2020
CANPOINT®

全品高考

第二轮专题

稳抓120 主编：肖德好

浙江省

数学 听课手册

本册主编：吴旻玲
编　　者：吴旻玲　李晓峰
　　　　　沈联晖　高明山
特约主审：叶利民　沈新权

黄河出版传媒集团
阳 光 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

全品高考第二轮专题：数学 / 肖德好主编. —银川：阳光出版社，2014.9（2019.9 重印）

ISBN 978-7-5525-1443-8

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①肖… Ⅲ. ①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 198394 号

全品高考第二轮专题　数学　　**肖德好　主编**

责任编辑　胡　鹏
封面设计　唐思羽

黄河出版传媒集团 阳光出版社 出版发行

出 版 人　薛文斌
地　　址　宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)
网　　址　http://www.ygchbs.com
网上书店　http://shop129132959.taobao.com
电子信箱　yangguangchubanshe@163.com
邮购电话　0951—5014139
经　　销　全国新华书店
印刷装订　河北远涛彩色印刷有限公司

开　　本　880mm×1230mm　1/16
印　　张　15.5
字　　数　543 千字
版　　次　2014 年 9 月第 1 版
印　　次　2019 年 9 月第 6 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5525-1443-8

定　　价　60.80 元

简约不简单

数学 稳抓120

二、三轮复习是高考前的冲刺阶段，也是考生提升成绩的最后一个突破点。要做出一本高效的二、三轮复习用书，关键要找到一种对应一线的高效的二、三轮备考模式。

什么是高效的模式？即确定二、三轮备考到底要解决什么，也即发现学生高考时出现的失分点有哪些。

通过研究历年浙江省高考真题失分明细，并结合大量的一线调研，我们将问题整理如下：

01 怕陌生。每年的高考试卷，总有几道题，难度不大，但试题背景陌生。无论是在心态上，还是在解题的思路上，它们都成了考生的拦路虎。

02 速度慢。在高考时，有相当一部分考生，由于时间分配不合理，或是做题习惯不好，亦或是方法采用不当，最终都没有做完试卷而影响了最后的分数。

03 思维疏。绝大多数中档层次学生，虽然平时做的题很多，但不注意归纳总结，当高考出现同类型有变化的试题时，他们往往在关键步骤上思路不清晰，答题就出现“会而不全”的情况。

04 失误多。每年高考后估分，总会出现拍脑瓜当时没想起来、漏了或看错了条件、计算错误等“会而不对”的情况。

05 没思路。这类试题，有一个特点，即切入点隐蔽，融合的思想与方法多，需要分析的条件错综复杂（目前浙江卷压轴题综合性明显降低）。如果二、三轮没有进行专门的训练，在高考有限的时间里，很难有所突破。

2020版《全品高考第二轮专题》
用心做产品，用心为您！

聚焦高考，将一类类必考问题讲透练透

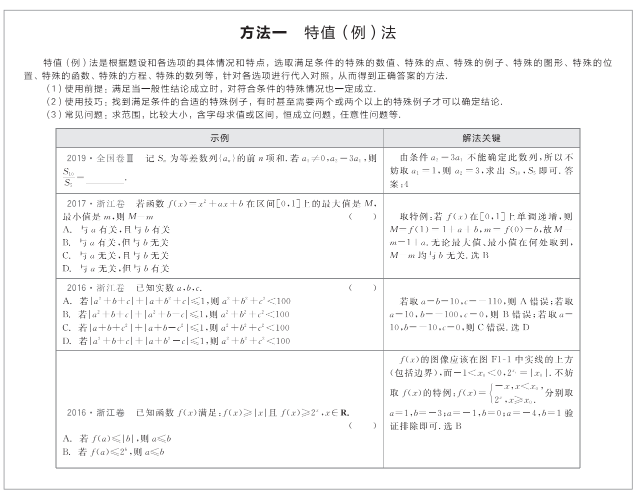
聚焦区分度，将一项项易失分角度逐步攻克

聚焦答卷，将速度、准确度、思维度全面提升

一本对接高考——“专题大本”

一本拆分考卷——“特色专项”

二轮产品部分特点如下：



方法一 特值（例）法

特值（例）法是根据题设和各选项的具体情况和特点，选取满足条件的特殊的数值、特殊的点、特殊的例子、特殊的图形、特殊的位置、特殊的函数、特殊的方程、特殊的数列等，针对各选项进行代入对照，从而得到正确答案的方法。

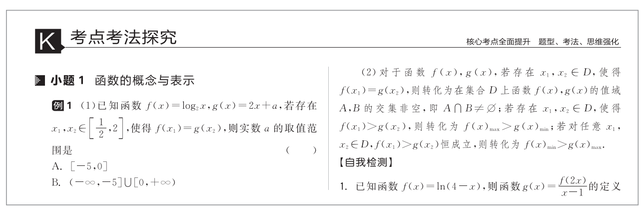
（1）使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊情况也一定成立。

（2）使用技巧：找到满足条件的合适的特殊例子，有时甚至需要两个或两个以上的特殊例子才可以确定结论。

（3）常见问题：求范围，比较大小，含字母求值或区间，恒成立问题，任意性问题等。

示例	解法关键
2019·全国卷Ⅲ 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1\neq0$，$a_2=3a_1$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}=$______.	由条件 $a_2=3a_1$ 不能确定此数列，所以不妨取 $a_1=1$，则 $a_2=3$，求出 S_{10}，S_5 即可，答案：4
2017·浙江卷 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间[0,1]上的最大值是 M，最小值是 m，则 $M-m$ （ ） A. 与 a 有关，且与 b 有关 B. 与 a 有关，但与 b 无关 C. 与 a 无关，且与 b 无关 D. 与 a 无关，但与 b 有关	取特例：若 $f(x)$ 在[0,1]上单调递增，则 $M=f(1)=1+a+b$，$m=f(0)=b$，故 $M-m=1+a$，无论最大值、最小值在何处取到，$M-m$ 均与 b 无关，选 B
2016·浙江卷 已知实数 a,b,c. （ ） A. 若 $\|a^2+b+c\|+\|a+b^2+c\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$ B. 若 $\|a^2+b+c\|+\|a^2+b-c\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$ C. 若 $\|a+b+c^2\|+\|a+b-c^2\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$ D. 若 $\|a^2+b+c\|+\|a+b^2-c\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$	若取 $a=b=10$，$c=-110$，则 A 错误；若取 $a=10$，$b=-100$，$c=0$，则 B 错误；若取 $a=10$，$b=-10$，$c=0$，则 C 错误，选 D
2016·浙江卷 已知函数 $f(x)$ 满足：$f(x)\geqslant\|x\|$ 且 $f(x)\geqslant2^x$，$x\in\mathbf{R}$. （ ） A. 若 $f(a)\leqslant\|b\|$，则 $a\leqslant b$ B. 若 $f(a)\leqslant2^b$，则 $a\leqslant b$	$f(x)$ 的图像应该在图 F1-1 中实线的上方（包括边界），而 $-1<x_1<0$，$2^{x_1}=\|x_1\|$，不妨取 $f(x)$ 的特例：$f(x)=\begin{cases}-x,x<x_1,\\2^x,x\geqslant x_1,\end{cases}$ 分别取 $a=1,b=-3$；$a=-1,b=0$；$a=-4,b=1$ 验证排除即可，选 B

案例式，专攻技法



K 考点考法探究

核心考点全面提升 题型、考法、思维强化

小题 1 函数的概念与表示

例 1 (1)已知函数 $f(x)=\log_2x$，$g(x)=2x+a$，若存在 $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则实数 a 的取值范围是 （ ）

A. $[-5,0]$

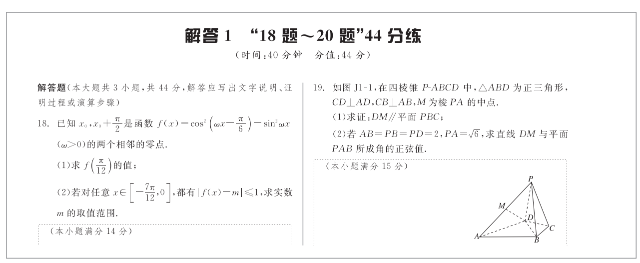
B. $(-\infty,-5]\cup[0,+\infty)$

(2)对于函数 $f(x)$，$g(x)$，若存在 $x_1,x_2\in D$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则转化为在集合 D 上函数 $f(x)$，$g(x)$ 的值域 A,B 的交集非空，即 $A\cap B\neq\varnothing$；若存在 $x_1,x_2\in D$，使得 $f(x_1)>g(x_2)$，则转化为 $f(x)_{max}>g(x)_{min}$；若对任意 x_1，$x_2\in D$，$f(x_1)>g(x_2)$ 恒成立，则转化为 $f(x)_{min}>g(x)_{max}$.

【自我检测】

1. 已知函数 $f(x)=\ln(4-x)$，则函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义

题组式，专攻题型与失误



解答 1 “18 题～20 题”44 分练

（时间：40 分钟 分值：44 分）

解答题（本大题共 3 小题，共 44 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

18. 已知 $x_1,x_2+\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)=\cos^2\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\omega x$ $(\omega>0)$ 的两个相邻的零点.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 的值；

(2)若对任意 $x\in\left[-\frac{7\pi}{12},0\right]$，都有 $|f(x)-m|\leqslant1$，求实数 m 的取值范围.

（本小题满分 14 分）

19. 如图 J1-1，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 为正三角形，$CD\perp AD$，$CB\perp AB$，M 为棱 PA 的中点.

(1)求证：DM∥平面 PBC；

(2)若 $AB=PB=PD=2$，$PA=\sqrt{6}$，求直线 DM 与平面 PAB 所成角的正弦值.

（本小题满分 15 分）

限时式，专攻速度与规范

目录

contents

全品高考第二轮专题（听课手册）

第Ⅰ篇 高考专题讲练

高考六大模块题型解法攻略

01 模块一 函数与导数

02 模块二 三角函数与平面向量

03 模块三 数列与不等式

04 模块四 立体几何与空间向量

05 模块五 解析几何

方法篇
选填题的特殊解法

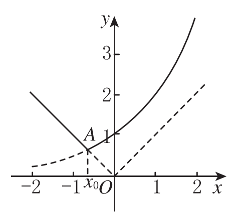
方法一　特值（例）法

特值（例）法是根据题设和各选项的具体情况和特点，选取满足条件的特殊的数值、特殊的点、特殊的例子、特殊的图形、特殊的位置、特殊的函数、特殊的方程、特殊的数列等，针对各选项进行代入对照，从而得到正确答案的方法.

（1）使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊情况也一定成立.

（2）使用技巧：找到满足条件的合适的特殊例子，有时甚至需要两个或两个以上的特殊例子才可以确定结论.

（3）常见问题：求范围，比较大小，含字母求值或区间，恒成立问题，任意性问题等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅲ] 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若 $a_1\neq0,a_2=3a_1$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}=$________.	由条件 $a_2=3a_1$ 不能确定此数列，所以不妨取 $a_1=1$，则 $a_2=3$，求出 S_{10}，S_5 即可. 答案：4
[2017·浙江卷] 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间$[0,1]$上的最大值是 M，最小值是 m，则 $M-m$（　　） A. 与 a 有关，且与 b 有关 B. 与 a 有关，但与 b 无关 C. 与 a 无关，且与 b 无关 D. 与 a 无关，但与 b 有关	取特例：若 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增，则 $M=f(1)=1+a+b$，$m=f(0)=b$，故 $M-m=1+a$. 无论最大值、最小值在何处取到，$M-m$ 均与 b 无关. 选 B
[2016·浙江卷] 已知实数 a,b,c.（　　） A. 若$\|a^2+b+c\|+\|a+b^2+c\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$ B. 若$\|a^2+b+c\|+\|a^2+b-c\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$ C. 若$\|a+b+c^2\|+\|a+b-c^2\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$ D. 若$\|a^2+b+c\|+\|a+b^2-c\|\leqslant1$，则 $a^2+b^2+c^2<100$	若取 $a=b=10,c=-110$，则 A 错误；若取 $a=10,b=-100,c=0$，则 B 错误；若取 $a=10,b=-10,c=0$，则 C 错误. 选 D
[2016·浙江卷] 已知函数 $f(x)$满足：$f(x)\geqslant\|x\|$且 $f(x)\geqslant2^x$，$x\in\mathbf{R}$.（　　） A. 若 $f(a)\leqslant\|b\|$，则 $a\leqslant b$ B. 若 $f(a)\leqslant2^b$，则 $a\leqslant b$ C. 若 $f(a)\geqslant\|b\|$，则 $a\geqslant b$ D. 若 $f(a)\geqslant2^b$，则 $a\geqslant b$	$f(x)$的图像应该在图 F1-1 中实线的上方（包括边界），而$-1<x_0<0$，$2^{x_0}=\|x_0\|$. 不妨取 $f(x)$的特例：$f(x)=\begin{cases}-x,x<x_0,\\2^x,x\geqslant x_0.\end{cases}$分别取 $a=1,b=-3$；$a=-1,b=0$；$a=-4,b=1$ 验证排除即可. 选 B  图 F1-1

自测题

1. 已知 $a>b>0$，$x=a+be^b$，$y=b+ae^a$，$z=b+ae^b$，则（　　）

   A. $x<z<y$　　B. $z<x<y$

   C. $z<y<x$　　D. $y<z<x$

2. 设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\beta=\tan\alpha(1+\sin\beta)$，则（　　）

   A. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$　　B. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

   C. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

3. 已知直线 l 与双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 相切于点 P，l 与双曲线的两条渐近线分别交于点 M,N，O 为坐标原点，则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的值为（　　）

   A. 3　　B. 4

   C. 5　　D. 0

4. 设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则下列等式中一定成立的是（　　）

   A. $S_n+S_{2n}=S_{3n}$

   B. $S_{2n}^2=S_nS_{3n}$

   C. $S_{2n}^2=S_n+S_{2n}-S_{3n}$

   D. $S_n^2+S_{2n}^2=S_n(S_{2n}+S_{3n})$

5. 如图 F1-2，在$\triangle ABC$ 中，点 M 是 BC 的中点，过点 M 的直线与直线 AB,AC 分别交于不同的两点 P,Q，若$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=$________.

