时,函数 $f(x)$的图像与直线 $y=-x-a$ 有两个不同的交点,即函数 $g(x)$有两个零点.



考点考法探究

小题 1

例 1 (1)A (2)D [解析](1)因为 $a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$,$b=\log_{0.5}0.2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}=\log_2 5>1$,$c=0.5^{0.2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}>\frac{1}{2}$,且 $c=0.5^{0.2}<0.5^0=1$,所以 $b>c>a$.
(2)函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$,则 $f(-x)=e^{-x}+e^x+(-x)^2=e^x+e^{-x}+x^2=f(x)$,即函数 $f(x)$为偶函数,又当 $x\geq0$ 时,$f'(x)=e^x-e^{-x}+2x=\frac{e^{2x}-1}{e^x}+2x\geq0$ 恒成立,所以函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$ 在$[0,+\infty)$上为增函数,所以 $f(2x)>f(x+1)$等价于$|2x|>|x+1|$,解得 $x<-\frac{1}{3}$或 $x>1$,故 x 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.故选 D.

【自我检测】

1. A [解析]$a=2^{1.2}>2^1=2$,$b=2\log_5 2=\log_5 4<\log_5 5=1$ 且 $b=\log_5 4>\log_5 1=0$,$c=\ln\frac{1}{3}=-\ln3<-\ln e=-1$,即 $c<-1<0<b<1<2<a$,故 $a>b>c$.
2. D [解析]设 $Q(x,y)$是函数 $g(x)$的图像上任意一点,其关于原点对称的点是 $P(-x,-y)$.因为点 P 在函数 $f(x)=\log_2(x+1)$的图像上,所以$-y=\log_2(-x+1)$,即 $y=-\log_2(1-x)$,故 $g(x)=-\log_2(1-x)$.故选 D.
3. B [解析]∵函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f(-x)=-f(x)$,∴$f(x)$为奇函数,故排除 A;$f(1)=\frac{e-\frac{1}{e}}{1}=e-\frac{1}{e}>2$,故排除 C,D.故选 B.
4. B [解析]易知函数 $f(x)$为偶函数,且当 $x\geq0$ 时,$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x-\sqrt[3]{x^2}$,故函数 $f(x)$在区

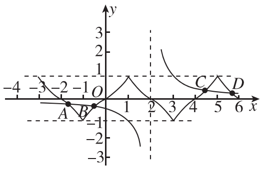
间$[0,+\infty)$上单调递减,故 $f(2a-1)>f(3)$ 等价于$|2a-1|<3$,解得$-1<a<2$,故实数 a 的取值范围为$(-1,2)$.

小题 2

例 2 (1)A (2)D [解析](1)方法一:因为$y=\ln x$ 为增函数,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$为减函数,所以函数 $f(x)=\ln x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+a$ 为增函数,因为 $f(x)$的唯一零点 $x_0\in(2,3)$,所以 $f(2)f(3)<0$,即$\left(\ln 2-\frac{1}{2}+a\right)\left(\ln 3-\frac{1}{4}+a\right)<0$,解得$\frac{1}{4}-\ln 3<a<\frac{1}{2}-\ln 2$,故选 A.

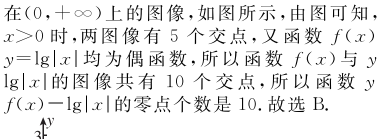
方法二:令 $f(x)=0$,得 $\ln x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-a$,在同一直角坐标系中分别作出 $y=\ln x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-a$ 的图像(图略),易知 $y=\ln x$ 为增函数,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-a$ 为减函数,由题意知两图像交点的横坐标在区间$(2,3)$内,则有$\begin{cases}\ln 2<\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}-a,\\ \ln 3>\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}-a,\end{cases}$ 即$\frac{1}{4}-\ln 3<a<\frac{1}{2}-\ln 2$,故选 A.

(2)由题意得,$f(x+2)=-f(x)$,∴$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,故函数 $f(x)$是周期为 4 的周期函数.∵$f(x+2)=f(-x)$,∴$f(x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称.函数 $g(x)=(x-2)f(x)-1$ 的零点即为 $f(x)$的图像与 $y=\frac{1}{x-2}$的图像的交点的横坐标,在同一平面直角坐标系中作出 $f(x)$与$y=\frac{1}{x-2}$在$[-3,6]$上的图像,如图所示,设四个交点 A,B,C,D 的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3,x_4,则 $x_1+x_4=4$,$x_2+x_3=4$,故 $g(x)$在区间$[-3,6]$上的所有零点之和为 $x_1+x_2+x_3+x_4=8$,故选 D.



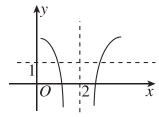
【自我检测】

1. B [解析]构造函数 $f(x)=\lg(x-1)+x-3$,因为函数 $y=\lg(x-1)$与 $y=x-3$ 在定义域上都单调递增,所以 $f(x)=\lg(x-1)+x-3$ 在定义域上单调递增,由 $f(2)=\lg(2-1)+2-3=-1<0$,$f(3)=\lg(3-1)+3-3=\lg 2>0$,得函数 $f(x)$的零点在$(2,3)$上,故 $2<x_0<3$,故$[x_0]=2$,故选 B.
2. B [解析]由 $f(x+\pi)=f(x)$得函数 $f(x)$的周期为 π,又 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数,所以 $f(x)$的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称.在同一平面直角坐标系中作出函数 $f(x)$与 $y=\lg|x|$在$(0,+\infty)$上的图像,如图所示,由图可知,当$x>0$ 时,两图像有 5 个交点,又函数 $f(x)$与 $y=\lg|x|$均为偶函数,所以函数 $f(x)$与 $y=\lg|x|$的图像共有 10 个交点,所以函数 $y=f(x)-\lg|x|$的零点个数是 10.故选 B.



3. C [解析]∵$f(x)$为定义在 **R** 上的奇函数,∴$f(-x)=-f(x)$,又∵$f(1+x)+f(3-x)=0$,∴$f(1+3+x)+f(3-3-x)=0$,∴$f(x+4)+f(-x)=0$,即 $f(x+4)=-f(-x)=f(x)$,∴$f(x)$是周期为 4 的周期函数,∴$f(2019)=f(505\times4-1)=f(-1)=-f(1)$.∵函数 $g(x)=-x^6+f(1)\cdot\cos 4x-3$ 有唯一的零点,∴$x^6=f(1)\cdot\cos 4x-3$ 有唯一解,令 $m(x)=x^6$,则 $m(x)$在$(-\infty,0)$上为减函数,在$(0,+\infty)$上为增函数,令 $\varphi(x)=f(1)\cdot\cos 4x-3$,则 $\varphi(x)$为偶函数,$\varphi(x)$的图像可由余弦曲线变换得到.若 $x^6=f(1)\cdot\cos 4x-3$ 有唯一解,则函数 $m(x)$的图像与函数 $\varphi(x)$的图像有唯一交点,结合函数 $m(x)$与函数 $\varphi(x)$的图像(图略)可知,$m(0)=\varphi(0)$,即 $0=f(1)-3$,解得 $f(1)=3$,∴$f(2019)=-f(1)=-3$,故选 C.

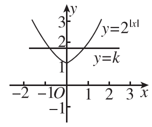
例 3 (1)B (2)C [解析](1)作出函数 $f(x)=\begin{cases}1,x=2,\\ \log_a|x-2|+1,x\neq2\end{cases}$的图像,如图所示,令 $f(x)=t$,由图可得关于 x 的方程 $f(x)=t$ 的根有两个或三个,且当 $t=1$ 时有三个根,当 $t\neq1$ 时有两个根,由题意知关于 t 的方程 $t^2+bt+c=0$ 只能有一个根 $t=1$(若有两个根,则关于 x 的方程$[f(x)]^2+bf(x)+c=0$ 有四个或五个根),不妨设 $x_1<x_2<x_3$,由 $f(x)=1$,可得 x_1,x_2,x_3 的值分别为 1,2,3,则 $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1\times2+2\times3+1\times3=11$.故选 B.



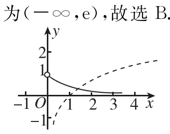
(2)因为函数 $y=f_n(x)-x(n\in\mathbf{N}^*)$不存在零点,所以当 $n=1$ 时,$y=f(x)-x$ 不存在零点,即方程 $x^2-3x+c=0$ 没有实数根,由 $\Delta<0$,得$c>\frac{9}{4}$,排除 A,B,D 选项,故选 C.

【自我检测】

1. C [解析]当 $x>1$ 时,令 $f(x)=\ln(x-1)=0$,得 $x=2$;当 $x\leqslant1$ 时,令 $f(x)=2^{x-1}-1=0$,得 $x=1$.故选 C.
2. D [解析]由函数 $f(x)=2^{|x|}-k$ 存在零点,得 $2^{|x|}=k$ 有解,等价于函数 $y=2^{|x|}$的图像与直线 $y=k$ 有交点,作出函数 $y=2^{|x|}$的图像与直线 $y=k$,如图所示,由图可知,要使函数$f(x)=2^{|x|}-k$ 存在零点,则 $k\geqslant1$,故选 D.



3. B [解析]函数 $f(x)=e^{-x}-\ln(x+a)$在$(0,+\infty)$上存在零点,等价于 $e^{-x}-\ln(x+a)=0$ 在$(0,+\infty)$上有解,令 $g(x)=e^{-x}$,$h(x)=\ln(x+a)$,$e^{-x}-\ln(x+a)=0$ 在$(0,+\infty)$上有解等价于函数 $g(x)$与函数 $h(x)$的图像在$(0,+\infty)$上有交点,函数 $h(x)$的图像可由函数 $k(x)=\ln x$ 的图像向左平移 a 个单位长度得到,作出函数 $y=e^{-x}$在$(0,+\infty)$上的图像,如图所示,当函数 $h(x)$的图像过点$(0,1)$时,$h(0)=\ln(0+a)=1$,解得 $a=e$,由图可知,若函数 $g(x)$与函数 $h(x)$的图像在$(0,+\infty)$上有交点,则 $a<e$,故实数 a 的取值范围为$(-\infty,e)$,故选 B.



例 4 (1)B (2)A [解析](1)由图像可知,$0<f(0)=a<1$,又因为 $f(1)=0$,所以 $1-b+a=0$,所以 $1<b<2$.

因为 $g(x)=e^x+2x-b$,所以 $g(0)=1-b<0$,$g(1)=e+2-b>0$,又 $g'(x)=e^x+2>0$ 恒成立,所以 $g(x)$单调递增,所以 $g(x)$在$(0,1)$上必存在零点.故选 B.

(2)∵$f(x)=\frac{2x^2}{x+1}$,∴$f'(x)=\frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$,当 $x\in[0,1]$时,$f'(x)\geqslant0$,∴$f(x)$在$[0,1]$上是增函数,∴$f(x)$在$[0,1]$上的取值范围为$[0,1]$.

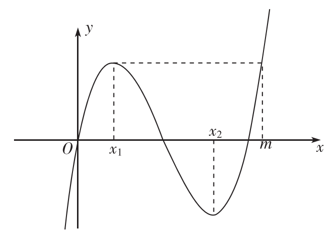
又∵$g(x)=ax+5-2a(a>0)$在$[0,1]$上是增函数,∴$g(x)$在$[0,1]$上取值范围为$[5-2a,5-a]$.

根据题意,有$[0,1]\subseteq[5-2a,5-a]$,

∴$\begin{cases}5-2a\leqslant0,\\ 5-a\geqslant1,\\ a>0,\end{cases}$ 即$\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant4$.故选 A.

【自我检测】

1. D [解析]由 $f(x)=e^x+bx+c$,函数 $y=f(x)-x$ 无零点,即方程 $f(x)=x$ 无实根,可得 $f(x)>x$ 恒成立,
即 $e^x>(1-b)x-c$ 对任意实数 x 恒成立.
因为函数 $y=e^x$ 的图像与直线 $y=x+1$ 相切于点$(0,1)$,所以只需 $0\leqslant1-b<1$ 且$-c<1$,即 $0<b\leqslant1$,$c>-1$,故选 D.
2. B [解析]∵$f(x)=x^3+ax^2+bx$,∴$f'(x)=3x^2+2ax+b$,由函数 $f(x)$有两个极值点 x_1,x_2,可知 x_1,x_2 是方程 $3x^2+2ax+b=0$ 的两个根,则 $x_1+x_2=-\frac{2}{3}a$,$x_1x_2=\frac{b}{3}$,
∴$a=-\frac{3(x_1+x_2)}{2}$①.



由函数的大致图像可知,$f(x_1)=f(x)$的另一个解为 m,
则 $x^3+ax^2+bx-f(x_1)=(x-x_1)^2(x-m)$,
则 $2x_1+m=-a$,则 $m=-a-2x_1$②.
将①代入②整理得 $m=\frac{3(x_1+x_2)}{2}-2x_1=\frac{3x_2-x_1}{2}=x_0$,
∴$f(x_1)=f(m)=f(x_0)$,∴$g(x)$只有两个零点,即 x_1 和 m,故选 D.

