2020

CANPOINT

全品高考

# 第二轮专题

主编：肖德好

## 数学（文科）听课手册

本册主编：程传道
编　　者：程传道　甘志国　高娟丽
赵　博　韩凤亭
特约主审：杨　柳　徐建平　翁华木

黄河出版传媒集团
阳光出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

全品高考第二轮专题：新课标．数学．文科 / 肖德好主编．—银川：阳光出版社，2014.9(2019.9 重印)

ISBN 978-7-5525-1442-1

Ⅰ．①全…　Ⅱ．①肖…　Ⅲ．①中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 198392 号

**全品高考第二轮专题　数学(文科)　新课标　　肖德好　主编**

责任编辑　胡　鹏
封面设计　唐思羽

黄河出版传媒集团 阳光出版社 出版发行

出 版 人　薛文斌
地　　址　宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)
网　　址　http://www.ygchbs.com
网上书店　http://shop129132959.taobao.com
电子信箱　yangguangchubanshe@163.com
邮购电话　0951—5014139
经　　销　全国新华书店
印刷装订　石家庄市书渊印刷有限公司

开　　本　880mm×1230mm　1/16
印　　张　14.5
字　　数　508 千字
版　　次　2014 年 9 月第 1 版
印　　次　2019 年 9 月第 6 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5525-1442-1

定　　价　55.80 元

# 简约不简单 数学

二、三轮复习是高考前的冲刺阶段，也是考生提升成绩的最后一个突破点。要做出一本高效的二、三轮复习用书，关键要找到一种对应一线的高效的二、三轮备考模式。

什么是高效的模式？即确定二、三轮备考到底要解决什么，也即发现学生高考时出现的失分点有哪些。

**通过研究历年教育部发行的《试题分析》，并结合大量的一线调研，我们将问题整理如下：**

01 怕陌生。每年的高考试卷，总有几道题，难度不大，但试题背景陌生。无论是在心态上，还是在解题的思路上，它们都成了考生的拦路虎。

02 速度慢。在高考时，有相当一部分考生，由于时间分配不合理，或是做题习惯不好，亦或是方法采用不当，最终都没有做完试卷而影响了最后的分数。

03 思维疏。绝大多数中档层次学生，虽然平时做的题很多，但不注意归纳总结，当高考出现同类型有变化的试题时，他们往往在关键步骤上思路不清晰，答题就出现“会而不全”的情况。

04 失误多。每年高考后估分，总会出现拍脑瓜当时没想起来、漏了或看错了条件、计算错误等“会而不对”的情况；

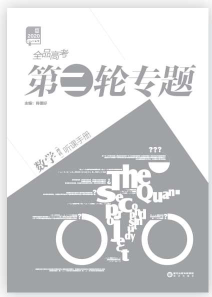
05 没思路。这类试题，有一个特点，即切入点隐蔽，融合的思想与方法多，需要分析的条件错综复杂（目前全国卷压轴题综合性明显降低）。如果二、三轮没有进行专门的训练，在高考有限的时间里，很难有所突破。

## 2020版《全品高考第二轮专题》
## 用心做产品，用心为您！

聚焦高考，将一类类必考问题讲透练透

聚焦区分度，将一项项易失分角度逐步攻克

聚焦答卷，将速度、准确度、思维度全面提升




一本对接高考——“专题大本”


一本拆分考卷——“特色专项”

**二轮产品部分特点如下：**

X 高分特训

20分压轴小题天天练

第一组

1. 已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$，则 $f\left(\frac{3}{5}\right)$，$f(0)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$的大小关系是（　　）

A. $f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)<f\left(-\frac{1}{2}\right)$　　C. $f\left(\frac{3}{5}\right)<f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(0)$

B. $f(0)<f\left(-\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{3}{5}\right)$　　D. $f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)$

碎片式，专攻心态

**思想二　数形结合思想**

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程的根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| 2019·全国卷Ⅰ　关于函数 $f(x)=\sin\lvert x\rvert+\lvert\sin x\rvert$有下述四个结论：<br>①$f(x)$是偶函数；　②$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递增；<br>③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有4个零点；　④$f(x)$的最大值为2.<br>其中所有正确结论的编号是（　　）<br>A. ①②④　B. ②④　C. ①④　D. ①③ | 易知函数 $f(x)$为偶函数，所以只需画出 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的图像，根据图像判断正误.选C |