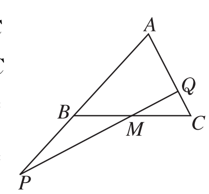


图 F1-2

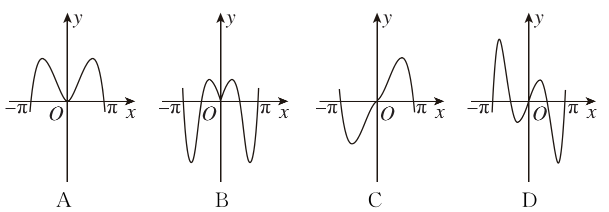
方法二　排除法

数学选择题的解题本质就是去伪存真，舍弃不符合题目要求的选项，找到符合题意的正确选项. 排除法就是通过观察分析或推理运算题目提供的信息或通过特例，对错误的选项逐一剔除，从而获得正确选项的方法.

(1) 使用前提：四个选项中有且只有一个正确答案，适用于定性型或不易直接求解的选择题.

(2) 使用技巧：当题目中的条件多于一个时，先根据某些条件在选项中找出明显与之矛盾的，予以否定，再根据另一些条件在缩小选项的范围内找出矛盾，这样逐步筛选. 它与特值（例）法、验证法等常结合使用.

(3) 常见问题：函数图像的判别，不等式，空间线面位置关系等不宜直接求解的问题.

示例	解法关键
[2018·浙江卷] 函数 $y=2^{\|x\|}\sin 2x$ 的图像可能是　（　　）  图 F2-1	令 $y=f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数，其图像关于原点对称，排除 A，B. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f(x)<0$. 选 D
[2019·全国卷Ⅱ] 若 $a>b$，则　（　　） A. $\ln(a-b)>0$　B. $3^a<3^b$ C. $a^3-b^3>0$　D. $\|a\|>\|b\|$	选择满足 $a>b$ 的一组数逐一排除错误答案，比如 $a=-1,b=-2$，排除 A，B，D. 选 C
[2019·全国卷Ⅱ] 下列函数中，以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增的是　（　　） A. $f(x)=\|\cos 2x\|$　B. $f(x)=\|\sin 2x\|$ C. $f(x)=\cos\|x\|$　D. $f(x)=\sin\|x\|$	分析各选项中函数的周期性与单调性，逐一排除. $f(x)=\sin\|x\|$ 为偶函数，不是周期函数，可排除 D；$f(x)=\cos\|x\|=\cos x$ 的最小正周期为 2π，可排除 C；$f(x)=\|\sin 2x\|$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，可排除 B. 选 A
[2019·浙江卷] 设 $a,b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x,x<0,\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax,x\geqslant 0.\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点，则　（　　） A. $a<-1,b<0$　B. $a<-1,b>0$ C. $a>-1,b<0$　D. $a>-1,b>0$	函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点等价于函数 $y=f(x)$ 与 $y=ax+b$ 的图像恰有 3 个交点. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)$，$f(0)=0$，$f'(0)=a$. 当 $a\leqslant -1$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=ax+b$ 的图像不可能有 3 个交点，排除 A，B. 当 $a>-1$ 时，取 $a=0$，则 $f(x)=\begin{cases}x,x<0,\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2,x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $y=f(x)$ 与 $y=b$ 的图像有 3 个交点，则 $-\frac{1}{6}<b<0$，排除 D，选 C

自测题

1. 函数 $f(x)=x^2+x\sin x$ 的图像大致为　（　　）

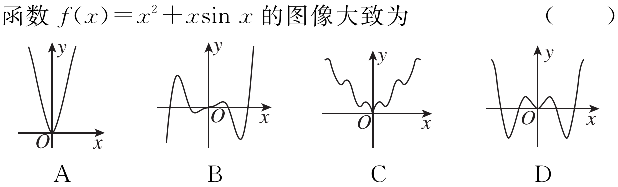


图 F2-2

2. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b}=1(b>0)$，直线 $l:y=mx+1$，若对任意的 $m\in\mathbf{R}$，直线 l 与椭圆 C 恒有公共点，则实数 b 的取值范围是　（　　）

A. $[1,4)$

B. $[1,+\infty)$

C. $[1,4)\cup(4,+\infty)$

D. $(4,+\infty)$

3. 若函数 $f(x)=\sin x-2\cos(x-\varphi)\sin\varphi(0<\varphi<\pi)$ 在 $\left[3\pi,\frac{7\pi}{2}\right]$ 上为增函数，则 φ 的取值范围是　（　　）

A. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$　B. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

C. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$　D. $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

4. 若直线 $x-my+m=0$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 有两个交点，且两个交点分别位于坐标平面上两个不同的象限内，则 m 的取值范围是　（　　）

A. $(0,1)$

B. $(0,2)$

C. $(-1,0)$

D. $(-2,0)$

方法三　验证法

验证法是把选项代入题干中进行检验，或反过来从题干中找合适的验证条件，代入各选项中进行检验，从而可否定错误选项，得到正确选项的方法.

（1）使用前提：选项中存在唯一正确的答案.

（2）使用技巧：可以结合特值（例）法、排除法等先否定一些明显错误的选项，再选择直觉认为最有可能的选项进行验证，这样可以快速获取答案.

（3）常见问题：题干信息不全，选项是数值或范围，正面求解或计算繁琐的问题等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅰ] 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.已知 $S_4=0,a_5=5$,则（　　） A. $a_n=2n-5$ B. $a_n=3n-10$ C. $S_n=2n^2-8n$ D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$	由已知 $S_4=0,a_5=5$ 可知 $S_5=5$,验证选项 C,D 可知 C,D 错误;再由 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ 验证选项 A,B,可知 B 错误.选 A
[2018·北京卷] 设集合 $A=\{(x,y)\mid x-y\geqslant1,ax+y>4,x-ay\leqslant2\}$,则（　　） A. 对任意实数 a,$(2,1)\in A$ B. 对任意实数 a,$(2,1)\notin A$ C. 当且仅当 $a<0$ 时,$(2,1)\notin A$ D. 当且仅当 $a\leqslant\frac{3}{2}$ 时,$(2,1)\notin A$	对 a 取特殊值进行验证.当 $a=0$ 时,A 错误;当 $a=2$ 时,B 错误;当 $a=1$ 时,C 错误.选 D
[2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$,则（　　） A. $f(x)$的最小正周期为 π,最大值为 3 B. $f(x)$的最小正周期为 π,最大值为 4 C. $f(x)$的最小正周期为 2π,最大值为 3 D. $f(x)$的最小正周期为 2π,最大值为 4	当 $x=0$ 时,$\sin x=0,\cos x=1$,函数值为 4,所以 A,C 错误;验证可得 $f(x+\pi)=f(x)$,所以 D 错误.选 B
[2018·全国卷Ⅲ] 下列函数中,其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是（　　） A. $y=\ln(1-x)$ B. $y=\ln(2-x)$ C. $y=\ln(1+x)$ D. $y=\ln(2+x)$	函数 $y=\ln x$ 的图像过点(1,0),而点(1,0)关于直线 $x=1$ 对称的点是(1,0),经验证只有 B 符合题意.选 B
[2017·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递减,且为奇函数.若 $f(1)=-1$,则满足$-1\leqslant f(x-2)\leqslant1$ 的 x 的取值范围是（　　） A. $[-2,2]$ B. $[-1,1]$ C. $[0,4]$ D. $[1,3]$	当 $x=4$ 时,$f(x-2)=f(2)<f(1)=-1$,不符合题意,当 $x=3$ 时,$f(x-2)=f(1)=-1$,符合题意.选 D

自测题

1. 设下列函数的定义域为$(0,+\infty)$,则值域为$(0,+\infty)$的函数是（　　）

A. $y=e^x-x$

B. $y=e^x+\ln x$

C. $y=x-\sqrt{x}$

D. $y=\ln(x+1)$

2. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$图像的一条对称轴的方程为 $x=\frac{\pi}{12}$,则 ω 的最小值为（　　）

A. 2

B. 4

C. 10

D. 16

3. 已知 π 为圆周率,e 为自然对数的底数,则（　　）

A. $\pi^e<3^e$

B. $\pi3^{e-2}<3\pi^{e-2}$

C. $\log_\pi e>\log_3 e$

D. $\pi\log_3 e>3\log_\pi e$

4. 已知函数 $f(x)=-x^3-7x+\sin x$,若 $f(a^2)+f(a-2)>0$,则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,1)$

B. $(-\infty,3)$

C. $(-1,2)$

D. $(-2,1)$

方法四　估算法

因为选择题提供了唯一正确的答案，解答又不需提供过程，所以可以通过猜测、合情推理、估算而获得答案，这样往往可以减少运算量，但同时加强了思维的层次. 估算省去了很多推导过程和复杂的计算，节省了时间，从而显得更加快捷.

（1）使用前提：针对一些复杂的、不易准确求值的与计算有关的问题. 常与特值（例）法结合起来使用.

（2）使用技巧：对于数值计算常采用放缩估算、整体估算、近似估算、特值估算等，对于几何体问题，常进行分割、拼凑、位置估算.

（3）常见问题：求几何体的表面积、体积，三角函数的求值，求离心率，求参数的范围等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅰ] 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right.$，称为黄金分割比例$\left.\right)$，著名的"断臂维纳斯"便是如此. 此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为105 cm，头顶至脖子下端的长度为26 cm，则其身高可能是（　　）  图 F4-1 A. 165 cm　　B. 175 cm C. 185 cm　　D. 190 cm	头顶至脖子下端的长度为26 cm，可得咽喉至肚脐的长度小于42 cm，肚脐至足底的长度小于110 cm，则该人的身高小于178 cm. 又由肚脐至足底的长度大于105 cm，可得头顶至肚脐的长度大于65 cm，则该人的身高大于170 cm. 选 B
[2019·浙江卷] 设$a,b\in\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n^2+b$，$n\in\mathbf{N}^*$，则（　　） A. 当$b=\frac{1}{2}$时，$a_{10}>10$　　B. 当$b=\frac{1}{4}$时，$a_{10}>10$ C. 当$b=-2$时，$a_{10}>10$　　D. 当$b=-4$时，$a_{10}>10$	分析可知当b越大时，a_{10}越大. 四个选项中A中的b最大，当$b=\frac{1}{2}$时，$a_2\geqslant\frac{1}{2}$，$a_3\geqslant\frac{3}{4}$，$a_4\geqslant\frac{17}{16}$，$a_5\geqslant\frac{417}{256}$，$a_6>\frac{11}{4}$，$a_7>\frac{129}{16}$，$a_8>64$，所以$a_{10}>a_9>a_8>10$. 选 A
[2018·全国卷Ⅲ] 设A,B,C,D是同一个半径为4的球的球面上四点，$\triangle ABC$为等边三角形且其面积为$9\sqrt{3}$，则三棱锥D-ABC体积的最大值为（　　） A. $12\sqrt{3}$ B. $18\sqrt{3}$ C. $24\sqrt{3}$ D. $54\sqrt{3}$	等边三角形ABC的面积为$9\sqrt{3}$，显然球心不是此三角形的中心，所以三棱锥的体积最大时，三棱锥的高h应满足$h\in(4,8)$，所以$\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times4<V_{三棱锥D\text{-}ABC}<\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times8$，即$12\sqrt{3}<V_{三棱锥D\text{-}ABC}<24\sqrt{3}$. 选 B
[2019·天津卷] 已知$a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则a,b,c的大小关系为（　　） A. $a<c<b$ B. $a<b<c$ C. $b<c<a$ D. $c<a<b$	因为$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，$b=\log_{0.5}0.2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}=\log_2 5>1$，$c=0.5^{0.2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\geqslant\frac{1}{2}$，且$c=0.5^{0.2}<0.5^0=1$，所以$b>c>a$. 选 A
[2017·全国卷Ⅲ] 函数$f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的最大值为（　　） A. $\frac{6}{5}$　B. 1　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{1}{5}$	当$x=\frac{\pi}{6}$时，函数值大于1. 选 A

自测题

1. 设$a=\sqrt{2}$，$b=e^{-\pi}$，$c=\log_2 3$，则（　　）
   A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$
   C. $b<c<a$　　D. $c<b<a$
2. 已知x_1是方程$x+2^x=4$的一个根，x_2是方程$x+\log_2 x=4$的一个根，则x_1+x_2所在的区间是（　　）
   A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$
   C. $(3,5)$　　D. $(5,+\infty)$
3. 若$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=a$，$\sin\beta+\cos\beta=b$，则（　　）
   A. $a<b$　　B. $a>b$
   C. $ab<1$　　D. $ab>2$
4. 设F为抛物线$y^2=4x$的焦点，A,B,C为该抛物线上的三点，若$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|$等于（　　）
   A. 9　　B. 6
   C. 4　　D. 3

方法五　构造法

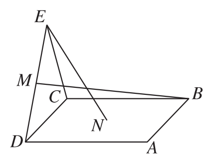
构造法是一种创造性的解题方法，它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想.利用已知条件和结论的特殊性构造函数、数列、方程或几何图形等，从而简化推理与计算过程，使较复杂的或不易求解的数学问题得到简捷解答.

构造法来源于对基础知识和基本方法的积累，需要从一般的方法原理中进行提炼概括，积极联想，横向类比，从曾经类似的问题中找到构造的灵感.

(1)使用前提：所构造的函数、方程、图形等要合理，不能超越原题的条件限制.

(2)使用技巧：对于不等式、方程、函数问题常构造出新函数，对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

(3)常见问题：比较大小，函数与导数问题，不规则的几何体问题等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅲ] 设 $f(x)$是定义域为 **R** 的偶函数,且在$(0,+\infty)$单调递减,则 (　　) A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$ B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$ C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$ D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$	根据题意可构造函数 $f(x)=-\|x\|$(或构造函数 $f(x)=-x^2$ 等都可以),代入比较即可.选 C
[2019·全国卷Ⅲ] 如图 F5-1,点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心,$\triangle ECD$ 为正三角形,平面 $ECD\perp$平面 $ABCD$,M 是线段 ED 的中点,则(　　) A. $BM=EN$,且直线 BM,EN 是相交直线 B. $BM\neq EN$,且直线 BM,EN 是相交直线 C. $BM=EN$,且直线 BM,EN 是异面直线 D. $BM\neq EN$,且直线 BM,EN 是异面直线  图 F5-1	连接 BE,BD,则在$\triangle BDE$中,BM,EN 为此三角形的两条中线,相交且不相等.选 B
[2018·全国卷Ⅱ] 在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=1$,$AA_1=\sqrt{3}$,则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 (　　) A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$	在长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的面 ABB_1A_1 的一侧再补填一个完全一样的长方体 ABC_2D_2-$A_1B_1B_2A_2$,研究$\triangle AB_2D_1$ 即可.选 C
[2015·全国卷Ⅱ] 设函数 $f'(x)$是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$的导函数,$f(-1)=0$,当$x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 (　　) A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$	根据题意构造新函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$,求导研究函数 $g(x)$的性质,进而得到答案.选 A

自测题

1. 已知 $0<b<a<1$,则在 a^b,b^a,a^a,b^b 中最大的是 (　　)

   A. b^a　　B. a^a

   C. a^b　　D. b^b

2. 已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的增函数,$f(x)+2>f'(x)$,$f(0)=1$,则不等式 $\ln[f(x)+2]-\ln 3>x$ 的解集为 (　　)

   A. $(-\infty,0)$

   B. $(0,+\infty)$

   C. $(-\infty,1)$

   D. $(1,+\infty)$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60°$,则$|\boldsymbol{c}|$的最大值为 (　　)

   A. 2

   B. $\sqrt{3}$

   C. $\sqrt{2}$

   D. 1

4. 已知正四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为 $8\sqrt{6}\pi$,则这个正四面体的表面积为________.