小题 3

例 5 (1)B (2)A [解析](1)对于①,$f(x)=2x+1$,则 $g(x)=f(x+m)-f(m)=2(x+m)+1-(2m+1)=2x$,则对任意实数 m,$g(x)=f(x+m)-f(m)$均是 **R** 上的奇函数,即 $f(x)=2x+1$ 是位差值为任意实数 m 的"位差奇函数";对于②,$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$,则 $g(x)=f(x+m)-f(m)=x^2+2(m-1)x$,无论 m 取何值,$g(x)$都不是 **R** 上的奇函数,则 $f(x)=x^2-2x+1$ 不是"位差奇函数";对于③,$f(x)=2^x$,则 $g(x)=f(x+m)-f(m)=2^{x+m}-2^m=2^m(2^x-1)$,无论 m 取何值,$g(x)=f(x+m)-f(m)$都不是 **R** 上的奇函数,则 $g(x)$不是"位差奇函数".故选 B.

(2)由题意可知$\begin{cases}e^b=120,\\ e^{30k+b}=15,\end{cases}$∴$e^{30k}=\frac{1}{8}$,∴$e^{10k}=\frac{1}{2}$,∴$e^{20k+b}=(e^{10k})^2\cdot e^b=\frac{1}{4}\times120=30$.故选 A.

【自我检测】

1. C [解析]设车有 x 辆,则 $3(x-2)=2x+9$,解得 $x=15$.
2. B [解析]由题意可知 $f(2)=0$,且 $f(x)$在 **R** 上单调递减,所以函数 $f(x)$只有一个零点 2,由$|2-\beta|<1$,得 $1<\beta<3$,所以函数 $g(x)=x^2-ae^x$ 在区间$(1,3)$上存在零点.由 $g(x)=x^2-ae^x=0$,得 $a=\frac{x^2}{e^x}$.令 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}$,则 $h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$,所以 $h(x)$在区间$(1,2)$上单调递增,在区间$(2,3)$上单调递减,且 $h(1)=\frac{1}{e}$,$h(2)=\frac{4}{e^2}$,$h(3)=\frac{9}{e^3}>\frac{1}{e}$,要使函数 $g(x)$在区间$(1,3)$上存在零点,只需 $a\in\left(\frac{1}{e},\frac{4}{e^2}\right]$,故选 B.
3. 26.56 13 [解析]由题意得 $ar^0+24=124$ 且 $ar+24=64$,解得 $a=100$,$r=0.4$,∴$M=100\times0.4^t+24$,当 $t=4$ 时,$M=100\times0.4^4+24=26.56$.由 $100\times0.4^t+24<24.001$ 得 $0.4^t<0.1^5$,∴$\lg 0.4^t<\lg 0.1^5$,∴$t\lg 0.4<-5$,∴$t[\lg 2-(1-\lg 2)]<-5$,∴$t(2\lg 2-1)<-5$,∴$t>\frac{5}{1-2\lg 2}\approx12.5$,∴最小的整数 t 的值是 13.

第 3 讲 不等式与函数问题

典型真题研析

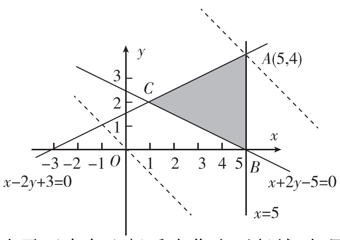
1. (1)A (2)$4\sqrt{3}$ [解析](1)由题知 $a>0$,$b>0$,若 $a+b\leqslant4$,则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant4$,当且仅当

$a=b=2$ 时等号成立；若 $ab\leqslant4$，取 $a=6,b=\frac{1}{2}$，则 $a+b>4$. 所以“$a+b\leqslant4$”是“$ab\leqslant4$”的充分不必要条件.

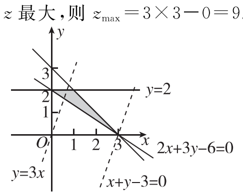
(2)因为 $x>0,y>0,x+2y=5$，所以 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+(x+2y)+1}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}=2\left(\sqrt{xy}+\frac{3}{\sqrt{xy}}\right)\geqslant4\sqrt3$，

当且仅当 $x=3,y=1$ 或 $x=2,y=\frac32$ 时等号成立，故 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为 $4\sqrt3$.

2. (1)9 (2)9 [解析](1)不等式组表示的可行域如图中阴影部分所示. 当直线 $y=-x+z$ 经过点 $A(5,4)$ 时，直线的纵截距 z 最大，所以 $z_{max}=5+4=9$.



(2)在平面直角坐标系中作出可行域，如图中阴影部分所示，由图知当直线 $y=3x-z$ 过点 $(3,0)$ 时，z 最大，则 $z_{max}=3\times3-0=9$.



考点考法探究

小题1

例1 (1)D (2)$\sqrt2$ [解析](1)∵$x>0,y>0,x+y=1$，∴$x+1+y=2$，$\frac{4}{x+1}+\frac1y=\frac{x+1+y}{2}\cdot\left(\frac{4}{x+1}+\frac1y\right)=\frac12\times\left(1+4+\frac{4y}{x+1}+\frac{x+1}{y}\right)\geqslant\frac12\times(5+2\sqrt4)=\frac92$，当且仅当 $x=\frac13,y=\frac23$ 时取等号，故选D.

(2)∵$f(x)=ax^2+x+2b$ 的值域为 $[0,+\infty)$，∴$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=1^2-4\times2ab=0,\end{cases}$ 可得 $8ab=1$，则 $\frac{a^2+4b^2}{a-2b}=\frac{(a-2b)^2+4ab}{a-2b}=a-2b+\frac{1}{2(a-2b)}$，

∵$a>2b$，∴$a-2b>0$，∴$a-2b+\frac{1}{2(a-2b)}\geqslant2\sqrt{(a-2b)\cdot\frac{1}{2(a-2b)}}=\sqrt2$，当且仅当 $a-2b=\frac{1}{2(a-2b)}$，即 $a-2b=\frac{\sqrt2}{2}$ 时等号成立，所以 $\frac{a^2+4b^2}{a-2b}$ 的最小值为 $\sqrt2$.

【自我检测】

1. B [解析] 因为 $1=2^x+2^y\geqslant2\sqrt{2^x\times2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}$(当且仅当 $x=y=-1$ 时等号成立)，所以 $\frac14\geqslant2^{x+y}$，即 $2^{-2}\geqslant2^{x+y}$，所以 $x+y\leqslant-2$，所以 $x+y$ 的最大值为 -2.

2. $\frac32$ [解析] $\frac1x+\frac{4}{y+1}=\frac16[x+(y+1)]\left(\frac1x+\frac4{y+1}\right)=\frac16\left(1+4+\frac{y+1}{x}+\frac{4x}{y+1}\right)=\frac16\left(5+\frac{y+1}{x}+\frac{4x}{y+1}\right)\geqslant\frac32$，当且仅当 $\frac{y+1}{x}=\frac{4x}{y+1}=2$，即 $x=2,y=3$ 时等号成立，故 $\frac1x+\frac4{y+1}$ 的最小值为 $\frac32$.

3. 55 [解析] 由 $xy+2x+3y=42$，得 $y=\frac{42-2x}{x+3}(0<x<21)$，

则 $xy+5x+4y=(xy+2x+3y)+3x+y=42+3x+\frac{42-2x}{x+3}=42+3x+\frac{48-2(x+3)}{x+3}=31+3\left[(x+3)+\frac{16}{x+3}\right]\geqslant31+3\times2\sqrt{(x+3)\cdot\frac{16}{x+3}}=55$，

当且仅当 $x+3=\frac{16}{x+3}$，即 $x=1,y=10$ 时取等号，因此所求最小值为55.

小题2

例2 (1)$a\geqslant3$ 或 $a\leqslant-1$ (2)$\frac{\sqrt{21}-3}{2}$

[解析](1)$|x-1|+|ax-1|\geqslant2x$ 对于任意 $x>0$ 恒成立，即 $\left|1-\frac1x\right|+\left|a-\frac1x\right|\geqslant2$ 对于任意 $x>0$ 恒成立，

∵$\left|1-\frac1x\right|+\left|a-\frac1x\right|\geqslant|a-1|$，∴$|a-1|\geqslant2$，解得 $a\geqslant3$ 或 $a\leqslant-1$.

(2)因为 x^2-y^2+1 的取值与 x,y 的符号无关，所以当 $\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}$ 取最小值时，$xy\geqslant0$，不妨设 $x\geqslant0,y\geqslant0$.

当 $x=y=0$ 时，$\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}=1$，所以 $\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}$ 的最小值小于或等于1，

因此 $x^2-y^2+1\leqslant\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}\leqslant1$，得 $x\leqslant y$.

因为 $x\leqslant y$，所以 $2y-x\geqslant0$，易知 $f(y)=2y-x$ 单调递增，$g(y)=x^2-y^2+1$ 单调递减，令 $f(y_0)=g(y_0)$，得 $y_0=\sqrt{x^2+x+2}-1$.

当 $y>y_0$ 时，$2y-x>2y_0-x$，所以 $\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}>2y_0-x$，当 $y<y_0$ 时，$x^2-y^2+1>x^2-y_0^2+1$，所以 $\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}>x^2-y_0^2+1=2y_0-x$，所以 $\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}$ 的最小值为 $2y_0-x$.

令 $h(x)=2y_0-x=2\sqrt{x^2+x+2}-x-2(x\in[0,1])$，

则 $h'(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}-1$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{21}-3}{6}$，所以 $h(x)$ 的最小值为 $h\left(\frac{\sqrt{21}-3}{6}\right)=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$，

即所求最小值为 $\frac{\sqrt{21}-3}{2}$.

【自我检测】

1. D [解析] 令 $a=2,b=1$，则A,B,C中不等式均成立，故选D.

2. D [解析] 易知 $\frac{x^2}{2}+y^2\leqslant1$ 表示的区域在圆 $x^2+y^2-2=0$ 内部(包括点 $(\pm\sqrt2,0)$)，且在圆 $x^2+y^2-6x+7=0$ 外部，可得 $x^2+y^2-2\leqslant0$，$x^2+y^2-6x+7>0$，

又 $x\in[-\sqrt2,\sqrt2]$，所以 $|x^2+y^2-2|+|x^2+y^2-6x+7|=-(x^2+y^2-2)+(x^2+y^2-6x+7)=9-6x\geqslant9-6\sqrt2$，故选D.

3. $[-2,0]$ [解析] ∵$|f(x)|=\begin{cases}x^2-2x,x\leqslant0,\\ \ln(x+1),x>0,\end{cases}$ ∴分两种情况讨论.

当 $x\leqslant0$ 时，由 $|f(x)|\geqslant ax$，得 $x^2-2x\geqslant ax$，∴$a\geqslant x-2$，∵$x\leqslant0$，∴$x-2\leqslant-2$，∴$a\geqslant-2$.

当 $x>0$ 时，由 $|f(x)|\geqslant ax$，得 $\ln(x+1)\geqslant ax$，根据函数 $y=\ln(x+1)$ 与 $y=ax$ 的图像(图略)可知 $a\leqslant0$. 综上可知 $-2\leqslant a\leqslant0$.

小题3

例3 (1)$9\sqrt{11}-32$ $\sqrt{11}-2$ (2)10 [解析]

(1)由 $xy+2z=1$ 得 $z=\frac{1-xy}{2}$，则 $5=x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\left(\frac{1-xy}{2}\right)^2\geqslant2|xy|+\left(\frac{1-xy}{2}\right)^2$(当且仅当 $x^2=y^2$ 时取等号)，即 $x^2y^2+6xy-19\leqslant0(xy\geqslant0)$ 或 $x^2y^2-10xy-19\leqslant0(xy<0)$，解得 $5-2\sqrt{11}\leqslant xy\leqslant-3+2\sqrt7$，则 $xyz=xy\cdot\frac{1-xy}{2}=-\frac12\left(xy-\frac12\right)^2+\frac18$，

则当 $xy=5-2\sqrt{11}$ 时，xyz 取得最小值 $9\sqrt{11}-32$，此时 $z=\frac{1-xy}{2}=\sqrt{11}-2$.

(2)作出函数 $f(x)$ 的图像，如图所示，可得 $f(x)=|x^2-2x-1|$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，

且 $f(1-\sqrt2)=f(1+\sqrt2)=0$，$f(3)=f(-1)=f(1)=2$，

由 $a>b\geqslant1$ 且 $f(a)=f(b)$，得 $a^2-2a-1=-(b^2-2b-1)$，

整理得 $(a-1)^2+(b-1)^2=4$.