案例式，专攻技法

K 考点考法探究　　研析高考题型　强化方法思维

**小题1　函数的概念与表示**

**例1** (1)若函数 $f(x)$的定义域为$[1,8]$，则函数$\frac{f(2^x)}{x-3}$的定义域为（　　）

A. $(0,3)$　　B. $[1,3)\cup(3,8]$

C. $[1,3)$　　D. $[0,3)$

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-2}, x\leqslant 2,\\ -\log_2(x+2), x>2,\end{cases}$若 $f(a)=-3$，则 $f(6-a)=$______.

3. 已知函数 $f(x)=2^{x^2-a}$，$f(\sqrt{3})=\frac{1}{4}$，则 $f(-\sqrt{2})=$（　　）

A. 1　　B. $-\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{8}$

**小题2　函数的性质及应用**

**例2** (1)若函数 $f(x)=xg(x)$是定义在**R**上的奇函数，在$(-\infty,0)$上是增函数，且 $f(1)=0$，$g(0)=0$，则使得 $g(x)<0$的 $x$的取值范围是（　　）

题组式，专攻题型与失误

**解答1　“17题～19题”+“二选一”46分练**

（时间：45分钟　分值：46分）

**解答题**（本大题共4小题，共46分.第22，23题为选考题.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 在△$ABC$中，内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$成等差数列，且$\cos C=\frac{1}{3}$.

(1)求$\frac{b}{a}$的值；

(2)若$c=11$，求△$ABC$的面积.

限时式，专攻速度与规范

# 目录

contents

全品高考第二轮专题（听课手册）

## 第I篇 高考专题讲练



## 高考七大模块题型解法攻略

### 01 模块一 函数与导数



### 02 模块二 三角函数与平面向量

## 03 模块三 数列



## 04 模块四 立体几何



## 05 模块五 解析几何

## 06 模块六　概率与统计



## 07 模块七　选考模块



## 第2篇　特色专项（另附分册）


最**直接**的训练方式

往往最**有效**

# 方法篇
## 选填题的特殊解法

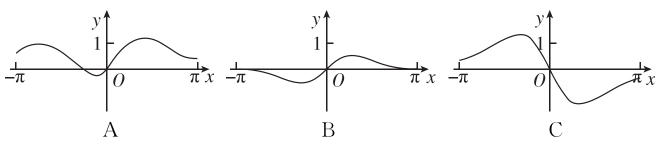
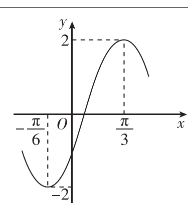
## 方法一　特例法与排除法

特例法是根据题设和各选项的具体情况和特点，选取满足条件的特殊的数值、特殊的点、特殊的例子、特殊的图形、特殊的位置、特殊的函数、特殊的方程、特殊的数列等，针对各选项进行代入对照，结合排除法，从而得到正确的答案.

（1）使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊化情况也一定成立.

（2）使用技巧：找到满足条件的合适的特殊化例子，或举反例排除，有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