思想篇

数学思想方法应用

思想一　函数与方程思想

函数思想是指用函数的观点、方法去分析问题、转化问题和解决问题.如求数列中的项或最值、不等式中的参量、解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，都可利用函数思想，转化为函数问题.

方程思想是从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为方程或方程组去分析问题和解决问题.如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式中的系数等问题.

示例	解题关键
[2019·全国卷Ⅲ] 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前4项和为15,且$a_5=3a_3+4a_1$,则$a_3=$　(　　) A. 16　　B. 8 C. 4　　D. 2	先建立关于首项a_1与公比q的方程组,求出a_1,q,再求a_3.选C
[2018·浙江卷] 已知a_1,a_2,a_3,a_4成等比数列,且$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$.若$a_1>1$,则　(　　) A. $a_1<a_3,a_2<a_4$ B. $a_1>a_3,a_2<a_4$ C. $a_1<a_3,a_2>a_4$ D. $a_1>a_3,a_2>a_4$	结合$a_1>1,a_1,a_2,a_3,a_4$成等比数列,判断四项的大小关系,可通过判断$q>1,q<-1,0<q<1,-1<q<0$中哪些成立来实现. 当假设$0<q<1$成立时,可利用函数与方程思想,判断已知条件是否成立,即判断函数$f(x)=(1+q+q^2+q^3)x-\ln x-\ln(1+q+q^2)(x>1)$在$(1,+\infty)$上是否有零点,进而得到结论.选B
[2018·天津卷] 已知$a>0$,函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a,x\leqslant 0,\\-x^2+2ax-2a,x>0.\end{cases}$若关于$x$的方程$f(x)=ax$恰有2个互异的实数解,则$a$的取值范围是________.	根据x的范围分段处理方程$f(x)=ax$,利用韦达定理,通过研究方程的根得出a的范围.答案:$(4,8)$
[2019·全国卷Ⅱ] $\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$b=6,a=2c,B=\frac{\pi}{3}$,则$\triangle ABC$的面积为________.	利用余弦定理建立关于c的方程,求出c,再求面积.答案:$6\sqrt{3}$
[2018·浙江卷] 已知点$P(0,1)$,椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=m(m>1)$上两点A,B满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,则当$m=$________时,点$B$横坐标的绝对值最大.	由$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,得$A,P,B$三点共线,设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$x_1=-2x_2$,设直线$AB$的方程为$y=kx+1$,代入椭圆方程,得到关于$x$的一元二次方程,利用韦达定理将$\|x_2\|$用$k$表示,结合基本不等式可得当$4k^2=1$时,$\|x_2\|$取到最大值2,再利用$x_1x_2=-2x_2^2$求出$m$的值.答案:5

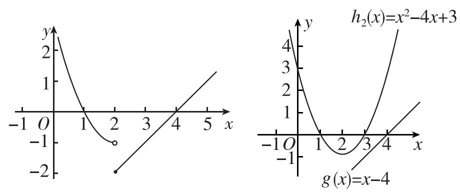
自测题

1. 若$e^a+\pi^b\geqslant e^{-b}+\pi^{-a}$,e为自然对数的底数,则有　(　　)
   A. $a+b\leqslant 0$
   B. $a-b\geqslant 0$
   C. $a-b\leqslant 0$
   D. $a+b\geqslant 0$
2. 已知数列$\{a_n\}$满足$tS_n=n^2-12n$,其中S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,若$a_1+a_3+a_5=42,a_2+a_4=28$,则当$S_n$取得最大值时,$n=$　(　　)
   A. 7
   B. 6
   C. 5
   D. 4
3. 已知点P是圆$C:x^2+(y-2)^2=1$上的动点,点Q是椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$上的动点,则$|PQ|$的最大值为　(　　)
   A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}+1$
   B. $\sqrt{13}+1$
   C. $2\sqrt{3}+1$
   D. 4
4. 已知函数$f(x)=\frac{x\ln x+a}{x+1}$只有一个零点,则$a$的取值范围为　(　　)
   A. $\left(-\frac{1}{e},0\right)$
   B. $\left[-\frac{1}{e},0\right]$
   C. $(-\infty,0]\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$
   D. $(-\infty,0)\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$

思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程的根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

示例	解题关键
[2019·全国卷Ⅰ] 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $\|\boldsymbol{a}\|=2\|\boldsymbol{b}\|$,且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　(　　) A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$	根据 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$ 可作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 为矩形 $OBCA$ 的对角线 $\overrightarrow{OC}$,易知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.选 B
[2019·全国卷Ⅰ] 关于函数 $f(x)=\sin\|x\|+\|\sin x\|$ 有下述四个结论： ① $f(x)$ 是偶函数；　② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增； ③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点；　④ $f(x)$ 的最大值为 2. 其中所有正确结论的编号是　(　　) A. ①②④　B. ②④　C. ①④　D. ①③	易知函数 $f(x)$ 为偶函数且 $f(x)$ 的最大值为 2,只需画出函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的图像,根据图像即可判断②③是否正确.选 C
[2018·全国卷Ⅰ] 已知双曲线 C:$\frac{x^2}{3}-y^2=1$,O 为坐标原点,F 为 C 的右焦点,过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M,N.若△OMN 为直角三角形,则 $\|MN\|=$　(　　) A. $\frac{3}{2}$　B. 3　C. $2\sqrt{3}$　D. 4	不妨设∠$OMF=90°$,由渐近线方程及图形可知,$\|OM\|=\|OF\|\cdot\cos 30°$,$\|MN\|=\|OM\|\cdot\tan 60°$.选 B
[2018·浙江卷] 已知 $\lambda\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\begin{cases}x-4,x\geqslant\lambda,\\x^2-4x+3,x<\lambda.\end{cases}$ 当 $\lambda=2$ 时,不等式 $f(x)<0$ 的解集是________.若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点,则 λ 的取值范围是________.	(1)当 $\lambda=2$ 时,函数 $f(x)$ 的图像如图 S2-1①所示,数形结合可得 $f(x)<0$ 的解集;(2)在同一平面直角坐标系中,分别作出函数 $g(x)=x-4$,$h(x)=x^2-4x+3$ 的图像,如图②所示,数形结合可得函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点时,λ 的取值范围. 答案:(1,4)　(1,3]∪(4,+∞)  ①　② 图 S2-1
[2017·全国卷Ⅱ] 已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形,P 为平面 ABC 内一点,则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是　(　　) A. -2　B. $-\frac{3}{2}$　C. $-\frac{4}{3}$　D. -1	建立平面直角坐标系,将各点、各向量用坐标表示出来,通过运算求最小值.选 B

自测题

1. 已知△ABC 为直角三角形,$AC=BC=2$,点 D 为斜边 AB 的中点,点 P 是线段 CD 上的动点,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为　(　　)

   A. -2　B. $-\frac{1}{4}$

   C. $-\frac{1}{2}$　D. 0

2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数,且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,则不等式 $f(\log_4 x)>1$ 的解集为　(　　)

   A. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(\sqrt{2},+\infty)$　B. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　D. $(2,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\geqslant a,\\-x,x<a,\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 存在零点,则实数 a 的取值范围是　(　　)

   A. $(-\infty,0)$　B. $(-\infty,1)$

   C. $(1,+\infty)$　D. $(0,+\infty)$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2,若双曲线右支上存在一点 M,使 $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$($O$ 为坐标原点),且 $\|\overrightarrow{F_1M}\|=t\|\overrightarrow{F_2M}\|$,则实数 t 的值为　(　　)

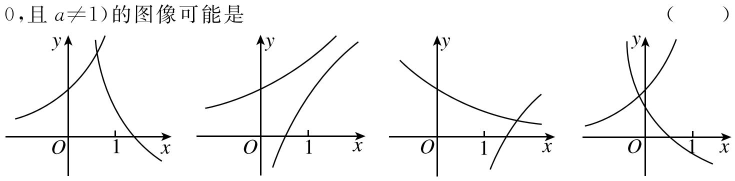
   A. 2　B. $2\sqrt{2}$

   C. 3　D. $\sqrt{3}$

思想三 分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略.使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，不重不漏，分类标准统一；三是明确分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种：1.由概念引起的分类讨论；2.由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；3.由数学运算引起的分类讨论；4.由图形的不确定性引起的分类讨论；5.由参数的变化引起的分类讨论.

示例	解题关键
[2018·浙江卷] 从1,3,5,7,9中任取2个数字,从0,2,4,6中任取2个数字,一共可以组成________个没有重复数字的四位数.(用数字作答)	分所选的4个数字中没有0与有0两种情况讨论.答案:1260
[2019·浙江卷] 在同一直角坐标系中,函数 $y=\frac{1}{a^x}$,$y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$($a>0$,且 $a\neq1$)的图像可能是 ( )  A B C D 图 S3-1	分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况进行讨论,判定函数图像.选D
[2017·全国卷Ⅰ] 设 A,B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点.若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120°$,则 m 的取值范围是 ( ) A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$ B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$ C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$ D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$	分焦点在 x 轴上和焦点在 y 轴上两种情况讨论.选A
[2019·天津卷] 已知 $a\in\mathbf{R}$,设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\leq1,\\ x-a\ln x, & x>1.\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geq0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则 a 的取值范围为 ( ) A. $[0,1]$ B. $[0,2]$ C. $[0,e]$ D. $[1,e]$	由选项可知 $a\geq0$,所以可分 $0\leq a\leq1$ 和 $a>1$ 两种情况讨论.选C

自测题

1. 已知双曲线 E 的渐近线方程是 $y=\pm2x$,则 E 的离心率为 ( )

A. $\sqrt{2}$ 或 2

B. $\sqrt{5}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. 有7名大学生(4男3女)分成两组进行夜跑,到达终点再会合,若要求女生不能单独成组,且每组最少2人,则不同的分组方法共有 ( )

A. 52种

B. 55种

C. 104种

D. 110种

3. 若 $a>0$ 且 $a\neq1$,则“$a^x>a^y$”是“$\log_a|x|>\log_a|y|$”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

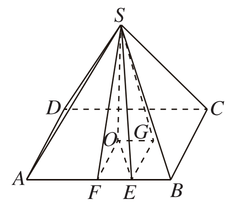
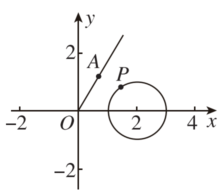
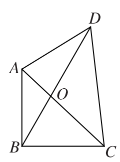
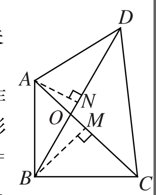
D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<1,\\ x-2, & x\geq1,\end{cases}$ 若 $f(5a-2)>f(2a^2)$,则实数 a 的取值范围为________.

思想四 转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时,采用某种手段将问题转化,使问题得以解决的一种思维策略,其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题,将较难的问题化归为较简单的问题,将未能解决的问题化归为已经解决的问题.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在：将抽象函数问题转化为具体函数问题，立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题，“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维问题，空间与平面的转化，相等问题与不等问题的转化等.

示例	解法关键
[2018・浙江卷] 已知四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，E 是线段 AB 上的点(不含端点). 设 SE 与 BC 所成的角为 θ_1，SE 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ_2，二面角 $S\text{-}AB\text{-}C$的平面角为 θ_3，则 (　　) A. $\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\theta_3$　　B. $\theta_3\leqslant\theta_2\leqslant\theta_1$ C. $\theta_1\leqslant\theta_3\leqslant\theta_2$　　D. $\theta_2\leqslant\theta_3\leqslant\theta_1$	过 S 作 $SO\perp$ 平面 $ABCD$，与平面 $ABCD$ 交于点 O，连接 OE，取 AB 的中点 F，连接 OF，SF，作 $GE\parallel BC$，$OG\perp GE$，连接 SG，如图 S4-1 所示. 将角的大小关系转化为角的正弦与正切的大小关系，根据 $\sin\theta_2=\dfrac{SO}{SE}$，$\sin\theta_3=\dfrac{SO}{SF}$，$\tan\theta_1=\dfrac{SG}{GE}$，$\tan\theta_3=\dfrac{SO}{OF}$进行比较. 选 D  图 S4-1
[2018・浙江卷] 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{e}$ 是平面向量，$\boldsymbol{e}$ 是单位向量. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$，则 $\lvert\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rvert$的最小值是 (　　) A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{3}+1$ C. 2　　D. $2-\sqrt{3}$	如图 S4-2，建立平面直角坐标系，设 $\boldsymbol{e}=(1,0)$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为坐标原点，终点在射线 $y=\sqrt{3}x(x>0)$ 上. 设向量$\boldsymbol{b}=(x,y)$，则 $x^2+y^2-4x+3=0$，即$(x-2)^2+y^2=1$. 将代数问题转化为几何问题，$\lvert\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rvert$表示圆上任意一点 P 与射线 $y=\sqrt{3}x(x>0)$上任意一点 A 之间的距离. 选 A  图 S4-2
[2017・浙江卷] 如图 S4-3，已知平面四边形 $ABCD$，$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，AC 与 BD 交于点 O，记 $I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则 (　　)  图 S4-3 A. $I_1<I_2<I_3$ B. $I_1<I_3<I_2$ C. $I_3<I_1<I_2$ D. $I_2<I_1<I_3$	利用转化与化归思想，将 I_1，I_2，I_3 的大小关系转化为边与角的大小关系. 易知 $I_1<0$，$I_2>0$，$I_3<0$. 如图 S4-4，过点 B 作 $BM\perp AC$ 于 M，过点 A 作 $AN\perp BD$ 于 N. 三角形 ABD 与三角形 ABC 均为等腰三角形，所以 $BN=ND$，$AM=MC$，所以$\lvert\overrightarrow{OA}\rvert<\lvert\overrightarrow{OC}\rvert$，$\lvert\overrightarrow{OB}\rvert<\lvert\overrightarrow{OD}\rvert$，$\angle AOB=\angle COD>\dfrac{\pi}{2}$，从而比较 I_1 与 I_3 的大小关系. 选 C  图 S4-4
[2019・全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-e^{ax}$. 若$f(\ln 2)=8$，则$a=$________.	因为 $\ln 2>0$，所以 $f(\ln 2)$需通过 $f(x)$是奇函数转化为 $-f(-\ln 2)$，这样就可以代入已知区间上的函数解析式求解. 答案：-3
[2019・全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在$[0,2\pi]$的零点个数为 (　　) A. 2　　B. 3 C. 4　　D. 5	将函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x=0$ 在$[0,2\pi]$上的零点个数转化为函数$h(x)=2\sin x$ 的图像与$g(x)=\sin 2x$ 的图像在$[0,2\pi]$上的交点个数. 选 B

自测题

1. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+4)=f(x)$，当 $x\in(0,2)$时，$f(x)=x^2+\ln x$，则 $f(2019)=$ (　　)
A. -1　　B. 0
C. 1　　D. 2

2. 过原点 O 的直线 l 与椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于 M，N 两点，P 是椭圆 C 上异于 M，N 的任一点. 若直线 PM，PN 的斜率之积为$-\dfrac{1}{3}$，则椭圆 C 的离心率为 (　　)
A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. 已知正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AA_1=4$，若点 P 从点 A 出发，沿着正三棱柱的表面，经过棱 A_1B_1 运动到点 C_1，则点 P 运动的最短路程为________.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\lvert\ln x\rvert, x>0,\\ 2-x^2, x\leqslant 0,\end{cases}$若函数 $g(x)=f(x)-kx$ 有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是________.