设 $a-1=2\cos\theta,b-1=2\sin\theta,\theta\in\left[0,\frac\pi4\right)$，

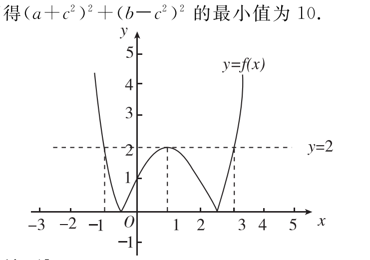
$(a+c^2)^2+(b-c^2)^2$ 的几何意义为点 (a,b) 与 $(-c^2,c^2)$ 的距离的平方.

当 $\theta=0$ 时，点 (a,b)，即点 $(3,1)$ 与原点的距离为 $\sqrt{10}$，

而点 (a,b) 到直线 $y=-x$ 的距离 $d=\frac{|1+2\cos\theta+1+2\sin\theta|}{\sqrt2}=\sqrt2\left|1+\sqrt2\sin\left(\theta+\frac\pi4\right)\right|<\sqrt2\times|1+\sqrt2|=2+\sqrt2$，

由 $\sqrt{10}<2+\sqrt2$，

可得 $(a+c^2)^2+(b-c^2)^2$ 的最小值为10.



【自我检测】

1. C [解析] ∵$b=1-a$，∴$\frac{2a}{a^2+b}+\frac{b}{a+b^2}=\frac{2a}{a^2-a+1}+\frac{1-a}{a+(1-a)^2}=\frac{a+1}{a^2-a+1}$，

又 $\frac{a^2-a+1}{a+1}=(a+1)+\frac{3}{a+1}-3\geqslant2\sqrt{(a+1)\times\frac{3}{a+1}}-3=2\sqrt3-3$，当且仅当 $a+1=\frac{3}{a+1}$，即 $a=\sqrt3-1$ 时等号成立，

∴$\frac{a+1}{a^2-a+1}\leqslant\frac{1}{2\sqrt3-3}=\frac{2\sqrt3+3}{3}$.

2. 9 [解析] ∵a,b,c,d 都是正数，且 $a+b=1$，$c+d=1$，∴$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac14$，∴$\frac{1}{ab}\geqslant4$，则 $\frac{1}{abc}+\frac1d\geqslant4\cdot\frac1c+\frac1d=(c+d)\cdot\left(\frac4c+\frac1d\right)=5+\frac{4d}{c}+\frac{c}{d}\geqslant5+2\sqrt{\frac{4d}{c}\cdot\frac{c}{d}}=9$，当且仅当 $a=b=\frac12$ 时，且 $c=\frac23,d=\frac13$ 时，以上等号都能取到，则 $\frac{1}{abc}+\frac1d$ 的最小值为9.

3. $\frac{\sqrt5+2}{4}$ [解析] ∵$a+b=4$，∴$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}=\frac{a^2+b^2+2}{(a^2+1)(b^2+1)}=\frac{a^2+b^2+2}{a^2b^2+a^2+b^2+1}=\frac{(a+b)^2-2ab+2}{a^2b^2+(a+b)^2-2ab+1}=\frac{18-2ab}{a^2b^2-2ab+17}=\frac{16+2(1-ab)}{(ab-1)^2+16}$.

设 $ab-1=t$，∵$a+b=4$，

∴$t=ab-1=a(4-a)-1=-a^2+4a-1=-(a-2)^2+3\leqslant3$.

令 $f(t)=\frac{16-2t}{t^2+16}(t\leqslant3)$，则 $f'(t)=\frac{2(t^2-16t-16)}{(t^2+16)^2}$，

令 $f'(t)=0$，解得 $t=8-4\sqrt5$ 或 $t=8+4\sqrt5$(舍去)，

当 $t<8-4\sqrt5$ 时，$f'(t)>0$，函数 $f(t)$ 单调递增，

当 $8-4\sqrt5<t\leqslant3$ 时，$f'(t)<0$，函数 $f(t)$ 单调递减，

∴$f(t)_{max}=f(8-4\sqrt5)=\frac{16-2\times(8-4\sqrt5)}{(8-4\sqrt5)^2+16}=\frac{\sqrt5}{20-8\sqrt5}=\frac{\sqrt5+2}{4}$，

故$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$的最大值为$\frac{\sqrt{5}+2}{4}$.

第4讲　导数的应用

典型真题研析

1. (1)D　(2)$y=3x$　(3)$1-\ln 2$　[解析](1)令$y=f(x)=ae^x+x\ln x$,则$f'(x)=ae^x+\ln x+1$,由题意知$\begin{cases}f(1)=2+b,\\f'(1)=2,\end{cases}$即$\begin{cases}ae=2+b,\\ae+1=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=e^{-1},\\b=-1.\end{cases}$
(2)$y'=3[(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x]=3e^x(x^2+3x+1)$,所以所求切线的斜率$k=y'|_{x=0}=3$,所以曲线在点(0,0)处的切线方程为$y=3x$.
(3)曲线$y=\ln x+2$的切线为$y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1+1$(其中$x_1$为切点横坐标),曲线$y=\ln(x+1)$的切线为$y=\frac{1}{x_2+1}\cdot x+\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$(其中$x_2$为切点横坐标).由题可知$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1},\\\ln x_1+1=\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1},\end{cases}$
解得$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\x_2=-\frac{1}{2},\end{cases}$ $\therefore b=\ln x_1+1=1-\ln 2.$

2. (1)C　(2)A　(3)$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　(4)-3
[解析](1)方法一:对函数$f(x)$求导得$f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x=-\frac{4}{3}\cos^2 x+a\cos x+\frac{5}{3}$,因为函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,所以$f'(x)\geqslant 0$,即$-\frac{4}{3}\cos^2x+a\cos x+\frac{5}{3}\geqslant 0$恒成立.设$t=\cos x\in[-1,1]$,则$g(t)=4t^2-3at-5\leqslant 0$在$[-1,1]$上恒成立,所以有$\begin{cases}g(-1)=4\times(-1)^2-3a\times(-1)-5\leqslant 0,\\g(1)=4\times 1^2-3a\times 1-5\leqslant 0,\end{cases}$解得$-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$.
方法二:取$a=-1$,则$f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x-\sin x$,$f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x-\cos x$,但$f'(0)=1-\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{3}<0$,不满足$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增,排除A,B,D,故选C.
(2)$f'(x)=[x^2+(a+2)x+a-1]e^{x-1}$.因为$x=-2$是函数$f(x)$的极值点,所以$f'(-2)=0$,所以$4-2(a+2)+a-1=0$,解得$a=-1$,此时$f'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}$.由$f'(x)=0$,解得$x=-2$或$x=1$,且当$-2<x<1$时,$f'(x)<0$,当$x>1$时,$f'(x)>0$,故$x=1$为$f(x)$的极小值点,所以$f(x)$的极小值为$f(1)=-1$.
(3)因为$f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\sin(2x+4\pi)=f(x)$,所以$2\pi$是函数$f(x)$的一个周期,不妨取区间$[0,2\pi]$进行分析.
$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=4\cos^2x+2\cos x-2$,令$f'(x)=0$,解得$\cos x=\frac{1}{2}$或$\cos x=-1$.当$x$在$[0,2\pi]$上变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$	π	$\left(\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$	$\frac{5}{3}\pi$	$\left(\frac{5}{3}\pi,2\pi\right]$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘		↘	极小值	↗

可知函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上的极小值即为函数$f(x)$在定义域上的最小值,所以$f(x)_{\min}=f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=2\sin\frac{5}{3}\pi+\sin\frac{10}{3}\pi=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
(4)由题意得,$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.当$a\leqslant 0$时,对任意$x\in(0,+\infty)$,$f'(x)>0$,则函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数,则$f(x)>f(0)=1$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$上没有零点,不满足题意,舍去.当$a>0$时,令$f'(x)=0$及$x>0$,得$x=\frac{a}{3}$,则当$x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$时,$f'(x)<0$,当$x\in\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,因此函数$f(x)$的单调递减区间是$\left(0,\frac{a}{3}\right)$,单调递增区间是$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$,在$x=\frac{a}{3}$处$f(x)$取得极小值$f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1$.而函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且只有一个零点,所以$f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$,解得$a=3$,因此$f(x)=2x^3-3x^2+1$,则$f'(x)=2x(3x-3)$.令$f'(x)=0$,结合$x\in[-1,1]$,得$x=0$或$x=1$.而当$x\in(-1,0)$时,$f'(x)>0$,当$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,则函数$f(x)$在$(-1,0)$上是增函数,在$(0,1)$上是减函数,所以$f(x)_{\max}=f(0)=1$.又$f(-1)=-4$,$f(1)=0$,所以$f(x)_{\min}=-4$,故$f(x)$在$[-1,1]$上的最大值与最小值的和为$-3$.

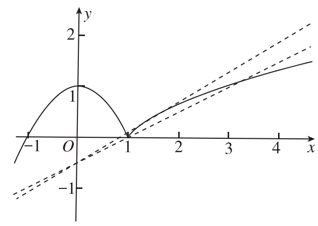
考点考法探究

小题1

例1　(1)C　(2)A　[解析](1)$y'=1+\frac{1}{x}$,当$x=1$时,切线的斜率$k=2$,切线方程为$y=2(x-1)+1=2x-1$,因为它与抛物线相切,所以$ax^2+(a+2)x+1=2x-1$有唯一解,即$ax^2+ax+2=0$有唯一解,故$\begin{cases}a\neq 0,\\a^2-8a=0,\end{cases}$解得$a=8$,故选C.
(2)函数$f(x)=a\sqrt{x}+bx^2$的导函数为$f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}+2bx$,
因为$f(x)$的图像在点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$处的切线与直线$AB$平行,
所以$\frac{a}{2\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}}+b(x_1+x_2)=\frac{a\sqrt{x_2}+bx_2^2-a\sqrt{x_1}-bx_1^2}{x_2-x_1}=\frac{a(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{x_2-x_1}+b(x_1+x_2)$,可得$\frac{a}{\sqrt{2(x_1+x_2)}}=\frac{a}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$,
由于对任意x_1,x_2上式都成立,可得$a=0$,b为非零实数.故选A.

【自我检测】

1. D　[解析]由$y=mx-\ln(2x+1)$,得$y'=m-\frac{2}{2x+1}$,因为直线$y=\frac{5}{2}x$与曲线$y=mx-\ln(2x+1)$相切于点$O(0,0)$,所以$\frac{5}{2}=m-2$,解得$m=\frac{9}{2}$,故选D.
2. A　[解析]由题意知,函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,可得$f(0)=0$,即$f(0)=-m=0$,解得$m=0$,即当$x\leqslant 0$时,$f(x)=x^3-2x$,所以当$x>0$时,$f(x)=x^3-2x$,则$f'(x)=3x^2-2$,所以$f'(2)=3\times 2^2-2=10$,即曲线$y=f(x)$在点$P(2,f(2))$处的切线斜率为10,故选A.
3. D　[解析]$f'(x)=1-\frac{a}{2x^2}$,设切点坐标为$\left(x_0,x_0+\frac{a}{2x_0}\right)$,则切线方程为$y-x_0-\frac{a}{2x_0}=\left(1-\frac{a}{2x_0^2}\right)(x-x_0)$,又切线过点(1,0),可得$-x_0-\frac{a}{2x_0}=\left(1-\frac{a}{2x_0^2}\right)(1-x_0)$,整理得$2x_0^2+2ax_0-a=0$,由于曲线$y=f(x)$存在两条过(1,0)点的切线,故方程有两个不等实根,即满足$\Delta=4a^2-8(-a)>0$,解得$a>0$或$a<-2$,故选D.
4. A　[解析]作出函数$f(x)$的图像,如图所示,直线$y=kx-\frac{1}{2}$恒过点$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.易知当直线$y=kx-\frac{1}{2}$过点(1,0)时,$k=\frac{1}{2}$,此时方程$f(x)=kx-\frac{1}{2}$有三个不同的实根.
当$x>1$时,$f(x)=\ln x$,$f'(x)=\frac{1}{x}$,
当直线$y=kx-\frac{1}{2}$与曲线$y=\ln x$相切时,设切点坐标为$(a,\ln a)$,则切线方程为$y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$,即$y=\frac{1}{a}x-1+\ln a$,
令$-1+\ln a=-\frac{1}{2}$,则$a=\sqrt{e}$,$\therefore k=\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.
$\therefore$方程$f(x)=kx-\frac{1}{2}$恰有四个不相等的实数根时,实数k的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,故选A.