（3）常见问题：求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.而对于函数图像的判别、不等式、空间线面位置关系等不宜直接求解的问题，常通过排除法解决.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为（　　）<br><br>图 F-1 | 由题图观察只有选项 A 不是奇函数的图像，排除 A；取特殊值 $x=\pi$，排除 B,C. 故选 D |
| [2019·全国卷Ⅲ] 记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和. 若 $a_1\neq 0$，$a_2=3a_1$，则 $\dfrac{S_{10}}{S_5}=$________. | 由条件 $a_2=3a_1$ 不能确定此数列，所以不妨取 $a_1=1$，则 $a_2=3$，求出 $S_{10}$，$S_5$ 即可. 答案：4 |
| [2017·全国卷Ⅰ] 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$________. | 取角 $\alpha$ 终边上的特殊点 $(1,2)$，利用定义代入计算，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$. 答案：$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ |
| [2017·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数. 若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 $x$ 的取值范围是（　　）<br>A. $[-2,2]$　B. $[-1,1]$　C. $[0,4]$　D. $[1,3]$ | 当 $x=4$ 时，$f(x-2)=f(2)<f(1)=-1$，不满足题意；当 $x=3$ 时，$f(x-2)=f(1)=-1$，满足题意. 所以选 D |
| [2017·山东卷] 若 $a>b>0$，且 $ab=1$，则下列不等式成立的是（　　）<br>A. $a+\dfrac{1}{b}<\dfrac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$　B. $\dfrac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\dfrac{1}{b}$<br>C. $a+\dfrac{1}{b}<\log_2(a+b)<\dfrac{b}{2^a}$　D. $\log_2(a+b)<a+\dfrac{1}{b}<\dfrac{b}{2^a}$ | 利用特殊值法检验排除，当 $a=2$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，选项 A,C,D 中的不等式不成立，故选 B |
| [2016·全国卷Ⅱ] 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图F-2所示，则（　　）<br>A. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　B. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$<br>C. $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　D. $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$<br><br>图 F-2 | 令 $x=0$ 和 $x=\dfrac{\pi}{3}$，验证可得结果. 答案：A |
| [2015·全国卷Ⅱ] 设 $S_n$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，若 $a_1+a_3+a_5=3$，则 $S_5=$（　　）<br>A. 5　B. 7　C. 9　D. 11 | 取常数列 $\{a_n\}$，其中 $a_n=1$，代入计算可得结果，答案：A |

**自测题**

1. 已知 $a>b>0$,$x=a+be^b$,$y=b+ae^a$,$z=b+ae^b$,则 (　　)

A. $x<z<y$　　B. $z<x<y$

C. $z<y<x$　　D. $y<z<x$

2. 设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,且 $\cos\beta=\tan\alpha(1+\sin\beta)$,则 (　　)

A. $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

C. $2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

3. 下列函数中,既是奇函数,又在区间(0,1)上是增函数的是 (　　)

A. $y=x\ln x$　　B. $y=x^2+x$

C. $y=\cos 2x$　　D. $y=e^x-e^{-x}$

4. 已知$\log_2x=\log_3y=\log_5z<0$,则$\dfrac{2}{x}$,$\dfrac{3}{y}$,$\dfrac{5}{z}$的大小关系为 (　　)

A. $\dfrac{2}{x}<\dfrac{3}{y}<\dfrac{5}{z}$　　B. $\dfrac{3}{y}<\dfrac{2}{x}<\dfrac{5}{z}$

C. $\dfrac{5}{z}<\dfrac{2}{x}<\dfrac{3}{y}$　　D. $\dfrac{5}{z}<\dfrac{3}{y}<\dfrac{2}{x}$

## 方法二　验证法

验证法是把选项代入题干中进行检验,或反过来从题干中找合适的验证条件,代入各选项中进行检验,从而可否定错误选项而得到正确选项的一种方法.

(1)使用前提:存在唯一正确的选项.

(2)使用技巧:可以结合特例法、排除法等先否定一些明显错误的选项,再选择认为最有可能的选项进行验证,这样可以快速获得答案.