5. 已知点 P 是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，过点 P 的一条直线与圆 $x^2+y^2=a^2+b^2$ 相交于 A，B 两点，若存在点 P，使得$\lvert PA\rvert\cdot\lvert PB\rvert=a^2-b^2$，则椭圆的离心率的取值范围是________.

自习篇

集合、常用逻辑用语、复数、不等式与线性规划

自习一　集合

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|y=\sqrt{2-x^2}\}$，则 $A\cap B=$　(　　)

A. $\{-1,1\}$

B. $\{0\}$

C. $\{-1,0,1\}$

D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 若全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\cap(\complement_U B)=$　(　　)

A. $\{1\}$

B. $\{4\}$

C. $\{1,4,5\}$

D. $\{1,4\}$

3. 设集合 $M=\{x|-1\leqslant x<3\}$，$N=\{x|\log_{\frac{1}{2}}x<0\}$，则 $M\cup N=$　(　　)

A. $[-1,+\infty)$

B. $(-1,+\infty)$

C. $(-1,3)$

D. $(0,3)$

4. 集合 $M=\{y\in\mathbf{N}|y=-x^2+5,x\in\mathbf{Z}\}$ 的真子集的个数是　(　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

5. 已知集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|ax=1\}$，若 $B\subseteq A$，则由实数 a 的所有可能取值组成的集合为　(　　)

A. $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{0,1,\frac{1}{2}\right\}$

D. $\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$

6. 已知集合 $A=\{1,2\}$，集合 $B=\{0,2\}$，设集合 $C=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$，则下列结论中正确的是　(　　)

A. $A\cap C=\varnothing$

B. $A\cup C=C$

C. $B\cap C=B$

D. $A\cup B=C$

【考场点拨】

解决集合问题时要注意以下几点：(1)集合中元素的互异性；(2)不能忽略空集；(3)注意端点的取值；(4)理解代表元素的意义，如题 4 为点集，其他各题均为数集；(5)若 $A\subseteq B$，则 $A=B$ 也成立.

自习二　常用逻辑用语

1. 已知直线 m,n 和平面 α，$m\subset\alpha$，则“$n\not\subset\alpha$”是“n 与 m 异面”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. [2019·浙江卷] 设 $a>0,b>0$，则“$a+b\leqslant4$”是“$ab\leqslant4$”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. “$2^a>2^b$”是“$\ln a>\ln b$”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 在△ABC 中，“$\frac{\pi}{4}<A<\pi$”是“$\sin A-\cos A>1$”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 α,β 是第一象限角，则“$\sin\alpha>\sin\beta$”是“$\cos\alpha<\cos\beta$”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n，则“$d>0$”是“S_n 递增”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【考场点拨】

求解简易逻辑问题的易失分点：(1)“A 是 B 的充分条件”与“A 的充分条件是 B”是不同的概念；(2)命题的否定与否命题是有区别的，“命题的否定”即“非 p”，只是否定命题 p 的结论；(3)全称或特称命题的否定，要否定结论并改变量词；(4)复合命题的真假判断依赖真值表.

自习三　复数

1. 已知 i 为虚数单位，$z=\frac{2+i}{2-i}$，则 z 的虚部为　(　　)

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{4}{5}$

D. $-\frac{4}{5}i$

2. 设 i 是虚数单位，则复数 $i^5-\frac{3}{i}=$　(　　)

A. $-4i$
B. $-2i$
C. $2i$
D. $4i$

3. 若复数$\frac{a+i}{(2-i)^2}$(i 为虚数单位)是纯虚数，则实数 a 的值为　(　　)

A. 0

B. $-\frac{4}{3}$

C. $-\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

4. 已知复数 z 满足 $z\cdot i=z-i$(i 为虚数单位)，则$|z|=$　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

5. 已知 i 是虚数单位，则复数$\frac{i}{2+i}$的共轭复数在复平面内对应的点位于　(　　)

A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限

6. 复数 z 满足$|z-i|=|z+3i|$，则$|z|$　(　　)

A. 有最小值 1，无最大值
B. 有最大值 1，无最小值
C. 恒等于 1
D. 无最大值，也无最小值

【考场点拨】

(1)复数运算的重点是除法运算，其关键是进行分母实数化.

(2)对一些常见的运算，如$(1\pm i)^2=\pm 2i$，$\frac{1+i}{1-i}=i$，$\frac{1-i}{1+i}=-i$等要熟记.

(3)利用复数相等 $a+bi=c+di$ 列方程时，注意 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 的前提条件.

自习四　不等式与线性规划

1. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，下列说法正确的是　(　　)

A. 若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$

B. 若 $a>b,c<d$，且 $c,d\neq 0$，则$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

C. 若 $a>b$，则 $a^3>b^3$

D. 若 $a>b,c>0$，则 $a^c>b^c$

2. 设实数 x,y 满足$\begin{cases}x-3y+5\geqslant 0,\\x-y-1\leqslant 0,\\x+2\geqslant 0,\end{cases}$则 $z=x-2y$ 的最小值是　(　　)

A. -2
B. -4
C. 0
D. 4

3. 已知实数 x,y 满足$\begin{cases}x\geqslant 1,\\x-y\leqslant 0,\\x+2y-6\leqslant 0,\end{cases}$则 $z=x^2+y^2$ 的最大值等于　(　　)

A. 2
B. $2\sqrt{2}$
C. 4
D. 8

4. 变量 x,y 满足约束条件$\begin{cases}y\leqslant 2,\\x+y\geqslant 1,\\x-y\leqslant 1,\end{cases}$则目标函数 $z=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+y}$的最大值是________.

5. 不等式组$\begin{cases}y\leqslant x,\\x+y\leqslant 1,\\y\geqslant a\end{cases}$表示的平面区域的面积为$\frac{9}{4}$，则 $a=$________；若 $P(x,y)$在该平面区域内，则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

6. 若变量 x,y 满足不等式组$\begin{cases}x-y+2\geqslant 0,\\x-5y+10\leqslant 0,\\x+y-8\leqslant 0,\end{cases}$则 $z=\frac{y}{x+2}$的最大值为________.

【考场点拨】

在解线性规划问题时，一定要明白目标函数的几何含义，尤其是表示截距时，系数的正负要注意.

01 模块一

函数与导数

第 1 讲　函数的图像与性质

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在$[-\pi,\pi]$的图像大致为　(　　)

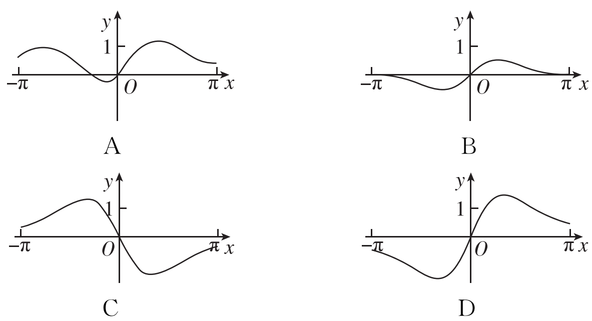


图 M1-1-1

(2)[2018·浙江卷] 函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图像可能是　(　　)

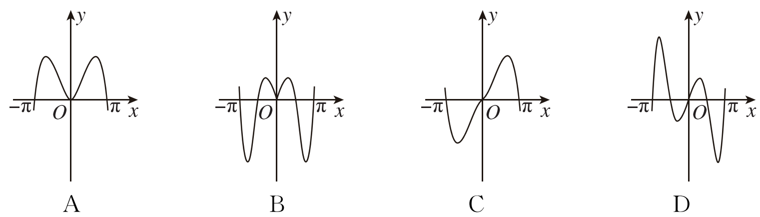


图 M1-1-2

[试做]

方法　函数图像识图问题

1. 利用函数性质(奇偶性、周期性、对称性等)确定函数图像的对称轴或对称中心;

2. 利用特殊点排除一些错误选项;

3. 利用 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$,或 $x\to x_0$ 来观察函数值的变化规律,确定图像的局部特征.

注:利用导数也可以判断函数的单调性.

2. (1)[2018·全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数,满足$f(1-x)=f(1+x)$.若$f(1)=2$,则$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$　(　　)

A. -50　　B. 0　　C. 2　　D. 50

(2)[2018·江苏卷] 函数 $f(x)$满足 $f(x+4)=f(x)(x\in\mathbf{R})$,且在区间$(-2,2]$上,$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2},0<x\leqslant 2,\\ \left|x+\dfrac{1}{2}\right|,-2<x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(f(15))$的值为________.

[试做]

结论　函数的周期性

1. 若函数满足 $f(x+T)=f(x)$,由函数周期性的定义可知 T 是函数 $f(x)$的一个周期;

2. 若函数满足 $f(x+a)=-f(x)$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期;

3. 若函数满足 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期;

4. 若函数满足 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期.

3. (1)[2017・浙江卷] 若函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 在区间[0,1]上的最大值是 M,最小值是 m,则 $M-m$ (　　)

A. 与 a 有关,且与 b 有关　　B. 与 a 有关,但与 b 无关

C. 与 a 无关,且与 b 无关　　D. 与 a 无关,但与 b 有关

(2)[2019・全国卷Ⅲ] 设 $f(x)$ 是定义域为 **R** 的偶函数,且在 $(0,+\infty)$ 单调递减,则 (　　)

A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$　　B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$　　D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$

(3)[2019・全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$ 是奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)=-e^{ax}$. 若 $f(\ln 2)=8$,则 $a=$________.

[试做]

结论　函数的单调性与奇偶性

1. 增函数+增函数→增函数;
减函数+减函数→减函数;
增函数−减函数→增函数;
减函数−增函数→减函数.
2. 复合函数单调性判断:同增异减.
3. 两函数的积的奇偶性判断:
(1)两个奇函数的积是偶函数,两个偶函数的积是偶函数;
(2)一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数;
(3)一个奇函数或偶函数的绝对值是偶函数.

4. [2017・全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减,且为奇函数. 若 $f(1)=-1$,则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 (　　)

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[0,4]$　　D. $[1,3]$

[试做]

方法　抽象函数不等式

1. 解抽象函数不等式的依据是单调性的定义;
2. 应将抽象函数不等式变形为类似于 $f(x_1)>f(x_2)$ 的形式,结合单调性转化为常规不等式 $x_1>x_2$(或 $x_1<x_2$).

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　函数的概念与表示

例 1 (1)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2+1}{x},x<0,\\ 2^{x+1},x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=x^2-x-2$,设 b 为实数,若存在实数 a,使得 $g(b)+f(a)=2$ 成立,则 b 的取值范围为 (　　)

A. $[-1,2]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

C. $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$　　D. $\left(-\frac{3}{2},4\right]$

(2)已知函数 $f(x)=\log_2 x$,$g(x)=2x+a$,若存在 $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-5,0]$　　B. $(-\infty,-5]\cup[0,+\infty)$

C. $(-5,0)$　　D. $(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集,值域等于各段函数值域的并集.

(2)对于函数 $f(x)$,$g(x)$,若存在 $x_1,x_2\in D$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,则转化为在集合 D 上函数 $f(x)$,$g(x)$ 的值域 A,B 的交集非空,即 $A\cap B\neq\varnothing$;若存在 $x_1,x_2\in D$,使得 $f(x_1)>g(x_2)$,则转化为 $f(x)_{\max}>g(x)_{\min}$;若对任意 $x_1,x_2\in D$,$f(x_1)>g(x_2)$ 恒成立,则转化为 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$.

【自我检测】

1. 已知函数 $f(x)=\ln(4-x)$,则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域为 (　　)

A. $(-\infty,1)\cup(1,8)$　　B. $(-\infty,1)\cup(1,2)$

C. $(0,1)\cup(1,8)$　　D. $(0,1)\cup(1,2)$

2. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+6(x\leqslant 0),\\ -x+6(x>0),\end{cases}$ 则不等式 $f(x)<f(-1)$ 的解集是 (　　)

A. $(-3,-1)\cup(3,+\infty)$

B. $(-3,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(-1,3)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x<1,\\ -x^2+1,x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f[f(2)]=$________,$f(x)$ 的值域为________.

4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x-a)=x^3+1$,且对任意实数 x 都有 $f(x)+f(2-x)=2$,则 $f(0)$ 的值为________.

小题 2　函数的性质及应用

例 2 (1)设 $f(x)=\cos\dfrac{x}{5}$,$a=f\left(\log_e\dfrac{1}{\pi}\right)$,$b=f\left(\log_\pi\dfrac{1}{e}\right)$,$c=f\left(\log_{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{\pi^2}\right)$,则 a,b,c 的大小关系是 (　　)

A. $a>b>c$　B. $b>c>a$　C. $b>a>c$　D. $c>a>b$

(2)已知函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+6)+f(x)=0$,$y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称,且 $f(-3)=4$,则 $f(2019)=$ ( )

A. 0 B. -4 C. -8 D. -16

[听课笔记]

【考场点拨】

高考常考函数几个性质的应用:

(1)奇偶性:具有奇偶性的函数在关于原点对称的区间上其图像、函数值、解析式和单调性联系密切,研究问题时可以转化到部分(一般为一半)区间上研究,注意偶函数常用结论 $f(x)=f(|x|)$,也需注意试题中奇函数的性质不是直接给出的情况;

(2)单调性:可以比较大小、求函数最值、解不等式、证明方程根的唯一性;

(3)周期性:利用周期性可以转化函数的解析式、图像和性质,把不在已知区间上的问题转化到已知区间上求解;

(4)对称性:常围绕对称中心设置试题背景,利用对称中心的性质简化所求问题.