小题2

例2　(1)A　(2)B　[解析](1)因为$f(-x)=x^2-x\sin(-x)=x^2+x\sin x=f(x)$,所以$f(x)$为偶函数,故选项B错误.$f(x)=x^2+x\sin x=x(x+\sin x)$,令$g(x)=x+\sin x$,则$g'(x)=1+\cos x\geqslant 0$恒成立,所以$g(x)$是增函数,则当$x>0$时,$g(x)>g(0)=0$,故当$x>0$时,$f(x)=xg(x)$,$f'(x)=g(x)+xg'(x)>0$,即$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,故只有选项A正确.
(2)A中,由$y=x\ln x+x-1$得$y'=\ln x+2$,由$y'=\ln x+2=0$得$x=\frac{1}{e^2}$,所以当$x>\frac{1}{e^2}$时,$y'>0$,即$y=x\ln x+x-1$单调递增,不满足题意,所以A错误;B中,由$y=x\ln x-x+1$得$y'=\ln x$,由$y'=\ln x=0$得$x=1$,所以当$x>1$时,$y'>0$,即$y=x\ln x-x+1$单调递增,当$0<x<1$时,$y'<0$,即$y=x\ln x-x+1$单调递减,且x趋近于0时,y趋近于1,所以B正确;C中,由$y=\frac{\ln x}{x}-x+1$得$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}$,令$f(x)=1-\ln x-x^2$,则$f'(x)=-\frac{1}{x}-2x<0$在$(0,+\infty)$上恒成立,所以$f(x)=1-\ln x-x^2$在$(0,+\infty)$上单调递减,又$f(1)=0$,所以当$x>1$时,$f(x)=1-\ln x-x^2<0$,即$y'<0$,所以函数$y=\frac{\ln x}{x}-x+1$在$(1,+\infty)$上单调递减,不满足题意,所以C错误;D中,由$y=-\frac{\ln x}{x}+x-1$得$y'=-\frac{1-\ln x}{x^2}+1=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$,令$g(x)=x^2-1+\ln x$,则$g'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,所以$g(x)=x^2-1+\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$g(1)=0$,所以当$x>1$时,$g(x)=x^2-1+\ln x>0$,即$y'>0$,所以函数$y=-\frac{\ln x}{x}+x-1$在$(1,+\infty)$上单调递增,当$0<x<1$时,$g(x)=x^2-1+\ln x<0$,即$y'<0$,所以函数$y=-\frac{\ln x}{x}+x-1$在$(0,1)$上单调递减,当$x$趋近于0时,$y$趋近于$-1$,不满足题意,故D错误.故选B.

【自我检测】

1. B　[解析]函数的定义域为$\{x|x\neq 0\}$,$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}$,当$x>1$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$单调递增;当$0<x<1$,$x<0$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$单调递减.显然当$x>0$时,$f(x)>0$,当$x<0$时,$f(x)<0$.综上所述,本题选B.
2. B　[解析]由于函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上可导,其导

函数为 $f'(x)$，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，所以当 $x<0$ 时，$y=-xf'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$y=-xf'(x)<0$，当 $x=0$ 或 $x=1$ 时，$y=-xf'(x)=0$，当 $x>1$ 时，$y=-xf'(x)>0$，可得选项 B 符合题意，故选 B.

小题 3

例 3 (1)D (2)C [解析] (1)依题意，得 $a=\ln\sqrt[3]{3}=\frac{\ln 3}{3}$，$b=e^{-1}=\frac{\ln e}{e}$，$c=\frac{3\ln 2}{8}=\frac{\ln 8}{8}$. 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $[f(x)]_{max}=f(e)=\frac{1}{e}=b$，且 $f(3)>f(8)$，即 $a>c$，所以 $b>a>c$.

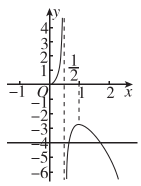
(2) $f'(x)=2e^{2x}-2ax$，若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，则 $e^{2x}-ax\le 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，即 $a\ge\frac{e^{2x}}{x}$ 在 $[1,2]$ 上恒成立. 令 $h(x)=\frac{e^{2x}}{x}$，$x\in[1,2]$，则 $h'(x)=\frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}>0$，故 $h(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，故 $h(x)_{max}=h(2)=\frac{e^4}{2}$，故 $a\ge\frac{e^4}{2}$，故选 C.

【自我检测】

1. C [解析] $f'(x)=6x^2-6mx+6$，由已知条件知当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立. 设 $g(x)=6x^2-6mx+6$，则 $g(x)\ge0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.
方法一：①若 $\Delta=36(m^2-4)\le0$，即 $-2\le m\le 2$，则 $g(x)\ge0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立；
②若 $\Delta=36(m^2-4)>0$，即 $m<-2$ 或 $m>2$，则需 $\begin{cases}\frac{m}{2}<1,\\ g(1)=12-6m\ge0,\end{cases}$ 解得 $m<2$，
∴ $m<-2$. 综上得 $m\le2$.
方法二：问题转化为 $m\le x+\frac1x$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，而 $x>1$ 时，函数 $y=x+\frac1x>2$，故 $m\le2$.
2. C [解析] 由 $y=f(x)$ 的图像可知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,a)$ 上单调递增，故 $y=f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$ 上满足 $f'(x)<0$，在 $(0,a)$ 上满足 $f'(x)>0$，结合各选项可得 C 符合题意，故选 C.
3. B [解析] 构造新函数 $g(x)=\ln x f(x)$，则 $g'(x)=\frac1x f(x)+\ln x f'(x)$. 因为 $f(x)+x\ln x f'(x)>0$，又 $x>0$，所以 $\frac1x f(x)+\ln x f'(x)>0$，所以 $g'(x)>0$，所以函数 $g(x)=\ln x f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 而 $\frac{\ln x}{f(x)}>0$ 可化为 $\ln x f(x)>0$，等价于 $g(x)>g(1)$，解得 $x>1$. 所以不等式 $\frac{\ln x}{f(x)}>0$ 的解集是 $(1,+\infty)$. 故选 B.
4. $(-\infty,-2)$ [解析] 由题意得函数的定义域为 **R**. ∵ $f(x)=(x+1)e^x$，∴ $f'(x)=(x+2)e^x$，由 $f'(x)=(x+2)e^x<0$，解得 $x<-2$. ∴函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,-2)$.

小题 4

例 4 (1)D (2)C [解析] (1)由题意，得 $f'(x)=e^x-\frac{m+1}{x}+2(m+1)$，$x>0$，因为函数 $f(x)$ 恰有两个极值点，所以 $f'(x)$ 有两个不同的零点. 令 $f'(x)=e^x-\frac{m+1}{x}+2(m+1)=0$，得 $\frac{xe^x}{1-2x}=m+1\left(x\ne\frac12\right)$ 有两个不同的实数根，设 $h(x)=\frac{xe^x}{1-2x}\left(x>0,x\ne\frac12\right)$，所以 $h'(x)=\frac{(xe^x)'(1-2x)-xe^x(1-2x)'}{(1-2x)^2}=-\frac{e^x(2x+1)(x-1)}{(1-2x)^2}$，当 $x\in\left(0,\frac12\right)$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上单调递增，当 $x\in\left(\frac12,1\right)$ 时，$h'(x)>0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，此时函数 $h(x)$ 在此区间上单调递减，即当 $x=1$ 时，$h(x)$ 取得极大值 $h(1)=-e$，作出 $h(x)$ 的简图如图，

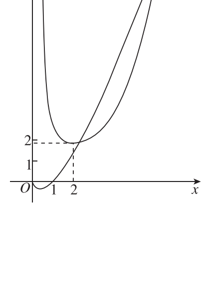


要使 $h(x)=m+1$ 有两个不同的实数根，则 $m+1<-e$，即 $m<-e-1$. 故选 D.

(2)依题意，得 $a\ln a+e-4\ge0$①. 因为 $f'(x)=a^x\ln a+e^x-1-\ln a=(a^x-1)\ln a+e^x-1$，当 $a>1$ 时，对任意的 $x\in[0,1]$，$a^x-1\ge0$，$\ln a>0$，$e^x-1\ge0$，恒有 $f'(x)\ge0$；当 $0<a<1$ 时，对任意的 $x\in[0,1]$，$a^x-1\le0$，$\ln a<0$，$e^x-1\ge0$，恒有 $f'(x)\ge0$. 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，则对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$，不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|\le a\ln a+e-4$ 恒成立，只需 $f(x)_{max}-f(x)_{min}\le a\ln a+e-4$②，因为 $f(x)_{max}=f(1)=a+e-1-\ln a$，$f(x)_{min}=f(0)=1+1=2$，所以 $a+e-1-\ln a-2\le a\ln a+e-4$，即 $a-\ln a+1-a\ln a\le0$，即 $(1+a)(1-\ln a)\le0$，所以 $\ln a\ge1$，从而有 $a\ge e$，而当 $a\ge e$ 时，①式显然成立. 故选 C.

【自我检测】

1. D [解析] $f'(x)=3ax^2-b=0$，设该方程的两个根为 x_1,x_2，故 $f(x)$ 在 $x=x_1,x=x_2$ 处取到极值，则 $M+m=4-b\cdot(x_1+x_2)+a(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$，而 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=-\frac{b}{3a}$，所以 $M+m=4$，故选 D.
2. B [解析] 由题得 $f'(x)=\frac1x-k$，∴ $f'\left(\frac1e\right)=e-k=0$，∴ $k=e$. 由 $f'(x)=\frac1x-e=0$ 得 $x=\frac1e$，当 $x\in\left(0,\frac1e\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac1e,+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减. 所以函数 $f(x)$ 的极大值为 $f\left(\frac1e\right)=\ln\frac1e-e\times\frac1e=-2$.
3. B [解析] 设 $g(x)=f(x)-2x-4$，则 $g'(x)=f'(x)-2$，
∵对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，∴对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$g'(x)>0$，即函数 $g(x)$ 在 **R** 上单调递增.
∵ $f(1)=6$，∴ $g(1)=f(1)-2-4=0$，
∴由 $g(x)>0$，得 $x>1$.
由 $\ln x>1$，得 $x>e$，故 $f(\ln x)>2\ln x+4$ 的解集为 $(e,+\infty)$，故选 B.
4. D [解析] $y=x\ln x$，由 $y'=\ln x+1=0$，得 $x=\frac1e$，则函数 $y=x\ln x$ 在 $\left(0,\frac1e\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac1e,+\infty\right)$ 上单调递增；$y=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，由 $y'=\frac{e^x(x-2)}{x^3}=0$，得 $x=2$，则函数 $y=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. 又 $\frac{e^2}{4}>\frac32>2\ln 2$，当 $x<2$ 时，$x\ln x<\frac{e^x}{x^2}$，当 $x>2$ 时，两个函数都是增函数，且取两函数的较大者，如图，则 $f(x)=\max\left\{x\ln x,\frac{e^x}{x^2}\right\}$ 在 $x=2$ 时取得最小值 $\frac{e^2}{4}$，故选 D.



第 5 讲 导数的热点问题

典型真题研析

1. 证明：(1)设 $g(x)=f'(x)$，则 $g(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$，$g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$.
当 $x\in\left(-1,\frac\pi2\right)$ 时，$g'(x)$ 单调递减，而 $g'(0)>0$，$g'\left(\frac\pi2\right)<0$，可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\frac\pi2\right)$ 有唯一零点，设为 α. 则当 $x\in(-1,\alpha)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\alpha,\frac\pi2\right)$ 时，$g'(x)<0$.
所以 $g(x)$ 在 $(-1,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\frac\pi2\right)$ 单调递减，故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\frac\pi2\right)$ 存在唯一极大值点，即 $f'(x)$ 在 $\left(-1,\frac\pi2\right)$ 存在唯一极大值点.
(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.
(i)当 $x\in(-1,0]$ 时，由(1)知，$f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减. 又 $f(0)=0$，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.
(ii)当 $x\in\left(0,\frac\pi2\right]$ 时，由(1)知，$f'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 单调递增，在 $\left(\alpha,\frac\pi2\right)$ 单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'\left(\frac\pi2\right)<0$，所以存在 $\beta\in\left(\alpha,\frac\pi2\right)$，使得 $f'(\beta)=0$，且当 $x\in(0,\beta)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\beta,\frac\pi2\right)$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $(0,\beta)$ 单调递增，在 $\left(\beta,\frac\pi2\right)$ 单调递减. 又 $f(0)=0$，$f\left(\frac\pi2\right)=1-\ln\left(1+\frac\pi2\right)>0$，所以当 $x\in\left(0,\frac\pi2\right]$ 时，$f(x)>0$. 从而，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac\pi2\right]$ 没有零点.
(iii)当 $x\in\left(\frac\pi2,\pi\right]$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac\pi2,\pi\right)$ 单调递减. 而 $f\left(\frac\pi2\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac\pi2,\pi\right]$ 有唯一零点.
(iv)当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$\ln(x+1)>1$，所以 $f(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 没有零点.
综上，$f(x)$ 有且仅有 2 个零点.
2. 解：(1) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$.
令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac a3$.
若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac a3,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(0,\frac a3\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$\left(\frac a3,+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\frac a3\right)$ 单调递减；
若 $a=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增；
若 $a<0$，则当 $x\in\left(-\infty,\frac a3\right)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac a3,0\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac a3\right)$，$(0,+\infty)$ 单调递增，在 $\left(\frac a3,0\right)$ 单调递减.
(2)满足题设条件的 a,b 存在.
(i)当 $a\le0$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 $f(0)=b$，最大值为 $f(1)=2-a+b$. 此时 a,b 满足题设条件当且仅当 $b=-1$，$2-a+b=1$，即 $a=0$，$b=-1$.
(ii)当 $a\ge3$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 $f(0)=b$，最小值为 $f(1)=2-a+b$. 此时 a,b 满足题设条件当且仅当 $2-a+b=-1$，$b=1$，即 $a=4$，$b=1$.
(iii)当 $0<a<3$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 $f\left(\frac a3\right)=-\frac{a^3}{27}+b$，最大值为 b

或 $2-a+b$.