(3)常见问题:题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算烦琐的问题等.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·全国卷Ⅰ] 记 $S_n$ 为等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和.已知 $S_4=0$,$a_5=5$,则 (　　)<br>A. $a_n=2n-5$　B. $a_n=3n-10$　C. $S_n=2n^2-8n$　D. $S_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n$ | 由 $S_4=0$,$a_5=5$ 可知 $S_5=5$,验证选项 C,D 可知 C,D 错误;再验证 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$,可知选项 B 错误.故选 A |
| [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$,则 (　　)<br>A. $f(x)$的最小正周期为 $\pi$,最大值为 3　B. $f(x)$的最小正周期为 $\pi$,最大值为 4<br>C. $f(x)$的最小正周期为 $2\pi$,最大值为 3　D. $f(x)$的最小正周期为 $2\pi$,最大值为 4 | 当 $\sin x=0$,$\cos x=1$ 时,函数值为 4,所以 A,C 错误;用 $x+\pi$ 代替 $x$,代入验证,可得 $f(x+\pi)=f(x)$,说明 D 错误.故选 B |
| [2018·全国卷Ⅲ] 下列函数中,其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是 (　　)<br>A. $y=\ln(1-x)$　B. $y=\ln(2-x)$<br>C. $y=\ln(1+x)$　D. $y=\ln(2+x)$ | 函数 $y=\ln x$ 的图像过定点(1,0),而(1,0)关于直线 $x=1$ 对称的点还是(1,0),将(1,0)代入各选项验证.答案:B |
| [2019·天津卷] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant1,\\ \dfrac{1}{x},x>1.\end{cases}$ 若关于 $x$ 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a$($a\in\mathbf{R}$)恰有两个互异的实数解,则 $a$ 的取值范围为 (　　)<br>A. $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$　B. $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$　C. $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$　D. $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$ | 查看四个选项,可以取 $a=1$ 和 $a=\dfrac{5}{4}$ 验证,答案:D |
| [2014·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x)$,$g(x)$的定义域都为 $\mathbf{R}$,且 $f(x)$是奇函数,$g(x)$是偶函数,则下列结论中正确的是 (　　)<br>A. $f(x)g(x)$是偶函数　B. $\lvert f(x)\rvert g(x)$是奇函数<br>C. $f(x)\lvert g(x)\rvert$是奇函数　D. $\lvert f(x)g(x)\rvert$是奇函数 | 取特殊函数 $f(x)=x$,$g(x)=x^2$ 进行验证排除.答案:C |
| [2014·全国卷Ⅰ] 若 $\tan\alpha>0$,则 (　　)<br>A. $\sin\alpha>0$　B. $\cos\alpha>0$　C. $\sin 2\alpha>0$　D. $\cos 2\alpha>0$ | 取 $\alpha=240°$逐个验证选项.答案:C |

**自测题**

1. 若 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$,$\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$,则角 $\theta$ 的终边所在的直线方程为 (　　)

A. $3x-4y=0$　　B. $4x+3y=0$

C. $3x+4y=0$　　D. $4x-3y=0$

2. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$(其中 $\omega>0$)图像的一条对称轴的方程为 $x=\dfrac{\pi}{12}$,则 $\omega$ 的最小值为 (　　)

A. 2　　B. 4

C. 10　　D. 16

3. 已知椭圆 $E$：$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 的一个顶点为 $C(0,-2)$，直线 $l$ 与椭圆 $E$ 交于 $A$，$B$ 两点，若 $E$ 的左焦点为△$ABC$ 的重心，则直线 $l$ 的方程为　　（　　）
   A. $6x-5y-14=0$
   B. $6x-5y+14=0$
   C. $6x+5y+14=0$
   D. $6x+5y-14=0$

4. 已知函数 $f(x)=-x^3-7x+\sin x$，若 $f(a^2)+f(a-2)>0$，则实数 $a$ 的取值范围是　　（　　）
   A. $(-\infty,1)$
   B. $(-\infty,3)$
   C. $(-1,2)$
   D. $(-2,1)$

## 方法三　估算法

由于选择题提供了唯一正确的答案，又不需提供解答过程，因此可以通过猜测、合情推理、估算获得答案，这样往往可以减少运算量.估算省去了很多推导过程和复杂的计算，节省了时间，从而显得快捷.

（1）使用前提：针对一些复杂的、不易准确求值的与计算有关的问题.常与特值法结合起来使用.

（2）使用技巧：对于数值计算，常采用放缩估算、整体估算、近似估算、特值估算等；对于几何体问题，常进行分割、拼凑、位置估算.