【自我检测】

1. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\begin{cases}2^x,x>1,\\2x,0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $\dfrac{f(-2)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=$ ( )

A. 4 B. $\dfrac{1}{4}$

C. -4 D. $-\dfrac{1}{4}$

2. 如果对任意的实数 x,函数 $f(x)$ 都满足 $f(x)=f(1-x)$,且当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)=\log_2(3x-1)$,那么函数 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的最大值为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且 $f(x+5)=f(x-3)$,如果当 $x\in[0,4)$ 时,$f(x)=\log_2(x+2)$,那么 $f(766)=$ ( )

A. 3 B. -3

C. -2 D. 2

4. 已知对任意实数 x,函数 $f(x)$ 都满足 $f(-x)=f(x)$,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=e^x-\sin x$,若实数 a 满足 $f(\log_2 a)<f(1)$,则 a 的取值范围是________.

小题 3 函数的图像及应用

例 3 (1)[2019·全国卷Ⅲ] 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图像大致为 ( )

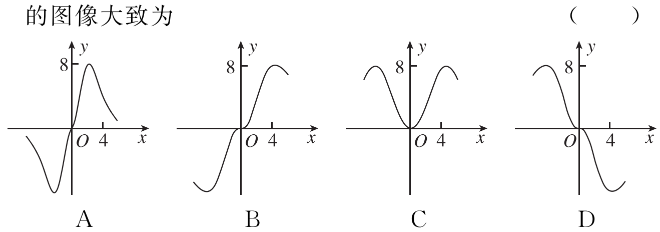


图 M1-1-3

(2)已知 $f(x)=\dfrac{1-3^x}{1+3^x}\cos(2x+\alpha)$,$x\in\mathbf{R}$,则当 $\alpha\in[0,\pi]$ 时,$f(x)$ 的图像不可能是 ( )

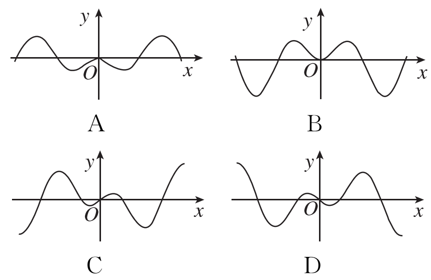


图 M1-1-4

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)确定函数图像的主要方法是利用函数的性质,如定义域、奇偶性、单调性等,特别是利用一些特征点排除不合要求的图像.(2)函数图像的应用主要体现为数形结合思想,借助于函数图像的特点和变化规律,求解有关不等式恒成立、最值、交点、方程的根等问题.求解两个函数图像在给定区间上的交点个数问题时,可以先画出已知函数完整的图像,再观察.

【自我检测】

1. 函数 $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\cos x$ 在 $[-3,0)\cup(0,3]$ 上的图像大致为 ( )

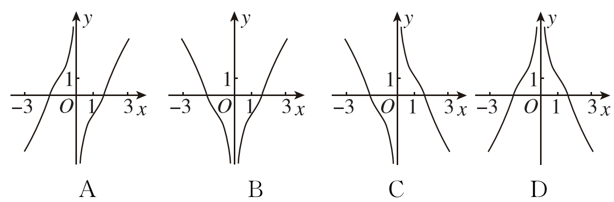


图 M1-1-5

2. 如图 M1-1-6 所示的函数图像对应的函数解析式可能是 ( )

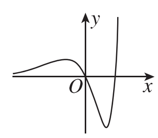


图 M1-1-6

A. $y=2^x-x^2-1$ B. $y=2x\sin x$

C. $y=\dfrac{x}{\ln x}$ D. $y=(x^2-2x)e^x$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2,x\leqslant 0,\\|\log_2 x|,x>0,\end{cases}$ 若方程 $f(x)=a$ 有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4,且 $x_1<x_2<x_3<x_4$,则 $x_3(x_1+x_2)+\dfrac{1}{x_3^2x_4}$ 的取值范围为 ( )

A. $(-1,+\infty)$ B. $(-1,1]$

C. $(-\infty,1)$ D. $[-1,1)$

请完成 限时集训(一)

第 2 讲　基本初等函数、函数与方程

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019・全国卷Ⅱ] 若 $a>b$,则 (　　)

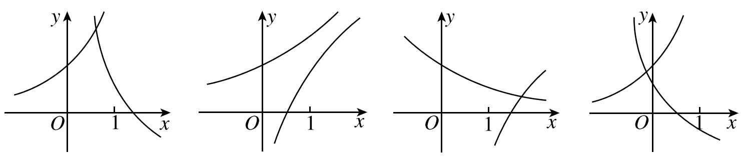
A. $\ln(a-b)>0$　B. $3^a<3^b$　C. $a^3-b^3>0$　D. $|a|>|b|$

(2)[2018・全国卷Ⅲ] 设 $a=\log_{0.2}0.3$,$b=\log_2 0.3$,则 (　　)

A. $a+b<ab<0$　B. $ab<a+b<0$

C. $a+b<0<ab$　D. $ab<0<a+b$

(3)[2019・浙江卷] 在同一直角坐标系中,函数 $y=\frac{1}{a^x}$,$y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$($a>0$,且 $a\neq1$)的图像可能是 (　　)



A　B　C　D

图 M1-2-1

[试做]

方法　指数、对数函数图像的判断

1. 通过底数 a 的不同取值范围对指数、对数函数单调性的判断;
2. 考虑指数、对数函数图像经过的一些特殊点.

2. [2017・全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$有唯一零点,则 $a=$ (　　)

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 1

[试做]

方法　含参函数有唯一零点的问题

1. 关键一:观察函数图像是否具有某种对称性;
关键二:求出 $f'(x)$,根据 $f(x)$的单调性画出函数 $f(x)$的大致图像;
关键三:分离参数,注意验证 $x=0$ 是否是零点;
关键四:数形结合法,对解析式进行变形,转化为两个函数的图像有一个交点.
2. 含参数的问题注意分类讨论.

3. (1)[2019・浙江卷] 设 $a,b\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\begin{cases}x,x<0,\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax,x\geqslant0.\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点,则 (　　)

A. $a<-1,b<0$　B. $a<-1,b>0$

C. $a>-1,b<0$　D. $a>-1,b>0$

(2)[2018・浙江卷] 已知 $\lambda\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\begin{cases}x-4,x\geqslant\lambda,\\ x^2-4x+3,x<\lambda.\end{cases}$ 当 $\lambda=2$ 时,不等式 $f(x)<0$ 的解集是________.若函数 $f(x)$恰有 2 个零点,则 λ 的取值范围是____________.

(3)[2018・全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\leqslant0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$.若 $g(x)$存在 2 个零点,则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,0)$　B. $[0,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　D. $[1,+\infty)$

[试做]

方法　根据函数零点(方程的根)求参

1. 直接法:直接根据题设条件构建关于参数的不等式,再通过解不等式确定参数范围;
2. 分离参数法:先将参数分离,再转化成求函数值域问题加以解决;
3. 数形结合法:先对解析式变形,转化为两函数图像的交点问题,在同一平面直角坐标系中画出函数的图像,数形结合求解.

K 考点考法探究

核心考点全面提升 题型、考法、思维强化

小题1 基本初等函数的图像与性质

例1 (1)[2019·天津卷] 已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a<c<b$ B. $a<b<c$

C. $b<c<a$ D. $c<a<b$

(2)设函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$，则使 $f(2x)>f(x+1)$ 成立的 x 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1)$

B. $(1,+\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$

D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

基本初等函数的图像与性质是解决所有函数问题的基础，并且要掌握由基本初等函数所构成的组合函数或复合函数的单调性、奇偶性等的一些判断方法.

【自我检测】

1. 已知 $a=2^{1.2}$，$b=2\log_5 2$，$c=\ln\frac{1}{3}$，则 ( )

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$

C. $b>a>c$ D. $b>c>a$

2. 若函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像关于原点对称，则 ( )

A. $g(x)=\log_2(1-x)$

B. $g(x)=-\log_2(x+1)$

C. $g(x)=-\log_2(x-1)$

D. $g(x)=-\log_2(1-x)$

3. 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为 ( )

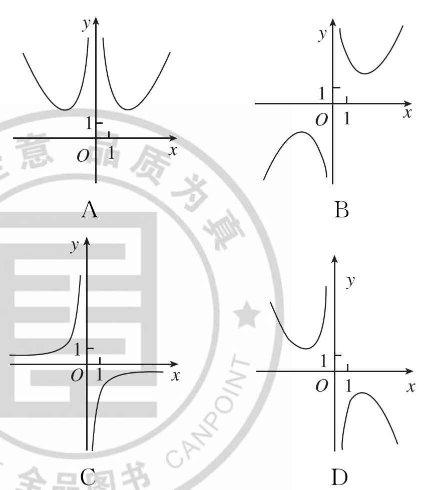


图 M1-2-2

4. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}-\sqrt[3]{x^2}$，若 $f(2a-1)>f(3)$，则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-1,2)$

C. $(2,+\infty)$

D. $(-\infty,2)$

小题2 函数的零点

角度1 涉及到函数性质的零点问题

例2 (1)已知函数 $f(x)=\ln x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+a$ 有唯一的零点 x_0，且 $x_0\in(2,3)$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{1}{4}-\ln 3,\frac{1}{2}-\ln 2\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}-\ln 3,\frac{1}{4}-\ln 2\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}+\ln 2,\frac{1}{4}+\ln 3\right)$

D. $\left(\frac{1}{4}+\ln 2,\frac{1}{3}+\ln 3\right)$

(2)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+2)=f(-x)$. 当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x-1$，则函数 $g(x)=(x-2)f(x)-1$ 在区间 $[-3,6]$ 上的所有零点之和为 ( )

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

[听课笔记]

【考场点拨】

与函数性质有关的零点问题，一般有两种类型：一是函数在定义域内是单调函数，这样的函数最多只有一个零点，可以利用零点存在性定理求解；二是与单调性、周期性、奇偶性、对称性等性质相结合，一般采用数形结合法，即把函数的零点问题等价地转化为两个函数图像的交点问题，通过判断交点的个数得出函数零点的个数，或根据零点的个数求参数.

【自我检测】

1. 设方程 $\lg(x-1)+x-3=0$ 的根为 x_0，$[x_0]$ 表示不超过 x_0 的最大整数，则 $[x_0]=$ ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+\pi)=f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=\sin x$，则函数 $y=f(x)-\lg|x|$ 的零点个数是 ( )

A. 12 B. 10 C. 6 D. 5

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)+f(3-x)=0$，且 $f(1)\neq 0$，若函数 $g(x)=-x^6+f(1)\cdot\cos 4x-3$ 有唯一的零点，则 $f(2019)=$ ( )

A. 1 B. -1 C. -3 D. 3

角度 2　复合函数或分段函数中的零点问题

例3　(1)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, x=2,\\ \log_a|x-2|+1, x\neq 2\end{cases}(a>1)$，若函数 $g(x)=[f(x)]^2+bf(x)+c$ 有三个不同的零点 x_1,x_2,x_3，则 $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=$　　(　　)

A. 12　　B. 11

C. 6　　D. 3

(2)已知 $f(x)=x^2-2x+c$，$f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)](n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$，若函数 $y=f_n(x)-x(n\in\mathbf{N}^*)$不存在零点，则 c 的取值范围是　　(　　)

A. $c<\frac{1}{4}$　　B. $c\geqslant\frac{3}{4}$

C. $c>\frac{9}{4}$　　D. $c\leqslant\frac{9}{4}$

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)已知分段函数的零点的个数求参数的取值范围或讨论零点性质时，要根据各段函数图像的特点进行判断；(2)有关复合函数 $g[f(x)]$的零点问题，内层函数 $f(x)$的值域是关键，一般用换元法设 $t=f(x)$转化为 $y=g(t)$进行求解.

【自我检测】

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1), x>1,\\ 2^{x-1}-1, x\leqslant 1,\end{cases}$则 $f(x)$的零点个数为　　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

2. 若函数 $f(x)=2^{|x|}-k$ 存在零点，则实数 k 的取值范围是　　(　　)

A. $k<0$　　B. $k\geqslant 0$

C. $k<1$　　D. $k\geqslant 1$

3. 若函数 $f(x)=e^{-x}-\ln(x+a)$在$(0,+\infty)$上存在零点，则实数 a 的取值范围为　　(　　)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　B. $(-\infty,e)$

C. $\left(-\frac{1}{e},e\right)$　　D. $\left(-e,\frac{1}{e}\right)$

角度 3　利用导数解决函数零点问题

例4　(1)已知二次函数 $f(x)=x^2-bx+a$ 的部分图像如图 M1-2-3 所示，则函数 $g(x)=e^x+f'(x)$的零点所在的区间是　　(　　)

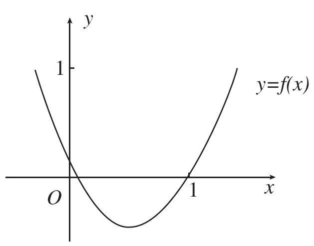


图 M1-2-3

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

(2)设 $f(x)=\frac{2x^2}{x+1}$，$g(x)=ax+5-2a(a>0)$，若对于任意 $x_1\in[0,1]$，总存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $g(x_0)=f(x_1)$成立，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left[\frac{5}{2},4\right]$　　B. $[4,+\infty)$

C. $\left(0,\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$

[听课笔记]

【考场点拨】

在解决函数零点问题的过程中，可以利用导数研究函数单调性对其进行分析，掌握极值与导函数之间的关系，在相互协调的情况下，提升解题效果.

【自我检测】

1. 设 $f(x)=e^x+bx+c$，若函数 $y=f(x)-x$ 无零点，则　　(　　)

A. $b>1, c<1$

B. $b>1, c>-1$

C. $0<b\leqslant 1, c<1$

D. $0<b\leqslant 1, c>-1$

2. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，若 $x_1+2x_0=3x_2$，函数 $g(x)=f(x)-f(x_0)$，则 $g(x)$　　(　　)

A. 恰有一个零点

B. 恰有两个零点

C. 恰有三个零点

D. 至多有两个零点

小题 3　函数建模及应用

例5　(1)对于函数 $f(x)$，若存在实数 m，使得 $g(x)=f(x+m)-f(m)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则称 $f(x)$是位差值为 m 的“位差奇函数”. 给出下列三个函数：

①$f(x)=2x+1$；②$f(x)=x^2-2x+1$；③$f(x)=2^x$.