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1,b=1$，则 $a=3\sqrt[3]{2}$，与 $0<a<3$ 矛盾.

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1,2-a+b=1$，则 $a=3\sqrt{3}$ 或 $a=-3\sqrt{3}$ 或 $a=0$，与 $0<a<3$ 矛盾.

综上，当且仅当 $a=0,b=-1$ 或 $a=4,b=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1.

3. **解**：(1) 当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，$f(x)=-\frac{3}{4}\ln x+\sqrt{1+x}$，$x>0$.

$f'(x)=-\frac{3}{4x}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{(\sqrt{1+x}-2)(2\sqrt{1+x}+1)}{4x\sqrt{1+x}}$，所以，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3)$，单调递增区间为 $(3,+\infty)$.

(2) 由 $f(1)\leqslant\frac{1}{2a}$，得 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，$f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$ 等价于 $\frac{\sqrt{x}}{a^2}-\frac{2\sqrt{1+x}}{a}-2\ln x\geqslant0$.

令 $t=\frac{1}{a}$，则 $t\geqslant2\sqrt{2}$.

设 $g(t)=t^2\sqrt{x}-2t\sqrt{1+x}-2\ln x$，$t\geqslant2\sqrt{2}$，则 $g(t)=\sqrt{x}\left(t-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2-\frac{1+x}{\sqrt{x}}-2\ln x$.

(i) 当 $x\in\left[\frac{1}{7},+\infty\right)$ 时，$\sqrt{1+\frac{1}{x}}\leqslant2\sqrt{2}$，则 $g(t)\geqslant g(2\sqrt{2})=8\sqrt{x}-4\sqrt{2}\sqrt{1+x}-2\ln x$.

记 $p(x)=4\sqrt{x}-2\sqrt{2}\sqrt{1+x}-\ln x$，$x\geqslant\frac{1}{7}$，则

$p'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}=\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}-\sqrt{2}x-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}=\frac{(x-1)[1+\sqrt{x}(\sqrt{2x+2}-1)]}{x\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x})}$. 故 x 变化时 $p'(x)$，$p(x)$ 的变化情况如下

x	$\frac{1}{7}$	$\left(\frac{1}{7},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$p'(x)$		$-$	0	$+$
$p(x)$	$p\left(\frac{1}{7}\right)$	单调递减	极小值 $p(1)$	单调递增

所以，$p(x)\geqslant p(1)=0$.

因此，$g(t)\geqslant g(2\sqrt{2})=2p(x)\geqslant0$.

(ii) 当 $x\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right)$ 时，

$g(t)\geqslant g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\frac{-2\sqrt{x}\ln x-(x+1)}{\sqrt{x}}$.

令 $q(x)=2\sqrt{x}\ln x+(x+1)$，$x\in\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right]$，

则 $q'(x)=\frac{\ln x+2}{\sqrt{x}}+1>0$，

故 $q(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e^2},\frac{1}{7}\right]$ 上单调递增，所以 $q(x)\leqslant q\left(\frac{1}{7}\right)$.

由(i)得，$q\left(\frac{1}{7}\right)=-\frac{2\sqrt{7}}{7}p\left(\frac{1}{7}\right)<-\frac{2\sqrt{7}}{7}p(1)=0$.

所以，$q(x)<0$.

因此，$g(t)\geqslant g\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=-\frac{q(x)}{\sqrt{x}}>0$.

由(i)(ii)知对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$，$t\in[2\sqrt{2},+\infty)$，$g(t)\geqslant0$，即对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$，均有 $f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$.

综上所述，所求 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$.

考点考法探究

解答 1

例 1 **解**：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+2a+1=\frac{(x+1)(2ax+1)}{x}$.

若 $a\geqslant0$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

若 $a<0$，则当 $x\in\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$ 单调递增，在 $\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 单调递减.

【自我检测】

解：$\because F(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{ax^2+x+1}{e^x}$，

$\therefore F'(x)=\frac{-ax^2+(2a-1)x}{e^x}=\frac{-ax\left(x-\frac{2a-1}{a}\right)}{e^x}$.

①若 $a=\frac{1}{2}$，则 $F'(x)=\frac{-\frac{1}{2}x^2}{e^x}\leqslant0$，$\therefore F(x)$ 在 **R** 上单调递减.

②若 $a>\frac{1}{2}$，则 $\frac{2a-1}{a}>0$，

当 $x<0$ 或 $x>\frac{2a-1}{a}$ 时，$F'(x)<0$，当 $0<x<\frac{2a-1}{a}$ 时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$\left(\frac{2a-1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(0,\frac{2a-1}{a}\right)$ 上单调递增.

③若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 $\frac{2a-1}{a}<0$，当 $x<\frac{2a-1}{a}$ 或 $x>0$ 时，$F'(x)<0$，当 $\frac{2a-1}{a}<x<0$ 时，$F'(x)>0$，$\therefore F(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{2a-1}{a}\right)$，$(0,+\infty)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{2a-1}{a},0\right)$ 上单调递增.

解答 2

例 2 **解**：由题意得，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x+2a+\frac{2}{x}=\frac{2(x^2+ax+1)}{x}$.

(1) 若 $f(x)$ 是单调函数，则 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒非负，

令 $g(x)=x^2+ax+1$，则 $g(x)\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则 $\Delta=a^2-4\leqslant0$ 或 $-\frac{a}{2}\leqslant0$，

解得 $a\geqslant-2$，$\therefore a$ 的取值范围为 $[-2,+\infty)$.

(2) 由题知函数 $f(x)$ 的两个极值点 x_1,x_2 是方程 $x^2+ax+1=0$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=-a$，$x_1\cdot x_2=1$，

又 $x_2\geqslant e$，$\therefore x_1<x_2$，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上单调递减，

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+2ax_1+2\ln x_1-(x_2^2+2ax_2+2\ln x_2)=x_1^2-x_2^2+2a(x_1-x_2)+2\ln\frac{x_1}{x_2}=x_1^2-x_2^2-2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2\ln\frac{x_1}{x_2}=x_2^2-x_1^2+2\ln\frac{x_1}{x_2}=x_2^2-\frac{1}{x_2^2}-2\ln x_2^2$，

设 $x_2^2=t$，由 $x_2\geqslant e$ 得 $t\geqslant e^2$，

设 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2>0$，

$\therefore h(t)$ 在 $[e^2,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore h(t)\geqslant h(e^2)=e^2-\frac{1}{e^2}-2\ln e^2=e^2-\frac{1}{e^2}-4$，

即 $x_2^2-\frac{1}{x_2^2}-2\ln x_2^2\geqslant e^2-\frac{1}{e^2}-4$，

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|$ 的最小值为 $e^2-\frac{1}{e^2}-4$.

【自我检测】

解：(1) $\because f(x)=\frac{\ln x}{x}$，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<e$，令 $f'(x)<0$，得 $x>e$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$，无极小值.

(2) 证明：$\because m>n>0$，$m^n=n^m$，$\therefore n\ln m=m\ln n$，

$\therefore\frac{\ln m}{m}=\frac{\ln n}{n}$，即 $f(m)=f(n)$.

由(1)知 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

且 $f(1)=0$，则 $1<n<e<m$，

要证 $mn>e^2$，即证 $m>\frac{e^2}{n}>e$，即证 $f(m)<f\left(\frac{e^2}{n}\right)$，即证 $f(n)<f\left(\frac{e^2}{n}\right)$，

即证 $\frac{\ln n}{n}<\frac{n(2-\ln n)}{e^2}$.

由于 $1<n<e$，即 $0<\ln n<1$，即证 $e^2\ln n<2n^2-n^2\ln n$.

令 $G(x)=e^2\ln x-2x^2+x^2\ln x\,(1<x<e)$，

则 $G'(x)=\frac{e^2}{x}-4x+2x\ln x+x=\frac{e^2}{x}-3x+2x\ln x$，

令 $H(x)=G'(x)$，则 $H'(x)=-\frac{e^2}{x^2}-3+2(1+\ln x)=-\frac{e^2}{x^2}-1+2\ln x<-2+2\ln x<-2+2=0$，$\therefore H'(x)<0$，$\therefore H(x)>H(e)=e-3e+2e=0$，即 $G'(x)>0$，

$\therefore G(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，$\therefore G(x)<G(e)=0$ 在 $x\in(1,e)$ 时恒成立，

$\therefore mn>e^2$.

解答 3

例 3 **解**：(1) 由题意，$f'(x)=\frac{2ax^2-1}{x}\,(x>0)$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2) $\because f(x)\geqslant0$ 恒成立，$\therefore f(e)\geqslant0$，可得 $a\geqslant\frac{1}{e^2}$.

由(1)可得，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

由 $\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2a}}\geqslant0$，得 $a\geqslant\frac{1}{2e}$.

因此，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

【自我检测】

解：(1) 由 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得 $x=e$.

$\because$ 当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$.

$\because$ 关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant m$ 恒成立，

$\therefore f(x)_{\max}\leqslant m$，

$\therefore m\geqslant\frac{1}{e}$，即 m 的最小值为 $\frac{1}{e}$.

(2) 证明：对任意的 $x_1,x_2\in(0,2)$ 且 $x_1<x_2$，存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，

即 $\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，

$\therefore\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}(x_2-x_1)-[f(x_2)-f(x_1)]=0$.

令 $F(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x_2-x_1)-[f(x_2)-f(x_1)]$，

则有 $F(x_0)=0$.

$\therefore F'(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}(x_2-x_1)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$2\ln x-3<2\ln 2-3<0$，

又 $x_2-x_1>0$，$\therefore F'(x)<0$，即 $F(x)$ 在 $(0,2)$ 上是减函数.

$F(\sqrt{x_1x_2})=\frac{1-\ln\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}(x_2-x_1)-[f(x_2)-f(x_1)]=\frac{1-\ln\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}(x_2-x_1)-\left(\frac{\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_1}{x_1}\right)=\frac{1}{x_1}\left(1+\ln\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\right)-\frac{1}{x_2}\left(1+\ln\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\right)=\frac{1}{x_2}\left[\frac{x_2}{x_1}\left(1-\frac{1}{2}\ln\frac{x_2}{x_1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{x_2}{x_1}\right)\right]$.

令$\frac{x_2}{x_1}=t>1$,

设$h(t)=t\cdot\left(1-\frac{1}{2}\ln t\right)-\left(1+\frac{1}{2}\ln t\right)(t>1)$,∴$h'(t)=\frac{t-t\ln t-1}{2t}$. 设$k(t)=t-t\ln t-1(t>1)$,

∴$k'(t)=-\ln t<0(t>1)$,∴$k(t)$在$(1,+\infty)$上是减函数,

∴$k(t)<0$,

∴$h'(t)<0$,∴$h(t)$在$(1,+\infty)$上是减函数,

∴$h(t)<h(1)=0$,∴$F(\sqrt{x_1x_2})<0=F(x_0)$.

∵$F(x)$在$(0,2)$上是减函数,∴$x_0<\sqrt{x_1x_2}$.

例4 解:(1)$f(x)=\ln x-ax$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

当$a\leqslant0$时,$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,无极值点;

当$a>0$时,由$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$,得$0<x<\frac{1}{a}$,由$f'(x)=\frac{1}{x}-a<0$,得$x>\frac{1}{a}$,

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减,

所以函数$f(x)$有极大值点$\frac{1}{a}$,无极小值点.

(2)由条件可得$\ln x-x^2-ax\leqslant0(x>0)$恒成立,

则当$x>0$时,$a\geqslant\frac{\ln x}{x}-x$恒成立,

令$h(x)=\frac{\ln x}{x}-x(x>0)$,则$h'(x)=\frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$,

令$k(x)=1-x^2-\ln x(x>0)$,

则当$x>0$时,$k'(x)=-2x-\frac{1}{x}<0$,所以$k(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数.

又$k(1)=0$,所以在$(0,1)$上,$h'(x)>0$,在$(1,+\infty)$上,$h'(x)<0$,

所以$h(x)$在$(0,1)$上为增函数,在$(1,+\infty)$上为减函数.

所以$h(x)_{\max}=h(1)=-1$,所以$a\geqslant-1$.