（3）常见问题：求几何体的表面积、几何体的体积、三角函数的值、离心率、参数的范围等.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·全国卷Ⅰ] 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt5-1}{2}$ $\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\approx0.618\right.$，称为黄金分割比例$\left.\right)$，著名的“断臂维纳斯”便是如此.此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt5-1}{2}$.若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105 cm，头顶至脖子下端的长度为 26 cm，则其身高可能是　　（　　）<br>A. 165 cm　B. 175 cm　C. 185 cm　D. 190 cm<br><br>图 F-3 | 头顶至脖子下端的长度为 26 cm，可得咽喉至肚脐的长度小于 42 cm，肚脐至足底的长度小于 110 cm，即该人的身高小于 178 cm.<br>又肚脐至足底的长度大于 105 cm，可得头顶至肚脐的长度大于 65 cm，即该人的身高大于 170 cm.故选 B |
| [2019·天津卷] 已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系为　　（　　）<br>A. $a<c<b$　B. $a<b<c$<br>C. $b<c<a$　D. $c<a<b$ | $a=\log_5 2<\log_5\sqrt5=\frac12$，$b=\log_{0.5}0.2=\log_{\frac12}\frac15=\log_2 5>1$，$c=0.5^{0.2}=\left(\frac12\right)^{\frac15}>\frac12$，且 $c=0.5^{0.2}<0.5^0=1$.故选 A |
| [2018·全国卷Ⅲ] 设 $A$，$B$，$C$，$D$ 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，△$ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt3$，则三棱锥 $D$-$ABC$ 体积的最大值为　　（　　）<br>A. $12\sqrt3$　B. $18\sqrt3$<br>C. $24\sqrt3$　D. $54\sqrt3$ | 等边三角形 $ABC$ 的面积为 $9\sqrt3$，显然球心不是此三角形的中心，所以当三棱锥体积最大时，三棱锥的高 $h\in(4,8)$，所以 $\frac13\times9\sqrt3\times4<V_{三棱锥D-ABC}<\frac13\times9\sqrt3\times8$，即 $12\sqrt3<V_{三棱锥D-ABC}<24\sqrt3$，故选 B |
| [2017·全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=\frac15\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为　　（　　）<br>A. $\frac65$　B. 1　C. $\frac35$　D. $\frac15$ | 当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数值大于 1，故选 A |
| [2017·全国卷Ⅱ] 若 $a>1$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是　　（　　）<br>A. $(\sqrt2,+\infty)$　B. $(\sqrt2,2)$　C. $(1,\sqrt2)$　D. $(1,2)$ | 列出关于 $e$ 的表达式，用 $a$ 表示，根据 $a>1$，估算 $e$ 的取值范围.答案：C |

### 自测题

1. 下列数值最接近 $\sqrt2$ 的是　　（　　）
   A. $\sqrt3\cos 14°+\sin 14°$
   B. $\sqrt3\cos 24°+\sin 24°$
   C. $\sqrt3\cos 64°+\sin 64°$
   D. $\sqrt3\cos 74°+\sin 74°$

2. 设 $a=\sqrt2$，$b=e^{-\pi}$，$c=\log_2 3$，则　　（　　）
   A. $b<a<c$　B. $a<b<c$
   C. $b<c<a$　D. $c<b<a$

3. 已知 $\theta\in(0,\pi)$，且 $\sin\theta+\cos\theta=m$，$m\in(0,1)$，则 $\tan\theta$ 的可能取值为　　（　　）
   A. $-3$　B. 3　C. $-\frac13$　D. $\frac13$

# 方法四　构造法

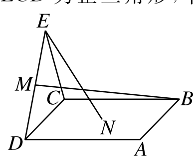
构造法是一种创造性的解题方法，它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想. 利用已知条件和结论的特殊性构造函数、数列、方程或几何图形等，从而简化推理与计算过程，使较复杂的或不易求解的数学问题简单化.

构造法来源于对基础知识和基本方法的积累，需要从一般的方法原理中进行提炼概括、积极联想、横向类比，从曾经类似的问题中找到构造的灵感.

（1）使用前提：所构造的函数、方程、图形等要合理，不能超越原题的条件限制.