其中是“位差奇函数”的有　　(　　)

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

(2)在一定的储存温度范围内，某食品的保鲜时间 y(单位：h)与储存温度 x(单位：℃)满足函数关系 $y=e^{kx+b}$($e=2.71828\cdots$为自然对数的底数，k,b 为常数)，若该食品在0 ℃时的保鲜时间为 120 h，在 30 ℃时的保鲜时间为15 h，则该食品在 20 ℃时的保鲜时间为　　(　　)

A. 30 h　　B. 40 h

C. 50 h　　D. 80 h

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)构建函数模型解决实际问题的失分点:①不能选择相应变量得到函数模型;②构建的函数模型有误;③忽视函数模型中变量的实际意义.

(2)解决新概念信息题的关键是:①依据新概念进行分析;②有意识地运用转化思想,将新问题转化为我们所熟知的问题.

【自我检测】

1. 我国古代数学著作《孙子算经》中记载:“今有三人共车,二车空;二人共车,九人步.问:人与车各几何?”其大意是:“每车坐3人,有2辆车空出来;每车坐2人,多出9人步行.问人数和车辆数各是多少?”该问题中的车辆数为 ( )

A. 12 B. 14 C. 15 D. 18

2. 已知$M=\{\alpha|f(\alpha)=0\}$,$N=\{\beta|g(\beta)=0\}$,若存在$\alpha\in M$,$\beta\in N$,使得$|\alpha-\beta|<n$,则称函数$f(x)$与$g(x)$互为“n度零点函数”.若$f(x)=3^{2-x}-1$与$g(x)=x^2-ae^x$互为“1度零点函数”,则实数a的取值范围为 ( )

A. $\left(\frac{1}{e^2},\frac{4}{e}\right]$ B. $\left(\frac{1}{e},\frac{4}{e^2}\right]$

C. $\left[\frac{4}{e^2},\frac{2}{e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{e^3},\frac{2}{e^2}\right)$

3. 某种物质在经过时间t(单位:min)后的浓度为M(单位:mg/L),M与t满足函数关系$M=ar^t+24$(a,r为常数).当$t=0$ min和$t=1$ min时测得该物质的浓度分别为124 mg/L和64 mg/L,当$t=4$ min时,该物质的浓度为________mg/L;若该物质的浓度小于24.001 mg/L,则最小的整数t的值为________.(参考数据:lg 2≈0.3)

请完成 限时集训(二)

第3讲 不等式与函数问题

D 典型真题研析

六年典型真题甄选 解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·浙江卷] 设$a>0$,$b>0$,则“$a+b\leqslant 4$”是“$ab\leqslant 4$”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

(2)[2019·天津卷] 设$x>0$,$y>0$,$x+2y=5$,则$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为________.

[试做]

方法 利用基本不等式求最值

1. 确定定值式(已知条件中是和为定值还是积为定值);

2. 将待求式变形,利用基本不等式求最值.

2. (1)[2018·全国卷Ⅱ] 若x,y满足约束条件$\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0,\\x-2y+3\geqslant 0,\\x-5\leqslant 0,\end{cases}$则$z=x+y$的最大值为________.

(2)[2019·全国卷Ⅱ] 若变量x,y满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-6\geqslant 0,\\x+y-3\leqslant 0,\\y-2\leqslant 0,\end{cases}$则$z=3x-y$的最大值是________.

[试做]

方法 求线性目标函数的最值

1. 直线定界,特殊点定域;

2. 在目标函数$z=ax+by$中,若$b>0$,则截距$\frac{z}{b}$取最大值,z取最大值,若$b<0$,则截距$\frac{z}{b}$取最大值,z取最小值;

3. 注意可行域是否包含边界,线性目标函数的最值一般在可行域的顶点或边界处取得.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　基本不等式的应用

例 1　(1)若正实数 x,y 满足 $x+y=1$,则 $\frac{4}{x+1}+\frac{1}{y}$ 的最小值为　(　　)

A. $\frac{44}{7}$　　B. $\frac{27}{5}$

C. $\frac{14}{3}$　　D. $\frac{9}{2}$

(2)已知 $a>2b(a,b\in\mathbf{R})$,函数 $f(x)=ax^2+x+2b$ 的值域为 $[0,+\infty)$,则 $\frac{a^2+4b^2}{a-2b}$ 的最小值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用基本不等式求最值时需注意:

(1)不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 成立的条件是 $a>0,b>0$,而不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 对任意实数 a,b 都成立,因此在使用时要注意其前提条件;

(2)多次使用基本不等式时,注意考虑等号是不是能同时取到;

(3)对于 $x+\frac{a}{x}(x>0,a>0)$ 型不等式,不能简单地利用 $x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}$,而是要判断 x 的取值范围能否取到最小值 $2\sqrt{a}$,若不能,需要利用函数的单调性计算其最小值.

【自我检测】

1. 若实数 x,y 满足 $2^x+2^y=1$,则 $x+y$ 的最大值是　(　　)

A. -4　　B. -2

C. 2　　D. 4

2. 设 $x>0,y>0,x+y=5$,则 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y+1}$ 的最小值为________.

3. 已知正实数 x,y 满足 $xy+2x+3y=42$,则 $xy+5x+4y$ 的最小值为________.

小题 2　绝对值不等式

例 2　(1)若关于 x 的不等式 $|x-1|+|ax-1|\geqslant 2x$ 对于任意 $x>0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是____________.

(2)已知实数 $x,y\in[-1,1]$,$\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b,\\ b,a<b,\end{cases}$ 则 $\max\{x^2-y^2+1,|x-2y|\}$ 的最小值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

解决绝对值不等式的关键是去绝对值符号,等价转化为不含绝对值符号的题目,用已有方法求解.

【自我检测】

1. 若实数 a,b 满足 $a|a|>b|b|$,则下列判断正确的是(　　)

A. $a>b$

B. $|a|>|b|$

C. $a+b>0$

D. 以上不等式都有可能成立

2. 已知实数 x,y 满足 $\frac{x^2}{2}+y^2\leqslant 1$,则 $|x^2+y^2-2|+|x^2+y^2-6x+7|$ 的最小值等于　(　　)

A. $6\sqrt{2}-5$　　B. $6\sqrt{2}-7$

C. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　D. $9-6\sqrt{2}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x\leqslant 0,\\ \ln(x+1),x>0,\end{cases}$ 若 $|f(x)|\geqslant ax$,则实数 a 的取值范围是________.

小题 3　多元变量函数最值问题

例 3　(1)已知实数 x,y,z 满足 $\begin{cases}xy+2z=1,\\ x^2+y^2+z^2=5,\end{cases}$ 则 xyz 的最小值为_________,此时 $z=$________.

(2)设函数 $f(x)=|x^2-2x-1|$,若 $a>b\geqslant 1$,$f(a)=f(b)$,则对任意的实数 c,$(a+c^2)^2+(b-c^2)^2$ 的最小值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

多元函数的最值问题就是在多个约束条件下,求某一个函数的最大值和最小值.在所列的式子之中,有多个未知数.求解多元函数的最值问题技巧性强、难度大、方法多,多元函数的最值问题蕴含着丰富的数学思想和方法.解题方法有:导数法、消元法、基本不等式法、换元法、数形结合法、向量法等.

【自我检测】

1. 已知正实数 a,b 满足 $a+b=1$,则$\frac{2a}{a^2+b}+\frac{b}{a+b^2}$的最大值是 ( )

A. 2 B. $1+\sqrt{2}$

C. $1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

2. 已知正实数 a,b,c,d 满足 $a+b=1,c+d=1$,则$\frac{1}{abc}+\frac{1}{d}$的最小值是________.

3. 已知 $a,b\in\mathbf{R},a+b=4$,则$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$的最大值为________.

请完成 限时集训(三)

第 4 讲 导数的应用

D 典型真题研析

六年典型真题甄选 解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·全国卷Ⅲ] 已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点$(1,ae)$处的切线方程为 $y=2x+b$,则 ( )

A. $a=e,b=-1$ B. $a=e,b=1$

C. $a=e^{-1},b=1$ D. $a=e^{-1},b=-1$

(2)[2019·全国卷Ⅰ] 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点$(0,0)$处的切线方程为________.

(3)[2016·全国卷Ⅱ] 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线,也是曲线 $y=\ln(x+1)$的切线,则 $b=$________.

[试做]

结论 导数的几何意义

1. 函数在某点的导数即曲线在该点处的切线的斜率;
2. 曲线在某点的切线与曲线过某点的切线不同;
3. 切点既在切线上,又在曲线上.

2. (1)[2016·全国卷Ⅰ] 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$单调递增,则 a 的取值范围是 ( )

A. $[-1,1]$ B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

(2)[2017·全国卷Ⅱ] 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点,则 $f(x)$的极小值为 ( )

A. -1 B. $-2e^{-3}$ C. $5e^{-3}$ D. 1

(3)[2018·全国卷Ⅰ] 已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$,则 $f(x)$的最小值是________.

(4)[2018·江苏卷] 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$在$(0,+\infty)$内有且只有一个零点,则 $f(x)$在$[-1,1]$上的最大值与最小值的和为________.

[试做]

结论 导数与函数的单调性、极值、最值

1. 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处取得极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$,且在 x_0 左侧与右侧 $f'(x)$的符号不同.
2. 若 $f(x)$在区间(a,b)内是单调函数,则 $f(x)$在区间(a,b)内一定没有极值.
3. 求 $y=f(x)$的最值步骤:
(1)求导;
(2)求 $f'(x)=0$ 的根;
(3)检查导数为 0 的点左右两侧的导数符号,求极值点;
(4)将极值点与区间端点代入求最值.

K 考点考法探究

核心考点全面提升 题型、考法、思维强化

小题 1 导数的几何意义及应用

例 1 (1)已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点$(1,1)$处的切线与抛物线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切,则 a 的值为 ( )

A. 0 B. 0 或 8 C. 8 D. 1

(2)已知点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$是函数 $f(x)=a\sqrt{x}+bx^2$ 的图像上的任意两点,且 $f(x)$的图像在点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$处的切线与直线 AB 平行,则 ( )

A. $a=0,b$ 为任意非零实数

B. $b=0,a$ 为任意非零实数

C. a,b 均为任意实数

D. 不存在满足条件的实数 a,b

［听课笔记］

【考场点拨】

应用导数的几何意义解题时应注意：(1)注意 $f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的区别与联系，$f'(x_0)$ 表示导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，是一个常数；(2)函数在某点处的导数值就是对应曲线在该点处切线的斜率；(3)切点既在原函数的图像上也在切线上.

【自我检测】

1. 若直线 $y=\frac{5}{2}x$ 与曲线 $y=mx-\ln(2x+1)$ 相切于点 $O(0,0)$，则 $m=$ （　　）

A. 0　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

2. 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^3-2x-m$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线斜率为 （　　）

A. 10　　B. -10

C. 4　　D. 与 m 的取值有关

3. 已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{2x}$. 若曲线 $y=f(x)$ 存在两条过 $(1,0)$ 点的切线，则 a 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

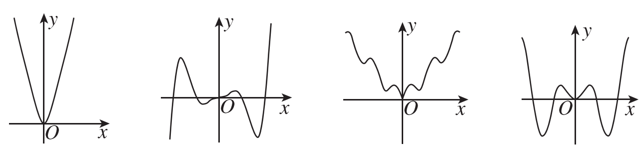
4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, x\leqslant 1,\\ \ln x, x>1,\end{cases}$ 若方程 $f(x)=kx-\frac{1}{2}$ 恰有四个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是 （　　）

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$　　B. $(2,e)$

C. $(\sqrt{e},2)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\sqrt{e}\right)$

小题 2　与导数有关的函数图像问题

例 2　(1)函数 $f(x)=x^2+x\sin x$ 的图像大致为 （　　）



A　　B　　C　　D

图 M1-4-1

(2)已知某个函数的部分图像如图 M1-4-2 所示，则这个函数的解析式可能是 （　　）

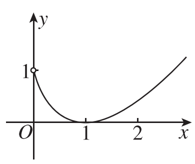


图 M1-4-2

A. $y=x\ln x+x-1$

B. $y=x\ln x-x+1$

C. $y=\frac{\ln x}{x}-x+1$

D. $y=-\frac{\ln x}{x}+x-1$

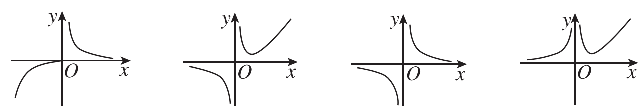
［听课笔记］

【考场点拨】

利用导数判断函数的图像，主要是在仅通过函数的定义域、值域、奇偶性等性质难以确定函数图像的情况下，通过对函数求导，分析函数的单调性、零点、极值等，充分展现函数图像的变化规律，达到判断函数图像的目的.

【自我检测】

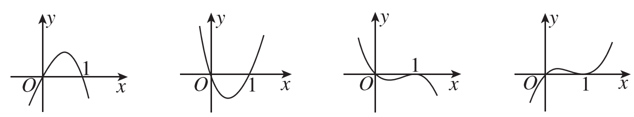
1. 函数 $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$ 的大致图像为 （　　）



A　　B　　C　　D

图 M1-4-3

2. 设函数 $f(x)$ 在 **R** 上可导，其导函数为 $f'(x)$，若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，则函数 $y=-xf'(x)$ 的图像可能是 （　　）



A　　B　　C　　D

图 M1-4-4

小题 3　利用导数研究函数的单调性

例 3　(1)已知 $a=\ln\sqrt[3]{3}$，$b=e^{-1}$，$c=\frac{3\ln 2}{8}$，则 a,b,c 的大小关系为 （　　）

A. $b<c<a$　　B. $b>c>a$

C. $a>b>c$　　D. $b>a>c$

(2)若函数 $f(x)=e^{2x}-ax^2+1$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $\left[\frac{e^4}{4},+\infty\right)$　　B. $\left(\frac{e^4}{4},+\infty\right)$

C. $\left[\frac{e^4}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{e^4}{2},+\infty\right)$

［听课笔记］

【考场点拨】

利用导数研究函数单调性的关键：(1)在利用导数讨论函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域；(2)单调区间的划分要注意对导数等于零的点的确认；(3)已知函数单调性求参数范围，要注意导数等于零的情况.