【自我检测】

解:(1)由题意得,$f'(x)=e^x(x+\sin x+a\cos x+1+\cos x-a\sin x)$,

由于$f'(0)=1$,所以$a+2=1$,即$a=-1$.

(2)由题意得,当$x=0$时,$f(0)+mg(0)=m-1\geqslant0$,则有$m\geqslant1$.

下面证当$m\geqslant1$时,对任意$x\geqslant0$,都有$f(x)+mg(x)\geqslant0$.

由于$x\in\mathbf{R}$时,$g(x)=1-\sin x\geqslant0$,所以当$m\geqslant1$时,有$f(x)+mg(x)\geqslant f(x)+1-\sin x$.

只需证明对任意$x\geqslant0$,都有$f(x)+1-\sin x=e^x(x+\sin x-\cos x)+1-\sin x\geqslant0$.

设$h(x)=x-\sin x$,则$h'(x)=1-\cos x\geqslant0$,所以$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

所以当$x\geqslant0$时,$h(x)\geqslant h(0)=0$,即$x\geqslant\sin x$,

所以$1-x\leqslant1-\sin x$,则$f(x)+1-\sin x\geqslant f(x)+1-x$.

设$F(x)=e^x(x+\sin x-\cos x)+1-x$,$x\geqslant0$,

则$F'(x)=e^x(x+2\sin x+1)-1$.

设$p(x)=e^x(x+2\sin x+1)-1$,$x\geqslant0$,则$p'(x)=e^x(x+2\sin x+2\cos x+2)$.

由于当$0\leqslant x\leqslant\pi$时,$x+2\sin x\geqslant0$,当$x>\pi$时,$x+2\sin x>\pi-2>0$,

因此当$x\geqslant0$时,$x+2\sin x\geqslant0$.

又$x\geqslant0$时,$2\cos x+2\geqslant0$,所以当$x\geqslant0$时,$p'(x)\geqslant0$,所以$p(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

当$x\geqslant0$时,有$p(x)\geqslant p(0)=0$,即$F'(x)\geqslant0$,

所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

所以当$x\geqslant0$时,有$F(x)\geqslant F(0)=0$.

所以对任意$x\geqslant0$,都有$f(x)+1-\sin x\geqslant f(x)+1-x\geqslant0$.

所以,当$m\geqslant1$时,对任意$x\geqslant0$,都有$f(x)+mg(x)\geqslant0$.

例5 解:∵$f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$,$x\in(0,+\infty)$,

∴$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$.

(1)当$a=4$时,$f(x)=4\ln x+x^2-6x$,

∴$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)}{x}$,令$f'(x)=\frac{(2x-4)(x-1)}{x}>0$,解得$x>2$或$0<x<1$.

∴$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$,$(2,+\infty)$.

(2)令$g(x)=f(x)+a^2-1(x\geqslant1)$,则$g'(x)=f'(x)=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$.

(i)当$0<\frac{a}{2}<1$时,即$0<a<2$,

当$x\in[1,+\infty)$时,有$g'(x)\geqslant0$(当且仅当$x=1$时取等号),

∴$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,

∴$g(x)_{\min}=g(1)=a^2-a-2=(a-2)(a+1)<0$,不符合题意.

(ii)当$\frac{a}{2}=1$时,即$a=2$,$g'(x)=\frac{2}{x}(x-1)^2\geqslant0$(当且仅当$x=1$时取等号),

∴$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,

∴$g(x)_{\min}=g(1)=0$,不符合题意.

(iii)当$\frac{a}{2}>1$时,即$a>2$,$g(x)$在$\left[1,\frac{a}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增.

∴$g(x)_{\min}=g\left(\frac{a}{2}\right)=a\ln\frac{a}{2}+\frac{3a^2}{4}-a-1$,

令$h(x)=x\ln\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{4}-x-1(x>2)$,则$h'(x)=\ln\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x$.

当$x>2$时,$h'(x)>0$,∴$h(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增,

∴$h(x)>h(2)=0$.

∴$g(x)\geqslant g\left(\frac{a}{2}\right)>0$恒成立,满足题意.

综上所述,实数a的取值范围是$a>2$.

【自我检测】

解:(1)当$m=2$时,$f(x)=e^x-2x$,则$f'(x)=e^x-2$.

所以,当$x>\ln2$时,$f'(x)>0$,当$x<\ln2$时,$f'(x)<0$,

所以$f(x)$的单调递增区间为$(\ln2,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,\ln2)$.

(2)设$g(x)=(x-2)f(x)+mx^2+2=(x-2)(e^x-mx)+mx^2+2=(x-2)e^x+2mx+2$,

则$g'(x)=(x-1)e^x+2m$,令$h(x)=(x-1)e^x+2m$,则$h'(x)=xe^x$,

当$x>0$时,$h'(x)>0$,$h(x)$为增函数,即$g'(x)$为增函数.

①若$m<\frac{1}{2}$,则$g'(0)=-1+2m<0$,$g'(2)=e^2+2m>0$,

此时,$g'(x)$在区间$(0,2)$上有唯一零点,设为x_0.

当$0<x<x_0$时,$g'(x)<0$,故$g(x)$在区间$(0,x_0]$上为减函数,$g(x_0)<g(0)=0$,

因此,$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$不符合要求.

②若$m\geqslant\frac{1}{2}$,则当$x>0$时,$g'(x)>g'(0)=-1+2m\geqslant0$,

此时,$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上为增函数,故当$x>0$时,$g(x)>g(0)=0$,因此$m\geqslant\frac{1}{2}$符合要求.

综上,m的取值范围是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

模块二 三角函数与平面向量

第6讲 平面向量

典型真题研析

1. (1)A (2)$\frac{1}{2}$ [解析](1)因为AD为中线,E为AD的中点,所以$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

(2)由已知得$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$,由$\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$可得$\frac{1}{4}=\frac{\lambda}{2}$,所以$\lambda=\frac{1}{2}$.

2. (1)B (2)-1 [解析](1)因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-|\boldsymbol{b}|^2=0$,得$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}|$,又$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$,所以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

(2)过B作BF垂直于AD,垂足为F.因为$AB=2\sqrt{3}$,$\angle A=30^\circ$,所以$BF=\sqrt{3}$,$AF=3$.

又因为$AD\parallel BC$,$AE=BE$,所以$\angle EBA=\angle DAB=\angle EAB=30^\circ$,则$BE=2$.

以F为原点,以$\overrightarrow{FD}$的方向为x轴正方向,以$\overrightarrow{FB}$的方向为y轴正方向,建立平面直角坐标系,则$A(-3,0)$,$B(0,\sqrt{3})$,$D(2,0)$,$E(-2,\sqrt{3})$,所以$\overrightarrow{BD}=(2,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AE}=(1,\sqrt{3})$,则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=2-3=-1$.

3. (1)0 $2\sqrt{5}$ (2)A [解析](1)以A为原点,AB为x轴,AD为y轴建立平面直角坐标系(图略),则$A(0,0)$,$B(1,0)$,$C(1,1)$,$D(0,1)$,

∴$\overrightarrow{AB}=(1,0)$,$\overrightarrow{BC}=(0,1)$,$\overrightarrow{CD}=(-1,0)$,$\overrightarrow{DA}=(0,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(1,1)$,$\overrightarrow{BD}=(-1,1)$,

∴$\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}=(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6,\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)$,

∴$|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)^2+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)^2}$.

∵$\lambda_i\in\{-1,1\}$,$i=1,2,3,4,5,6$,

∴$|\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6|=0$或2或4,$|\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6|=0$或2或4.

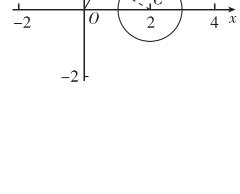
①当$\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=-\lambda_2$时取到最小值0.

②当$|\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6|=4$时,$\lambda_1,-\lambda_3,\lambda_5,-\lambda_6$同号,当$|\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6|=4$时,$\lambda_2,-\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6$同号,显然$\lambda_5,\lambda_6$同号与$\lambda_5,-\lambda_6$同号不能同时成立,

∴$\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3+\lambda_5-\lambda_6)^2+(\lambda_2-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)^2}\leqslant\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,

当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=-\lambda_3=-\lambda_4=-\lambda_6$时取到最大值$2\sqrt{5}$.

(2)建立平面直角坐标系,设$\boldsymbol{e}=(1,0)$,向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,则向量$\boldsymbol{a}$的终点在射线$y=\sqrt{3}x(x>0)$上.设向量$\boldsymbol{b}=(x,y)$,则$x^2+y^2-4x+3=0$,即$(x-2)^2+y^2=1$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$表示圆上任意一点$P$到射线$y=\sqrt{3}x(x>0)$上任意一点$A$的距离,显然当$A,P,C$三点在同一条直线上,即$AC$垂直于射线$y=\sqrt{3}x(x>0)$时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$取得最小值,最小值为$|AC|-1=\sqrt{3}-1$,故选A.



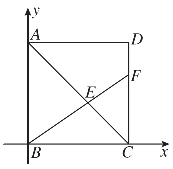
考点考法探究

小题 1

例 1 (1)B (2)C [解析](1)由向量 $\boldsymbol{a}=(4,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-5,2)$,得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,1)$,$m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4m+5,-m-2)$,因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $(-1)\times(-m-2)=1\times(4m+5)$,解得 $m=-1$,故选 B.

(2)方法一:由题意知,B,E,F 三点共线,F 是边 CD 上靠近 D 点的三等分点,则 $\overrightarrow{BE}=\mu\overrightarrow{BF}=\mu\left(\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}\right)=\mu\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\mu\overrightarrow{BA}$,又 E,C,A 三点共线,所以 $\mu+\frac{2}{3}\mu=\frac{5}{3}\mu=1$,即 $\mu=\frac{3}{5}$,则 $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$,所以 $m=-1$,$n=\frac{3}{5}$,故 $m+n=-\frac{2}{5}$.故选 C.

方法二:以 B 为原点,BC,BA 所在直线分别为 x,y 轴建立平面直角坐标系,如图所示,设正方形的边长为 1,则 $A(0,1)$,$B(0,0)$,$C(1,0)$,$F\left(1,\frac{2}{3}\right)$.设 $E(x,y)$,则



$\overrightarrow{BE}=(x,y)$,$\overrightarrow{BF}=\left(1,\frac{2}{3}\right)$,$\overrightarrow{AE}=(x,y-1)$,$\overrightarrow{AC}=(1,-1)$.由 $\overrightarrow{BE}$ 与 $\overrightarrow{BF}$ 共线,$\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线,得 $\begin{cases}\frac{2}{3}x-y=0,\\-x-(y-1)=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$ 即 $\overrightarrow{BE}=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$,

又 $\overrightarrow{BE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=(n,-m-n)$,

所以 $-m-n=\frac{2}{5}$,

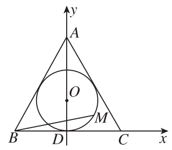
所以 $m+n=-\frac{2}{5}$.

【自我检测】

1. B [解析] $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,故选 B.

2. A [解析]由 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$,可知 D 为 AC 的中点,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,所以 $m=\frac{1}{3}$,$n=\frac{1}{3}$,故 $m+n=\frac{2}{3}$.

3. C [解析]连接 DA.以 D 点为原点,BC 所在直线为 x 轴,DA 所在直线为 y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系.设内切圆的半径为 r,则圆心为 $(0,r)$,根据三角形面积公式得到 $\frac{1}{2}\times l_{\triangle ABC}\times r=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin 60^\circ$($l_{\triangle ABC}$ 为 $\triangle ABC$ 的周长),可得到内切圆的半径 $r=1$.易得 $B(-\sqrt{3},0)$,$C(\sqrt{3},0)$,$A(0,3)$,$D(0,0)$,设 $M(\cos\theta,1+\sin\theta)$,$x\in[0,2\pi)$,则 $\overrightarrow{BM}=(\cos\theta+\sqrt{3},1+\sin\theta)$,$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3},3)$,$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},0)$,故 $\overrightarrow{BM}=(\cos\theta+\sqrt{3},1+\sin\theta)=(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y,3x)$,
故 $\begin{cases}\cos\theta=\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-\sqrt{3},\\\sin\theta=3x-1,\end{cases}$
则 $\begin{cases}x=\frac{1+\sin\theta}{3},\\y=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\sin\theta}{3}+\frac{2}{3},\end{cases}$ 所以 $2x+y=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}+\frac{\sin\theta}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{4}{3}\leqslant 2$,当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时等号成立.故 $2x+y$ 的最大值为 2.



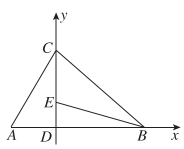
4. $-\frac{1}{3}$ [解析]因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$,所以 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(1-2k,3-k)$.又 $\boldsymbol{c}=(1,2)$,向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 共线,所以 $2(1-2k)-(3-k)=0$,解得 $k=-\frac{1}{3}$.