（2）使用技巧：对于不等式、方程、函数问题常采用构造新函数，对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

（3）常见问题：比较大小、函数导数问题、不规则的几何体问题等.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·全国卷Ⅲ] 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则　(　　)<br>A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$　B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$<br>C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$　D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$ | 据题意可构造函数 $f(x)=-\lvert x\rvert$(或构造 $f(x)=-x^2$)，代入比较即可. 答案：C |
| [2019·全国卷Ⅲ] 如图 F-4，点 $N$ 为正方形 $ABCD$ 的中心，$\triangle ECD$ 为正三角形，平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$，$M$ 是线段 $ED$ 的中点，则　(　　)<br>A. $BM=EN$，且直线 $BM$，$EN$ 是相交直线<br>B. $BM\neq EN$，且直线 $BM$，$EN$ 是相交直线<br>C. $BM=EN$，且直线 $BM$，$EN$ 是异面直线<br>D. $BM\neq EN$，且直线 $BM$，$EN$ 是异面直线<br><br>图 F-4 | 构造直三棱柱 $DCE\text{-}ABF$，连接 $BE$，$BD$，则 $BM$，$EN$ 为此三角形的两条中线，相交且不相等. 答案：B |
| [2018·全国卷Ⅱ] 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 $AD_1$ 与 $DB_1$ 所成角的余弦值为　(　　)<br>A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的面 $ABB_1A_1$ 的一侧再补添一个完全一样的长方体 $ABC_2D_2\text{-}A_1B_1B_2A_2$，研究 $\triangle AB_2D_1$ 即可. 答案：C |
| [2016·全国卷Ⅰ] 若 $a>b>0$，$0<c<1$，则　(　　)<br>A. $\log_ac<\log_bc$　B. $\log_ca<\log_cb$<br>C. $a^c<b^c$　D. $c^a>c^b$ | 构造函数 $y=\log_cx$，$y=c^x$ 和 $y=x^c$，利用函数的单调性可解决. 答案：B |
| [2015·全国卷Ⅱ] 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 $x$ 的取值范围是　(　　)<br>A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$<br>C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$ | 根据题意构造新函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，先求导再解题. 答案：A |
| [2015·全国卷Ⅱ] 设 $S_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和，且 $a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则 $S_n=$________. | 利用 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 对 $a_{n+1}=S_nS_{n+1}$ 变形，构造等差数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 求解. 答案：$-\frac{1}{n}$ |

**自测题**

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$. 若 $S_5=7$，$S_{10}=21$，则 $S_{15}=$　(　　)
   A. 35　B. 42
   C. 49　D. 63

2. 若 $a=\log_23$，$b=\log_48$，$c=\log_58$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系为　(　　)
   A. $a>b>c$　B. $a>c>b$
   C. $b>a>c$　D. $c>b>a$

3. 已知 $a$，$b$ 是两条异面直线，直线 $c$ 与 $a$，$b$ 都垂直，则下列说法正确的是　(　　)
   A. 若 $c\subset$ 平面 $\alpha$，则 $a\perp\alpha$
   B. 若 $c\perp$ 平面 $\alpha$，则 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$
   C. 存在平面 $\alpha$，使得 $c\perp\alpha$，$a\subset\alpha$，$b/\!/\alpha$
   D. 存在平面 $\alpha$，使得 $c/\!/\alpha$，$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$

4. 若 $e^a+\pi^b\geqslant e^{-b}+\pi^{-a}$，则有　(　　)
   A. $a+b\leqslant0$　B. $a-b\geqslant0$
   C. $a-b\leqslant0$　D. $a+b\geqslant0$

# 思想篇

## 数学思想方法应用

### 思想一　函数与方程思想

函数思想是指用函数的观点、方法去分析问题、转化问题和解决问题.如求数列中的项或最值、不等式中的参量、解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，往往都可利用函数思想构建函数转化为函数问题.