【自我检测】

1. 若函数 $f(x)=2x^3-3mx^2+6x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,2)$

2. 若函数 $y=f(x)$ 的图像如图 M1-4-5 所示，则 $y=f'(x)$ 的图像可能是 （　　）

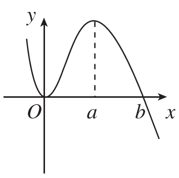


图 M1-4-5

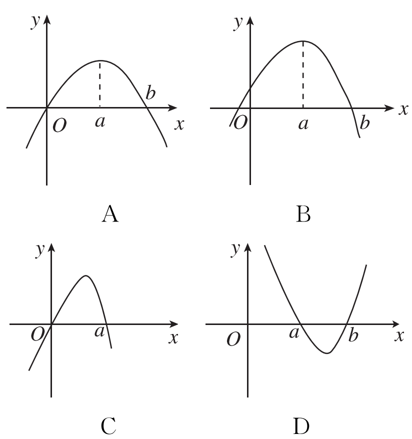


图 M1-4-6

3. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$f(x)+x\ln x f'(x)>0$，则不等式 $\dfrac{\ln x}{f(x)}>0$ 的解集是 （　　）

A. $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $(0,1)$

4. 函数 $f(x)=(x+1)e^x$ 的单调递减区间是________.

小题 4　利用导数研究函数的极值、最值

例 4 (1)若函数 $f(x)=e^x-(m+1)\ln x+2(m+1)x-1$ 恰有两个极值点，则实数 m 的取值范围为 （　　）

A. $(-e^2,-e)$

B. $\left(-\infty,-\dfrac{e}{2}\right)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

D. $(-\infty,-e-1)$

(2)已知函数 $f(x)=a^x+e^x-(1+\ln a)x(a>0,a\neq1)$，对任意 $x_1,x_2\in[0,1]$，不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant a\ln a+e-4$ 恒成立，则 a 的取值范围为 （　　）

A. $\left[\dfrac{1}{2},e\right]$　　B. $[e,2]$

C. $[e,+\infty)$　　D. $(e,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数研究函数的极值、最值应注意的问题：

(1)不能忽略函数 $f(x)$ 的定义域；

(2)$f'(x_0)=0$ 是可导函数在 $x=x_0$ 处取得极值的必要不充分条件；

(3)函数的极小值不一定比极大值小；

(4)函数在区间 (a,b) 上有唯一极值点，则这个极值点也是最大(小)值点，此结论在导数的实际应用中经常用到.

【自我检测】

1. 已知函数 $f(x)=ax^3-bx+2$ 的极大值和极小值分别为 M,m，则 $M+m=$ （　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

2. 若 $x=\dfrac{1}{e}$ 是函数 $f(x)=\ln x-kx$ 的极值点，则函数 $f(x)=\ln x-kx$ 有 （　　）

A. 极小值 -2

B. 极大值 -2

C. 极小值 -1

D. 极大值 -1

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(1)=6$，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，则 $f(\ln x)>2\ln x+4$ 的解集为 （　　）

A. $(0,e)$　　B. $(e,+\infty)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

4. 记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b,\\ b,a<b,\end{cases}$ 则函数 $f(x)=\max\left\{x\ln x,\dfrac{e^x}{x^2}\right\}$ 的最小值为 （　　）

A. $-\dfrac{1}{e}$　　B. 0

C. e　　D. $\dfrac{e^2}{4}$

请完成 **限时集训(四)**

第 5 讲　导数的热点问题

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. [2019·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．证明：

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点；

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点．

[试做]

2. [2019·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$．

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性．

(2)是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间$[0,1]$的最小值为-1且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值；若不存在，说明理由．

[试做]

3. [2019·浙江卷] 已知实数 $a\neq0$，设函数 $f(x)=a\ln x+\sqrt{1+x}$，$x>0$．

(1)当 $a=-\frac{3}{4}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)对任意 $x\in\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 均有 $f(x)\leqslant\frac{\sqrt{x}}{2a}$，求 a 的取值范围．

注：e＝2.718 28…为自然对数的底数．

[试做]

方法　导数的综合问题

1. 导数法判断和证明函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的单调性的步骤：

(1)求 $f'(x)$；

(2)确定 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内的符号(如果含有参数，则依据参数的取值讨论符号)；

(3)得出结论，$f'(x)>0$ 时函数 $f(x)$ 为增函数，$f'(x)<0$ 时函数 $f(x)$ 为减函数．

2. 利用导数证明不等式的一般思路为：若证明 $f(x)<g(x)$，$x\in(a,b)$，可以构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，如果 $F'(x)<0$，则 $F(x)$ 在 (a,b) 上是减函数，同时若 $F(a)\leqslant0$，则由减函数的定义可知，$x\in(a,b)$ 时，有 $F(x)<0$，即证明了 $f(x)<g(x)$．

3. 与函数零点个数有关的参数范围问题，往往利用导数研究函数的单调区间和极值点，并结合特殊点，得出函数的大致图像，从而讨论其图像与 x 轴的位置关系，进而确定参数的取值范围，或通过对方程等价变形转化为两个函数图像的交点问题来求参数的取值范围．

K 考点考法探究

核心考点全面提升 题型、考法、思维强化

解答1 单调性

例1 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数研究函数的单调性是导数应用的基础，只有研究了函数的单调性，才能研究其函数图像的变化规律，进而确定其极值、最值和函数的零点等. 注意：若可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在区间 D 上恒成立，但反过来不一定成立.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=ax^2+x+1(a>0)$. 设 $F(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$，讨论函数 $F(x)$ 的单调性.

解答2 函数的极值、最值

例2 已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$ 是单调函数，求 a 的取值范围；

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_2\geqslant e$，求 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的最小值.

[听课笔记]

【考场点拨】

解决函数极值、最值问题的策略:(1)求极值、最值时,要求步骤规范,含参数时,要讨论参数的范围;(2)函数在给定闭区间上存在极值,一般要将极值与端点处的函数值进行比较才能确定最值.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)若 $m>n>0$,且 $m^n=n^m$,求证:$mn>e^2$.

解答3　存在、恒成立与最值问题

角度1　直接转化为最值

例3　设函数 $f(x)=ax^2-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导函数可以求函数的最值,因而在证明不等式时,根据不等式的特点,可以构造函数,用导函数求出该函数的最值,由当该函数取最大(或最小)值时不等式都成立,可得该不等式恒成立,从而把证明不等式问题转化为函数求最值问题.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(1)若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant m$ 恒成立,求实数 m 的最小值;

(2)若对任意的 $x_1,x_2\in(0,2)$ 且 $x_1<x_2$,存在 $x_0\in(x_1,x_2)$,使得 $f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$,求证:$x_0<\sqrt{x_1x_2}$.

角度2 参变量分离

例4 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$, $g(x)=x^2$, $a\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$的极值点;

(2)若 $f(x)\leqslant g(x)$恒成立,求 a 的取值范围.

[听课笔记]

【考场点拨】

由不等式恒成立求参数的取值范围问题的策略:(1)求最值法,将恒成立问题转化为利用导数求函数的最值问题;(2)分离参数法,将变量分离出来,进而转化为 $a>f(x)_{\max}$ 或 $a<f(x)_{\min}$ 的形式,通过导数的应用求出 $f(x)$的最值,即得参数的范围.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=e^x(x+\sin x+a\cos x)(a\in\mathbf{R})$在点 $(0,f(0))$处切线的斜率为1.

(1)求 a 的值;

(2)设 $g(x)=1-\sin x$,若对任意 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)+mg(x)\geqslant 0$,求实数 m 的取值范围.

角度3　利用必要条件缩小范围

例5 已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$.

(1)当 $a=4$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2)当 $a>0$ 时,对于任意的 $x\in[1,+\infty)$,不等式 $f(x)>1-a^2$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

【考场点拨】

在解数学题的过程中,往往通过等价转化,精确地找到范围,最后也不需要检验.但是很多情况下等价转化不易进行,不妨退而求其次,采用非等价转化的方法来解,比如采用"先必要再充分"的方法,即先找到命题成立的必要条件,缩小范围,简化运算.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=e^x-mx$.

(1)若 $m=2$,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $x>0$ 时,不等式 $(x-2)f(x)+mx^2+2>0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

请完成 **限时集训(五)**

02 模块二

三角函数与平面向量

第 6 讲　平面向量

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2018·全国卷Ⅰ] 在$\triangle ABC$中,AD为BC边上的中线,E为AD的中点,则$\overrightarrow{EB}=$　　(　　)

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(2)[2018·全国卷Ⅲ] 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-2)$,$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$.若$\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则$\lambda=$________.

[试做]

2. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 已知非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$,且$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

(2)[2019·天津卷] 在四边形$ABCD$中,$AD\parallel BC$,$AB=2\sqrt{3}$,$AD=5$,$\angle A=30°$,点E在线段CB的延长线上,且$AE=BE$,则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$________.

[试做]

3. (1)[2019·浙江卷] 已知正方形$ABCD$的边长为1.当每个$\lambda_i(i=1,2,3,4,5,6)$取遍±1时,$|\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{BC}+\lambda_3\overrightarrow{CD}+\lambda_4\overrightarrow{DA}+\lambda_5\overrightarrow{AC}+\lambda_6\overrightarrow{BD}|$的最小值是________,最大值是________.

(2)[2018·浙江卷] 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}$是平面向量,$\boldsymbol{e}$是单位向量.若非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,向量$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{b}+3=0$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值是　　(　　)

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{3}+1$

C. 2　　D. $2-\sqrt{3}$

[试做]

结论　平面向量的线性运算

1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.
2. 若$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$($\lambda,\mu$为常数),则$A,B,C$三点共线的充要条件是$\lambda+\mu=1$.
3. 若A,B,C是平面内不共线的三点,则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow P$为$\triangle ABC$的重心.

方法　数量积的应用

(1)根据需要,灵活变形数量积公式求解;
(2)利用数量积与共线定理可以解决垂直、平行、夹角问题;
(3)建立坐标系,利用平面向量的坐标运算解题.

方法　解决与平面向量最值有关的问题

(1)建立坐标系,使向量问题代数化,进而从代数角度研究;
(2)利用向量加法、减法、数量积的几何算运,结合平面几何知识解题,可以减少运算量;
(3)利用一些平面向量中的结论,如极化恒等式:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]$.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　平面向量的线性运算

例 1 (1)已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-5,2)$且$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则 $m=$　(　　)

A. 1　　B. -1

C. $\frac{7}{5}$　　D. $-\frac{7}{5}$

(2)如图 M2-6-1,在正方形 $ABCD$ 中,F 是边 CD 上靠近 D 点的三等分点,连接 BF 交 AC 于点 E,若$\overrightarrow{BE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in\mathbf{R})$,则 $m+n$ 的值是　(　　)

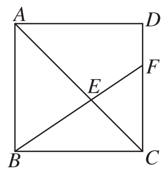


图 M2-6-1

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $-\frac{2}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

[听课笔记]

【考场点拨】

关于向量线性运算问题需注意两点:

(1)注意尽可能地将向量转化到同一个平行四边形或三角形中,选用从同一顶点出发的基本向量或首尾相接的向量,运用向量加、减法运算及数乘运算来求解;

(2)坐标运算中注意方程思想的运用及合理使用运算法则.

【自我检测】

1. 在$\triangle ABC$ 中,D 是 BC 上一点,且 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,则 $\overrightarrow{AD}=$　(　　)

A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

2. 如图 M2-6-2 所示,在同一平面中,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{ED}$,若$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in\mathbf{R})$,则 $m+n=$　(　　)

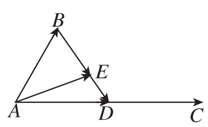


图 M2-6-2

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{5}{6}$　　D. 1

3. 如图 M2-6-3,圆 O 是边长为 $2\sqrt{3}$的等边三角形 ABC 的内切圆,其与 BC 边相切于点 D,点 M 为圆上任意一点,$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}(x,y\in\mathbf{R})$,则 $2x+y$ 的最大值为　(　　)

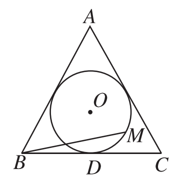


图 M2-6-3

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$,$\boldsymbol{c}=(1,2)$,若向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 共线,则实数 k 的值为________.

小题 2　平面向量的数量积

例 2 (1)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{b}=(t,2-t)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

(2)如图 M2-6-4 所示,在$\triangle ABC$ 中,点 D 在边 AB 上,连接 CD,E 在 CD 上,$AB=3$,$AC=2$,$\angle BAC=60°$,$BD=2AD$,$CE=2ED$,则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=$　(　　)

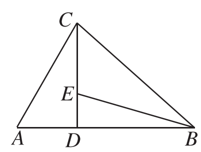


图 M2-6-4

A. 9　　B. 4

C. -3　　D. -6

[听课笔记]

【考场点拨】

计算平面向量数量积的方法有两种:一是利用数量积的定义和公式进行计算,解题的关键是求出向量的模和夹角;二是结合正方形、等腰三角形或者直角梯形等图形的特点建立平面直角坐标系,转化为平面向量的坐标运算.

【自我检测】

1. 已知 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$|\boldsymbol{e}_2|=1$,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 30°,若$\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 互相垂直,则实数 λ 的值是　(　　)

A. $-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}+4$　　D. $-3\sqrt{3}+4$

2. 如图 M2-6-5 所示,已知在Rt△ABC中,点 D 为斜边 BC 的中点,$|\overrightarrow{AB}|=6\sqrt{3}$,$|\overrightarrow{AC}|=6$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$,则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}$等于 ( )

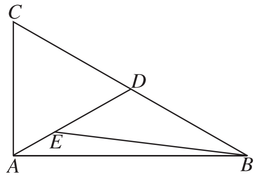


图 M2-6-5

A. -14　　B. -9　　C. 9　　D. 14

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}|(t\in\mathbf{R})$的最小值为 1,当 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$最大时,$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$________.

4. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为________.

增分一课　平面向量数量积的常用方法

方法 1　利用三点共线求解

1. 在扇形 AOB 中,$\angle AOB=60°$,C 为弧 AB 上的一个动点,若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,则 $3x+y$ 的取值范围是________.

2. 已知在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中,E,F 分别是边 BC,DC 上的动点,$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,若 $x+y=3$,则 $|\overrightarrow{EF}|$的最小值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

平面内,“A,B,C 三点共线”的充要条件是“$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}(x+y=1)$(点 O 不在直线 BC 上)”,若 $x+y=k(k\neq1)$,则点 A 在与 BC 平行的直线上.