小题 2

例 2 (1)B (2)D [解析](1)由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2=1$.$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1-2+[t^2+(2-t)^2]}=\sqrt{2(t-1)^2+1}$,因此,当 $t=1$ 时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 取得最小值 1.故选 B.

(2)方法一:取 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 为平面的一组基底,则 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{7}{9}\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{7}{9}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{7}{9}\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAC-\frac{7}{9}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{3}\times2\times3\cos 60^\circ-\frac{7}{9}\times3^2=-6$.故选 D.

方法二:在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理得 $CD=\sqrt{3}$,则 $AD^2+CD^2=AC^2$,所以 $CD\perp AB$,以 D 为原点,AB,DC 所在直线分别为 x,y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $A(-1,0)$,$B(2,0)$,$E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,所以 $\overrightarrow{BE}=\left(-2,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(3,0)$,所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=-2\times3=-6$.故选 D.

【自我检测】

1. A [解析]因为 $\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 互相垂直,所以 $(\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)=0$,整理得 $\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1^2+(\sqrt{3}\lambda-1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-\lambda\boldsymbol{e}_2^2=0$,即 $\sqrt{3}+(\sqrt{3}\lambda-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda=0$,故 $\lambda=-\sqrt{3}$,故选 A.

2. D [解析]因为 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$,所以 A,E,D 三点共线,所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{BE}=-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})=-\left(-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$,又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{36}(5\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AC}^2)=\frac{1}{36}\times[5\times(6\sqrt{3})^2-6^2]=14$.故选 D.

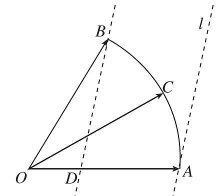
3. 2 [解析]设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,由题意知 $|\overrightarrow{OA}|=4$,点 B 到直线 OA 的距离为 1.设 OA 的中点为 C,则 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=-\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}=-(\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{CA}^2)=4-\overrightarrow{BC}^2\leqslant4-1=3$,
当且仅当 $|\overrightarrow{BC}|=1$ 时,等号成立,此时,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}|=2|\overrightarrow{BC}|=2$.

4. $\frac{1}{2}$ [解析]因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=\frac{1}{2}$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$.

增分一课

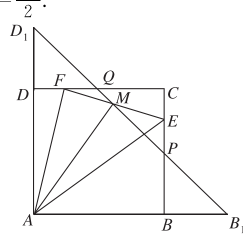
方法 1

1. [1,3] [解析]如图,在线段 OA 上取一点 D,使得 $\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OD}$,



则 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=3x\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=3x\overrightarrow{OD}+y\overrightarrow{OB}$.
所以,当点 C 位于直线 BD 上(即 C 与 B 重合)时,$(3x+y)_{\min}=1$;
当点 C 位于直线 l 上(即 C 与 A 重合)时,$(3x+y)_{\max}=3$.故 $3x+y$ 的取值范围是 $[1,3]$.

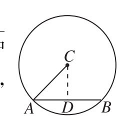
2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ [解析]方法一:如图,在 AB 的延长线上取点 B_1,AD 的延长线上取点 D_1,使得 $\overrightarrow{AB_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$,连接 B_1D_1,$B_1D_1\cap BC=P$,$B_1D_1\cap CD=Q$,设 M 为 EF 的中点,连接 AM.
因为 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{x}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{y}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{x}{3}\overrightarrow{AB_1}+\frac{y}{3}\overrightarrow{AD_1}$,因为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$,
所以点 B_1,M,D_1 三点共线,即 M 在线段 PQ 上,因此当 E,F 分别与 P,Q 重合时,$|EF|_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



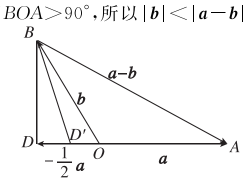
方法二:以 C 为原点,CB,CD 所在直线分别为 x,y 轴,建立平面直角坐标系(图略),则 $A(1,1)$,$B(1,0)$,$C(0,0)$,$D(0,1)$,设 $E(a,0)$,$F(0,b)$,$a,b\in[0,1]$,
则 $\overrightarrow{AE}=(a-1,-1)$,$\overrightarrow{AF}=(-1,b-1)$,$\overrightarrow{AB}=(0,-1)$,$\overrightarrow{AD}=(-1,0)$,由 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,
可得 $y=2-a$,$x=2-b$.
因为 $x+y=3$,所以 $a+b=1$,
所以 $|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(1-a)^2}=\sqrt{2a^2-2a+1}=\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法 2

1. 2 [解析]如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 交 AB 于 D,则 D 为 AB 的中点.在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$AD=\frac{1}{2}AB$,$|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle CAB=|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$,$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=2$,$\therefore|\overrightarrow{AB}|=2$.

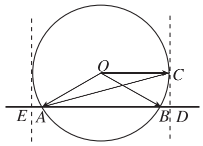


2. D [解析]如图,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,取 $\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,由向量差的几何意义可知 $\left|\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right|=\left|\boldsymbol{b}-\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\right|=|\overrightarrow{DB}|$,
而 $|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}-(-t\boldsymbol{a})|=|\overrightarrow{D'B}|$($D'$ 为直线 OA 上任意一点).
因为 $|\overrightarrow{DB}|\geqslant|\overrightarrow{D'B}|$ 恒成立,所以 $BD\perp OA$,
所以,$\angle BOA>90^\circ$,所以 $|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,故选 D.



方法3

1. $\left[\frac{3}{2}-\sqrt{3},\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right]$ [解析] 构造单位圆,圆心为O,则A,B,C均在圆周上,如图所示.



设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,

则由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,可知$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120°$,$\therefore|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$.

因此,$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}\times|\overrightarrow{AC}|\times\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle$,

其中,$|\overrightarrow{AC}|\times\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle$的几何意义是向量$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影.

如图所示,投影最大为$|\overrightarrow{AD}|=r+\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$($r$为单位圆的半径),最小为$-|\overrightarrow{AE}|=-\left(r-\frac{|\overrightarrow{AB}|}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-1$,

所以,$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\in\left[\frac{3}{2}-\sqrt{3},\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right]$.

2. $3\sqrt{2}$ [解析] 方法一:由$|\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=2,|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=4$,得$|\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|^2=36$,即$\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{12}+\frac{|\boldsymbol{c}|^2}{6}=1$,可构造椭圆$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$,则题目转化为当$x,y$满足$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1(x>0,y>0)$时,求$z=x+y$的最大值.

易知当直线$z=x+y$与曲线$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1(x>0,y>0)$相切时,$z$取得最大值.

由$\begin{cases}z=x+y,\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1,\end{cases}$得$3x^2-4zx+2z^2-12=0$,

由$\Delta=0$得$z=3\sqrt{2}$(负值舍去),所以$(x+y)_{\max}=3\sqrt{2}$.

方法二:同方法一得$\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{12}+\frac{|\boldsymbol{c}|^2}{6}=1$,可设$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}\cos\theta,|\boldsymbol{c}|=\sqrt{6}\sin\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,

则$|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{6}\sin\theta=3\sqrt{2}\sin(\theta+\varphi)\leqslant3\sqrt{2}$(其中$\tan\varphi=\sqrt{2}$).

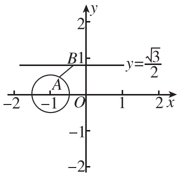
【自我检测】

1. C [解析] $\because|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}|$,$\therefore|\overrightarrow{BA}|=|(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})+(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC})|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$,即$|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$,两边平方整理得$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,$\therefore\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$,$\therefore\triangle ABC$为直角三角形.故选C.

2. $\frac{3}{2}$ [解析] 因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=3$,所以$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AF}|\cos\angle FAB=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|=3$,所以$|\overrightarrow{AE}|=\frac{3}{2}$,所以$|\overrightarrow{CF}|=\frac{1}{2}$,

所以$|\overrightarrow{BF}|=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$.

3. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ [解析] 建立如图所示的平面直角坐标系,



由$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$均为单位向量,且它们的夹角为60°,可设$\boldsymbol{e}_2=(1,0)$,$\boldsymbol{e}_1=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\because\boldsymbol{a}$满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_2|=\frac{1}{2}$,$\therefore$若$\boldsymbol{a}$在平面中所对应的始点为原点$O$,则终点$A$在以$(-1,0)$为圆心,$\frac{1}{2}$为半径的圆上运动.$\because\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2(m\in\mathbf{R})$,$\therefore$若$\boldsymbol{b}$在平面中所对应的始点为原点$O$,则终点$B$在直线$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$上运动,易知$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的几何意义为点$A$到点$B$的距离.由图可知$|AB|_{\min}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,即$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

第7讲 三角函数与解三角形

典型真题研析

1. (1)B (2)D (3)$\frac{\sqrt{2}}{10}$ [解析] (1)$2\sin2\alpha=\cos2\alpha+1\Rightarrow4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha$,因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\cos\alpha\neq0$,所以$2\sin\alpha=\cos\alpha$,代入$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$得$\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$,而$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)$\tan255°=\tan(180°+75°)=\tan75°=\tan(30°+45°)=\frac{\tan30°+\tan45°}{1-\tan30°\tan45°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times1}=2+\sqrt{3}$.故选D.

(3)由$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\tan\alpha}{\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}}=-\frac{2}{3}$,得$3\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$,解得$\tan\alpha=2$或$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$.

$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$,

将$\tan\alpha=2$或$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$代入得$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

2. (1)$\frac{1}{2}$ 左 $\frac{\pi}{12}$ (2)A [解析] (1)曲线C_1,即$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,把其上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍,纵坐标不变,得曲线$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$,再把该曲线向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图像.

(2)因为$\cos(-x)=\cos x$,所以$f(x)=\cos|x|=\cos x$,其最小正周期为2π,C不正确;$f(x)=\sin|x|=\begin{cases}\sin x,x\geqslant0,\\-\sin x,x<0,\end{cases}$该函数没有周期性,D不正确;函数$f(x)=|\sin2x|$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,但当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时,$f(x)=|\sin2x|=\sin2x$单调递减,B不正确;函数$f(x)=|\cos2x|$以$\frac{\pi}{2}$为周期,且在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,满足题意.故选A.

3. (1)-4 (2)1 [解析] (1)$f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x=-\cos2x-3\cos x=-2\cos^2x-3\cos x+1=-2\left(\cos x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$,$\because-1\leqslant\cos x\leqslant1$,$\therefore$当$\cos x=1$时,$f(x)_{\min}=-2\times\left(1+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}=-4$.

(2)函数$f(x)=\sin(x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(x+\varphi)=\sin[(x+\varphi)+\varphi]-2\sin\varphi\cos(x+\varphi)=\sin(x+\varphi)\cos\varphi-\cos(x+\varphi)\sin\varphi=\sin x$,故其最大值为1.

4. (1)135° (2)C [解析] (1)由正弦定理得$\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$,因为$\sin A\neq0$,所以$\sin B+\cos B=0$,即$\tan B=-1$,又因为$0°<B<180°$,所以$B=135°$.

(2)由三角形的面积公式可得,$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}=\frac{1}{2}ab\sin C$,所以$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\sin C$.由余弦定理得,$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos C$,所以$\cos C=\sin C$,又$C\in(0,\pi)$,所以$C=\frac{\pi}{4}$.

考点考法探究

小题1

例1 (1)C (2)B [解析] (1)$f(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到$y=2\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$的图像,再把所得图像上所有点的横坐标伸长到原来的2倍,得到$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图像.当$x=\frac{\pi}{12}$时$g(x)$取得最大值,因此直线$x=\frac{\pi}{12}$是$g(x)$图像的对称轴,选项C中的说法错误.故选C.

(2)由图知,函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的最小正周期$T=\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,则$\omega=2$.

又$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以$2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=2k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z}$,

则$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z}$,因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$,

故函数$f(x)$的解析式为$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

将$f(x)=\sin2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图像向右平移$|m|$($m<0$)个单位长度,得到$y=\sin2\left(x-|m|+\frac{\pi}{6}\right)$的图像,

因为所得图像关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称,

所以$\sin2\left(\frac{\pi}{4}-|m|+\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$,

则$2\left(\frac{\pi}{4}-|m|+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+k_2\pi,k_2\in\mathbf{Z}$,得$|m|=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}k_2\pi,k_2\in\mathbf{Z}$,

因为$m<0$,所以$m=\frac{1}{2}k_2\pi-\frac{\pi}{6}(k_2\leqslant0,k_2\in\mathbf{Z})$,

故m的最大值为$-\frac{\pi}{6}$.

【自我检测】

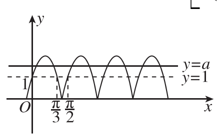
1. B [解析] 由题意,函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$,所以把函数$y=\cos2x$的图像向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,可得到函数$y=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$的图像,故选B.

2. D [解析] $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,由题意可得$\frac{\pi}{4}$是$f(x)$的一个周期,所以$k\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{N}^*$,即$\omega=8k,k\in\mathbf{N}^*$,结合选项可知选D.

3. B [解析] 由题意设$g(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$,$\because g(0)=2\sin\varphi=1$,即$\sin\varphi=\frac{1}{2}$,$\therefore\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$或$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$(舍去),$k\in\mathbf{Z}$,则

$g(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{6}\right)$,又$\frac{7\pi}{12}\omega+\frac{5\pi}{6}=2k_1\pi$,$k_1\in\mathbf{Z}$,∴$\omega=\left(2k_1-\frac{5}{6}\right)\times\frac{12}{7}$,$k_1\in\mathbf{Z}$,当$k_1=1$时,$\omega=2$,即$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$.把函数$g(x)$的图像上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到$y=2\sin\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)$的图像,再把该图像上所有点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(横坐标不变),得到$y=\sin\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)$的图像,再把所得图像向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度得到函数$f(x)$的图像,即$f(x)=\sin\left[4\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{5\pi}{6}\right]=\sin\left(4x-\frac{8\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(4x-\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$,故选B.

4. B [解析]令$|f(x)|=1$,且$x\geqslant0$,即$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$,解得$x=0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\cdots$,又因为$1<a<2$,且$|f(x)|\leqslant2$,所以$|f(x)|-a=0(0\leqslant x<m)$总有两个不同实数根,即函数$y=|f(x)|(0\leqslant x<m)$的图像与直线$y=a(1<a<2)$有两个不同的交点.作出函数$y=|f(x)|$的图像,及直线$y=a$,如图所示,结合图像,可得$\frac{\pi}{3}\leqslant m\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以实数$m$的取值范围是$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.



小题 2

例2 (1)C (2)D [解析](1)函数$f(x)=\cos^2x-\sin^2x-2\sin x\cos x=\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,∵$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,∴$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$,∴$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,故$f(x)\in[-\sqrt{2},1]$,故选C.

(2)$f(x)=m\sin\omega x-\cos\omega x=\sqrt{m^2+1}\sin(\omega x+\varphi)$,其中$\tan\varphi=-\frac{1}{m}$.设$y=f(x)$,$z=g(x)\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$,则由题意可得$y_{\max}\leqslant z_{\max}$,即$\sqrt{m^2+1}\leqslant2$,函数$f(x)$的值域为$[-2,2]$的子集.设函数$f(x)$的最小正周期为$T$,∵$f(x)$在区间$[0,\pi]$上的值域为$[-1,2]$,∴$\frac{T}{3}\leqslant\pi\leqslant\frac{2}{3}T$,即$\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant\pi\leqslant\frac{4\pi}{3\omega}$,解得$\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{4}{3}$,结合选项可知实数$\omega$的取值不可能是$\frac{1}{2}$,故选D.

【自我检测】

1. A [解析]∵$f(x)=m+\sin x-\cos x=m+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,∴$f(x)_{\max}=m+\sqrt{2}=0$,∴$m=-\sqrt{2}$.故选A.

2. C [解析]$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\times\left[\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\pi$,故$\omega=2$,又$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,结合选项知$\varphi$的值可能为$\frac{13\pi}{6}$.故选C.

3. A [解析]$y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,令$t=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$,则$y=t-2t^2+1=\frac{9}{8}-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2$,易知当$t=\frac{1}{4}$时,$y=t-2t^2+1$的最大值为$\frac{9}{8}$.故选A.

4. D [解析]因为函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$图像的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$,所以最小正周期$T=\pi$,又$\omega>0$,$T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=2$.又因为将函数$f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后,得到函数$g(x)$的图像,所以$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$.由函数$g(x)$为偶函数,可得$\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,而$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,因此$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.由$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$,得$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$,则$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,所以函数$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上的值域是$[-2,1]$,故选D.

小题 3

例3 (1)D (2)A (3)3 [解析](1)$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan(\pi+\alpha)=\cos\alpha\cdot\tan\alpha=\sin\alpha$,因为$\alpha\in(0,\pi)$,且$\cos\alpha=-\frac{15}{17}$,所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}$,故选D.

(2)由题意得$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2}+\frac{3\cos\theta}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{5}$,整理得$\sin\theta\sin\frac{5\pi}{6}-\cos\theta\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{3}{5}$,从而$-\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$,即$\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$,故选A.

(3)因为$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,所以$\tan\alpha=\tan\left[\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$.

【自我检测】

1. C [解析]根据$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,可得$\frac{(a-1)^2+a^2}{(1+a)^2}=1$,解得$a=4$或$a=0$(舍去).∴$\tan\theta=\frac{1-a}{a}=-\frac{3}{4}$.

2. B [解析]∵$\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=\sin x+\cos x+1=\frac{4}{3}$,∴$\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$,两边同时平方可得$1+2\sin x\cos x=\frac{1}{9}$,则$\sin 2x=2\sin x\cos x=-\frac{8}{9}$,故选B.

3. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ [解析]因为$x\in(0,\pi)$,且$\cos x=\frac{4}{5}$,所以$\sin x=\frac{3}{5}$,所以$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

4. $\frac{1}{3}$ [解析]因为$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,两边同时平方得$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{4}{3}$,即$\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$,所以$\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$.

小题 4

例4 (1)D (2)$\sqrt{3}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [解析](1)由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3}{2}$,得$ac=6$,由$\sin A+\sin C=2\sin B$,得$a+c=2b$,由余弦定理得$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(a+c)^2-2ac-b^2}{2ac}=\frac{b^2-4}{4}$,∴$b^2=4+2\sqrt{3}$,∴$b=\sqrt{3}+1$,故选D.

(2)因为CD平分$\angle ACB$,所以$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=2$,不妨设$BD=x$,则$AD=2x$.

由$\cos\angle ACD=\cos\angle BCD$,得$\frac{4+\frac{4}{3}-4x^2}{2\times2\times\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{1+\frac{4}{3}-x^2}{2\times1\times\frac{2}{\sqrt{3}}}$,得$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$AB=\sqrt{3}$.

由$\cos\angle ACB=\frac{4+1-3}{2\times2\times1}=\frac{1}{2}$,得$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【自我检测】

1. A [解析]∵$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$A\in(0,\pi)$,∴$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{1}{3}$,∵$AB=3BC$,∴由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$,∴$\frac{3BC}{\sin C}=\frac{BC}{\frac{1}{3}}$,∴$\sin C=1$,又∵$C\in(0,\pi)$,∴$C=\frac{\pi}{2}$,∴$\cos B=-\cos(A+C)=\sin A=\frac{1}{3}$.故选A.

2. A [解析]由题意可得,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ$,∴$\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=10\sqrt{3}$,∴$ab=40$.∵$a+b+c=20$,∴$20-c=a+b$.由余弦定理可得,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ=(a+b)^2-3ab=(20-c)^2-120$,解得$c=7$.故选A.

3. B [解析]设$AB=x$,则$\sqrt{2}<x<3\sqrt{2}$,由余弦定理可得,$\cos B=\frac{x^2+8-2}{4\sqrt{2}x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(x+\frac{6}{x}\right)\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}\times2\sqrt{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,当且仅当$x=\sqrt{6}$时等号成立,根据余弦函数的性质可知,$0<B\leqslant\frac{\pi}{6}$.故选B.

4. $2\sqrt{7}$ [解析] 由题意及正弦定理得$\frac{a+b}{c}=\frac{c+a}{c+a-b}$,整理得 $a^2=b^2+c^2-bc$,故 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$. $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2\Rightarrow b+2c=2\sin B+4\sin C=2\sin B+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=4\sin B+2\sqrt{3}\cos B=2\sqrt{7}\sin(B+\theta)$,其中 θ 为锐角,$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∵$B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,

∴当 $B+\theta=\frac{\pi}{2}$时,$b+2c$ 取得最大值 $2\sqrt{7}$.

第 8 讲 三角恒等变换与解三角形

典型真题研析

1. 解:(1)因为 $f(x+\theta)=\sin(x+\theta)$是偶函数,所以对任意实数 x 都有 $\sin(x+\theta)=\sin(-x+\theta)$,
即 $\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta=-\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta$,
故 $2\sin x\cos\theta=0$,
所以 $\cos\theta=0$.
又 $\theta\in[0,2\pi)$,因此 $\theta=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$.
(2)$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{3}{2}\sin 2x\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.
因此,函数的值域是$\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

2. 解:(1)由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$,
所以 $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=\frac{4}{5}$.
(2)由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,
由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$得 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.
由 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ 得 $\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$,
所以 $\cos\beta=-\frac{56}{65}$或 $\cos\beta=\frac{16}{65}$.

3. 解:(1)由已知得 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$,故由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$.
由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$.
因为 $0°<A<180°$,所以 $A=60°$.
(2)由(1)知 $B=120°-C$,由题设及正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A+\sin(120°-C)=2\sin C$,即 $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C=2\sin C$,
可得 $\cos(C+60°)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
由于 $0°<C<120°$,所以 $\sin(C+60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故
$\sin C=\sin(C+60°-60°)$
$=\sin(C+60°)\cos 60°-\cos(C+60°)\sin 60°$
$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

解答 1

例 1 解:$f(x)=\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.
(1)由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,
解得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,
所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.
(2)由 $f(x)=0$ 得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.
又 $0<x\leqslant\pi$,所以 $x=\frac{5\pi}{12}$或$\frac{11\pi}{12}$.

【自我检测】
解:(1)由已知得 $2\sin^2\alpha=3\cos\alpha$,则 $2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$,
所以 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$或 $\cos\alpha=-2$(舍),又因为 $0<\alpha<\pi$,所以 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.
(2)由(1)得 $f(x)=4\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=4\cos x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=1+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,
由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$,得$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,
所以$\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,
故 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的取值范围为[2,3].

解答 2

例 2 解:(1)由 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in(0,\pi)$,可得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=\frac{4}{3}$,
所以$\frac{2\sin(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-2\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=11$.
(2)由 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}<\frac{4}{5}$,且 $\alpha+\beta\in(0,2\pi)$,
可得$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}$,
则 $\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{63}{65}$.

【自我检测】
解:$f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.
(1)$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=1$.
(2)由 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{13}{10}$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,得 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$,$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$,
所以 $\cos\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$.

解答 3

例 3 解:(1)∵$\frac{2b-c}{a}=\frac{\cos C}{\cos A}$,
∴由正弦定理可得$\frac{2\sin B-\sin C}{\sin A}=\frac{\cos C}{\cos A}$,整理可得 $2\sin B\cos A=\cos C\sin A+\sin C\cos A$,则 $2\sin B\cos A=\sin(A+C)=\sin B$,
∵$\sin B\neq 0$,
∴$\cos A=\frac{1}{2}$,
又∵$A\in(0,\pi)$,∴$A=\frac{\pi}{3}$.
(2)∵$a=\sqrt{14}$,$b+c=4\sqrt{2}$,$A=\frac{\pi}{3}$,
∴由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$,
∴$(\sqrt{14})^2=(4\sqrt{2})^2-2bc-2bc\times\frac{1}{2}$,解得 $bc=6$,
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 6\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【自我检测】
解:(1)由$\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$,
得$\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}$,即$\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=\frac{\sin A\cos B+\sin B\cos A}{\cos A\cos B}=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$,
由题可知,$\sin C\neq 0$,$\cos B\neq 0$,所以$\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{1}{\cos A}$,则 $\tan A=\sqrt{3}$,又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.
(2)方法一:由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$,又 $a=2$,所以 $4=b^2+c^2-bc$,
又 $b^2+c^2\geqslant 2bc$,当且仅当 $b=c$ 时等号成立,所以 $bc\leqslant 4$.
因为△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$,所以 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times 4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.
方法二:由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$,
所以 $b=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin B$,$c=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin C$,
△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\sin B\times\frac{4}{\sqrt{3}}\sin C\times\sin A=\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}$,
所以当 $2B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $B=\frac{\pi}{3}$时,$\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)$取得最大值 1,此时 S 取得最大值$\sqrt{3}$,
故△ABC 面积的最大值为$\sqrt{3}$.

模块三 数列与不等式

第 9 讲 数列、等差数列与等比数列

典型真题研析

1. (1)A (2)16 [解析] (1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意有$\begin{cases}4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=0,\\a_1+4d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-3,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_n=-3+(n-1)\times 2=2n-5$,$S_n=-3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-4n$,对比选项可知只有 A 正确.
(2)设数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $S_9=9a_5=27$,得 $a_5=3$,从而 $3a_2+a_8=0$,即 $3(a_5-3d)+(a_5+3d)=0$,解得 $d=\frac{2}{3}a_5=2$,所以 $S_8=S_9-a_9=S_9-(a_5+4d)=27-11=16$.

2. (1)$\frac{121}{3}$ (2)−63 [解析] (1)因为 $a_4^2=a_2a_6=a_6$,所以 $a_2=1$,所以公比为$\frac{a_2}{a_1}=3$,所以 $S_5=$