方法 2　利用几何知识求解

1. 如图 M2-6-6,已知 AB 为圆 C 的一条弦,且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$,则$|\overrightarrow{AB}|=$________.

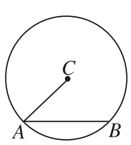


图 M2-6-6

2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,若对任意的实数 t,都有 $|\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{a}|\geqslant\left|\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right|$,则 ( )

A. $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　　B. $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

C. $|\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　D. $|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)圆与直线相交时,圆心与弦的中点的连线与弦垂直;(2)直线外一点与直线上一动点之间的距离,当这两点所在直线与原直线垂直时最小.抓住这些几何上的特征,往往可以简化计算.

方法 3　利用构造法求解

1. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量,且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,则$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$的取值范围是________.

2. 设非零平面向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足$|\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=2$,$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=4$,则$|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$的最大值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

平面向量中常常可以根据条件构造几何图形,将所求问题转化为投影、截距、距离、斜率等问题来解决.在解题过程中,要注意图形的几何性质.

【自我检测】

1. 若 P 为△ABC 所在平面内一点,且$|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}|$,则△$ABC$ 的形状为 ( )

A. 等边三角形

B. 等腰三角形

C. 直角三角形

D. 等腰直角三角形

2. 如图 M2-6-7,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$BC=\sqrt{2}$,点 F 在边 CD 上,过点 F 作 $FE\perp AB$ 交 AB 于 E.若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=3$,则$|\overrightarrow{BF}|$的值是________.

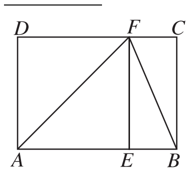


图 M2-6-7

3. 已知 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 均为单位向量,且它们的夹角为 60°,设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_2|=\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2(m\in\mathbf{R})$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为________.

请完成 限时集训(六)

第7讲　三角函数与解三角形

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·全国卷Ⅱ] 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$,则 $\sin\alpha=$ (　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(2)[2019·全国卷Ⅰ] $\tan 255°=$ (　　)

A. $-2-\sqrt{3}$　　B. $-2+\sqrt{3}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

(3)[2019·江苏卷] 已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{2}{3}$,则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值是________.

[试做]

2. (1)[2017·全国卷Ⅰ改编] 已知曲线 $C_1:y=\cos x$,$C_2:y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$,则把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的______倍,纵坐标不变,再把得到的曲线向______平移________个单位长度,得到曲线 C_2.

(2)[2019·全国卷Ⅱ] 下列函数中,以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增的是 (　　)

A. $f(x)=|\cos 2x|$　　B. $f(x)=|\sin 2x|$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\sin|x|$

[试做]

3. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$ 的最小值为________.

(2)[2014·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x)=\sin(x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(x+\varphi)$ 的最大值为________.

[试做]

4. (1)[2019·全国卷Ⅱ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $b\sin A+a\cos B=0$,则 $B=$________.

(2)[2018·全国卷Ⅲ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$,则 $C=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

[试做]

结论　三角恒等变换

1. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$,$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

2. $1\pm\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

3. $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$,$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

4. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$,其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

方法　三角函数的图像变换

关键一:化为同名函数; 关键二:两种途径,“先平移后伸缩”和“先伸缩后平移”;

关键三:$\omega x+\varphi=\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)$.

方法　三角函数的单调性

1. 将函数化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b$(或 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)+b$)的形式.

2. 把 $\omega x+\varphi(\omega>0)$ 看成整体,利用正弦函数、余弦函数的单调性求解.

方法　三角函数的最值问题

1. 利用诱导公式、三角恒等变换,将函数化为关于 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的二次函数,采用配方法求最值.

2. 利用诱导公式、辅助角公式将函数化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b$(或 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)+b$)的形式,根据三角函数的有界性运用整体思想求最值.

知识　正、余弦定理

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$(其中 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径),$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$. 2. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

方法　与三角形面积有关的问题

1. 利用公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C$ 得到关于三角形的边和角的等式.

2. 利用正、余弦定理进行边角转化求解.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　三角函数的图像与性质

例 1　(1)将函数 $f(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把所得图像上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,得到函数 $g(x)$ 的图像,则下列关于函数 $g(x)$ 的说法错误的是　(　　)

A. 最小正周期为 π

B. 图像关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称

C. 图像关于点 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称

D. 初相为 $\frac{\pi}{3}$

(2)图 M2-7-1 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的图像,将该图像向右平移 $|m|(m<0)$ 个单位长度后,所得图像关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称,则 m 的最大值为　(　　)

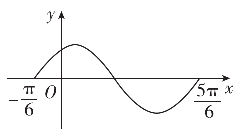


图 M2-7-1

A. $-\frac{\pi}{12}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $-\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{3}$

[听课笔记]

【考场点拨】

1. 三角函数的性质主要是单调性、周期性、奇偶性和最值,要注意以下两点:一是考查三角函数的性质时,首先要将函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式,再对比 $y=\sin x$ 的性质,即把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体处理,但是一定要注意 ω 的正负,否则易出错;二是一定要结合图像进行分析.

2. 三角函数图像平移变换中的误区:

(1)函数图像的平移法则是"左加右减、上加下减",但是左右平移变换只是针对 x 作的变换.

(2)函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像向左(右)平移 k 个单位长度后,其图像对应的函数解析式为 $g(x)=\sin[\omega(x\pm k)+\varphi]$,而不是 $g(x)=\sin(\omega x\pm k+\varphi)$.

【自我检测】

1. 要得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像,需将 $y=\cos 2x$ 的图像　(　　)

A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

2. 将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后与原函数的图像重合,则实数 ω 的值可能是　(　　)

A. 6　　B. 10　　C. 12　　D. 16

3. 把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度,再把所得的图像上每个点的横、纵坐标都伸长到原来的 2 倍,得到函数 $g(x)$ 的图像,并且 $g(x)$ 的图像如图 M2-7-2 所示,则 $f(x)$ 的解析式可以为　(　　)

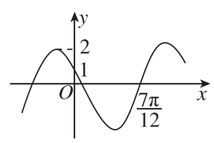


图 M2-7-2

A. $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

B. $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$

D. $f(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$

4. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,若对任意的 $a\in(1,2)$,关于 x 的方程 $|f(x)|-a=0(0\leqslant x<m)$ 总有两个不同的实数根,则实数 m 的取值范围为　(　　)

A. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

小题 2　三角函数的值域与最值问题

例 2　(1)函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x-2\sin x\cos x\left(其中 x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域是　(　　)

A. $[-1,1]$

B. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

C. $[-\sqrt{2},1]$

D. $[-1,\sqrt{2}]$

(2)已知 $f(x)=m\sin\omega x-\cos\omega x(m>0,\omega>0)$，$g(x)=2\tan x$，对 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 成立，若 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的值域为 $[-1,2]$，则实数 ω 的取值不可能是 (　　)

A. $\frac{4}{3}$　B. 1　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{1}{2}$

[听课笔记]

【考场点拨】

求三角函数的值域与最值问题的类型与求解策略：(1)形如 $y=a\sin x+b\cos x+c$ 的三角函数，要根据三角恒等变换把函数化为 $y=A\sin(x+\varphi)+c$ 的形式，再借助三角函数图像与性质确定值域与最值；(2)形如 $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ 的三角函数，转化为二次函数求解；(3)形如 $y=a\sin x\cos x+b(\sin x\pm\cos x)+c$ 的三角函数，可先设 $t=\sin x\pm\cos x$，再转化为关于 t 的二次函数求解.

【自我检测】

1. 若函数 $f(x)=m+\sin x-\cos x$ 的最大值为 0，则 $m=$ (　　)

A. $-\sqrt{2}$　B. -2　C. -1　D. $\sqrt{2}$

2. 已知函数 $f(x)=4\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 在同一周期内，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时取得最大值，当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时取得最小值，则 φ 的值可能为 (　　)

A. $\frac{\pi}{12}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{13\pi}{6}$　D. $\frac{7\pi}{6}$

3. 函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 2x$ 的最大值为 (　　)

A. $\frac{9}{8}$　B. 0　C. $\frac{7}{8}$　D. $\frac{17}{16}$

4. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 图像的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，得到函数 $g(x)$ 的图像. 若函数 $g(x)$ 为偶函数，则函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域是 (　　)

A. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$　B. $(-2,1)$

C. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$　D. $[-2,1]$

小题 3　三角恒等变换与求值

例 3 (1)已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan(\pi+\alpha)=$ (　　)

A. $-\frac{15}{17}$　B. $\frac{15}{17}$　C. $-\frac{8}{17}$　D. $\frac{8}{17}$

(2)已知 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta=-\frac{3\sqrt{3}}{5}$，则 $\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=$ (　　)

A. $\frac{3}{5}$　B. $-\frac{3}{5}$　C. $\frac{4}{5}$　D. $-\frac{4}{5}$

(3)已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

三角恒等变换主要是利用两角和与差的公式及二倍角公式解决相关的三角函数问题. 化简与求值要遵循“三看”原则：一看“角”，通过看角之间的差别与联系，把角进行合理拆分；二看“函数名称”，是需进行“切化弦”还是“弦化切”等，从而确定使用的公式；三看“结构特征”，了解变式或化简的方向.

【自我检测】

1. 已知 $\sin\theta=\frac{a-1}{1+a}$，$\cos\theta=-\frac{a}{1+a}$，若 θ 是第二象限角，则 $\tan\theta$ 的值为 (　　)

A. $-\frac{1}{2}$　B. -2　C. $-\frac{3}{4}$　D. $-\frac{4}{3}$

2. 若 $\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2x=$ (　　)

A. $-\frac{4}{9}$　B. $-\frac{8}{9}$

C. $\frac{4}{9}$　D. $\frac{8}{9}$

3. 已知 $x\in(0,\pi)$，且 $\cos x=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

4. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$________.

小题 4　正、余弦定理及三角形面积公式的应用

例 4 (1)在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $B=30°$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$，且 $\sin A+\sin C=2\sin B$，则 b 的值为 (　　)

A. $4+2\sqrt{3}$　B. $4-2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}-1$　D. $\sqrt{3}+1$

(2)在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 AB 上一点，且 CD 平分 $\angle ACB$，若 $AC=2$，$BC=1$，$CD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $AB=$________，$\triangle ABC$ 的面积为________.

［听课笔记］

【考场点拨】

利用正、余弦定理求解三角形中的基本量时应注意的问题：(1)已知两边及其中一边的对角求其他边或角时，要注意解的多样性与合理性；(2)三角形的面积主要是利用 $S=\frac{1}{2}\cdot ab\sin C$ 求解；(3)有时可以直接利用正余弦定理求出 ab 的整体值再求面积，而不必要分别求出 a,b.

【自我检测】

1. 在△ABC 中，若 $AB=3BC$，$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $\cos B=$ （　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若△ABC 的面积和周长分别为 $10\sqrt{3}$ 和 20，$C=60°$，则 $c=$ （　　）

A. 7　　B. 8

C. 5　　D. 6

3. 在△ABC 中，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，则 B 的取值范围是 （　　）

A. $0<B\leqslant\frac{\pi}{4}$

B. $0<B\leqslant\frac{\pi}{6}$

C. $0<B\leqslant\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}\leqslant B<\pi$

D. $0<B\leqslant\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}\leqslant B<\pi$

4. 在△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a=\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}+b}{c}=\frac{\sin C+\sin A}{\sin C+\sin A-\sin B}$，则 $b+2c$ 的最大值等于________.

请完成 **限时集训(七)**

第 8 讲　三角恒等变换与解三角形

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. ［2019·浙江卷］设函数 $f(x)=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)已知 $\theta\in[0,2\pi)$，函数 $f(x+\theta)$ 是偶函数，求 θ 的值；

(2)求函数 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]^2+\left[f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$ 的值域.

［试做］

2. ［2018·浙江卷］已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

(1)求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值；

(2)若角 β 满足 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$ 的值.

［试做］

方法　三角函数的性质与三角恒等变换问题

(1)解决三角恒等变换问题：利用两角和与差的公式进行计算，一般涉及诱导公式的应用，注意应用三角公式时角的整体性，如，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$.

(2)解决三角函数性质问题：

第一步：通过三角恒等变换（两角和与差公式、倍角公式）转化为单一的三角函数；

第二步：根据三角函数的单调性、周期性、奇偶性等性质整体代换求出结果，注意符号.

3. [2019·全国卷Ⅰ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

(1)求 A；

(2)若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

[试做]

方法　利用正、余弦定理解三角形

第一步，利用正、余弦定理进行边角转化；

第二步，利用三角恒等变换求边与角；

第三步，代入数据求值；

第四步，转化过程中要注意转化的方向，审视结果的合理性.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

解答1　三角函数的性质为核心的解答

例1　已知函数 $f(x)=\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x, x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2)求方程 $f(x)=0$ 在 $(0,\pi]$ 内的所有解.

【考场点拨】

解决与三角函数性质有关的问题时，一般先利用 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$，$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$，$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 等公式将函数解析式化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，再利用函数 $y=\sin x$ 的图像和性质解题.

【自我检测】

已知 $2\sin\alpha\tan\alpha=3, 0<\alpha<\pi$.

(1)求 α 的值；

(2)求函数 $f(x)=4\cos x\cos(x-\alpha)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的取值范围.

解答2　三角函数恒等变换为核心的解答

例2　已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，其中 $\alpha\in(0,\pi)$，$\beta\in(0,\pi)$.

(1)求 $\dfrac{2\sin(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值；

(2)求 $\sin\beta$ 的值.

【考场点拨】

三角函数的恒等变化及化简求值，除了熟用三角函数的相关公式外，还要注意角的取值范围和三角函数值的符号，这是解题中的易错点.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1)求 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$的值；

(2)若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{13}{10}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，求 $\cos\alpha$ 的值.

解答 3　正、余弦定理为核心的解答

例 3　在$\triangle ABC$中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，已知$\frac{2b-c}{a}=\frac{\cos C}{\cos A}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=\sqrt{14}$，$b+c=4\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

[听课笔记]

【考场点拨】

求解三角形中的边和角等基本量，需要根据正、余弦定理结合已知条件灵活转化边和角之间的关系，从而达到解决问题的目的.一般来说，式子中含有边或余弦的二次式，则考虑用余弦定理；式子中含有角的正弦或边的一次式，则考虑用正弦定理.若特征不明显，可能需要综合使用两个定理.

【自我检测】

已知$\triangle ABC$的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且$\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=2$，求$\triangle ABC$的面积的最大值.

请完成　限时集训(八)