方程思想是从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为方程或方程组去分析问题和解决问题.如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量等问题.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·全国卷Ⅲ] 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前4项和为15，且$a_5=3a_3+4a_1$，则$a_3=$　(　　)<br>A. 16　B. 8　C. 4　D. 2 | 建立关于首项$a_1$与公比$q$的方程组，再求$a_3$.答案：C |
| [2018·全国卷Ⅲ] 设$a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则　(　　)<br>A. $a+b<ab<0$　B. $ab<a+b<0$　C. $a+b<0<ab$　D. $ab<0<a+b$ | 构建函数$y=\log_{0.3}x$，可得$a>0$，$b<0$，且$0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\log_{0.3}0.4<1$，可得$ab<a+b<0$.故选B |
| [2018·天津卷] 已知$a>0$，函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a,x\leqslant 0,\\-x^2+2ax-2a,x>0.\end{cases}$若关于$x$的方程$f(x)=ax$恰有2个互异的实数解，则$a$的取值范围是________. | 就$x$的范围分段处理方程$f(x)=ax$，得到两个含有参数$a$的关于$x$的方程，通过方程根的情况得出$a$的取值范围.答案：(4,8) |
| [2016·全国卷Ⅱ] 圆$x^2+y^2-2x-8y+13=0$的圆心到直线$ax+y-1=0$的距离为1，则$a=$　(　　)<br>A. $-\frac{4}{3}$　B. $-\frac{3}{4}$　C. $\sqrt{3}$　D. 2 | 根据点到直线的距离公式列出方程计算.答案：A |
| [2016·全国卷Ⅱ] 函数$f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$的最大值为　(　　)<br>A. 4　B. 5　C. 6　D. 7 | 先将函数$f(x)$化为关于$\sin x$的二次函数，再用二次函数的性质去解.答案：B |
| [2016·全国卷Ⅰ] 直线$l$经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到$l$的距离为其短轴长的$\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为　(　　)<br>A. $\frac{1}{3}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{3}{4}$ | 根据椭圆中心到直线$l$的距离列出方程，结合$a,b,c$的关系求解.答案：B |

**自测题**

1. 已知点$P$是圆$C:x^2+(y-2)^2=1$上的动点，点$Q$是椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$上的动点，则$|PQ|$的最大值为　(　　)

A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}+1$　B. $\sqrt{13}+1$

C. $2\sqrt{3}+1$　D. 4

2. 已知数列$\{a_n\}$满足$tS_n=n^2-12n$，其中$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和，若$a_1+a_3+a_5=42$，$a_2+a_4=28$，则当$S_n$取最大值时，$n=$　(　　)

A. 7　B. 6　C. 5　D. 4

3. 若函数$f(x)=4\sin x-2\cos 2x+m$在$\mathbf{R}$上的最大值是3，则实数$m=$　(　　)

A. $-6$　B. $-5$

C. $-3$　D. $-2$

4. 在地面上同一地点观测远方匀速垂直上升的热气球，在上午10点整，热气球的仰角是30°，到上午10点20分，热气球的仰角变成34°.请利用下表判断到上午11点整时，热气球的仰角最接近哪个度数　(　　)

| $\theta$ | 30° | 34° | 39° | 40° | 41° | 42° | 43° | 44° | 45° |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $\sin\theta$ | 0.5 | 0.559 | 0.629 | 0.643 | 0.656 | 0.669 | 0.682 | 0.695 | 0.707 |
| $\cos\theta$ | 0.866 | 0.829 | 0.777 | 0.766 | 0.755 | 0.743 | 0.731 | 0.719 | 0.707 |
| $\tan\theta$ | 0.577 | 0.675 | 0.810 | 0.839 | 0.869 | 0.900 | 0.933 | 0.966 | 1.0 |

A. 39°

B. 41°

C. 43°

D. 45°

# 思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·全国卷Ⅰ] 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\|\boldsymbol{a}\|=2\|\boldsymbol{b}\|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 (　　)<br>A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$ | 根据 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$ 可作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 为矩形 $OBCA$ 的对角线向量 $\overrightarrow{OC}$，易得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.答案：B |
| [2019·全国卷Ⅰ] 关于函数 $f(x)=\sin\|x\|+\|\sin x\|$ 有下述四个结论：<br>① $f(x)$ 是偶函数；② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增；<br>③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点；④ $f(x)$ 的最大值为 2.<br>其中所有正确结论的编号是 (　　)<br>A. ①②④　B. ②④　C. ①④　D. ①③ | 易知函数为偶函数，所以只需画出其在区间 $(0,\pi)$ 上的图像，再根据图像判断.答案：C |
| [2018·全国卷Ⅰ] 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$，$O$ 为坐标原点，$F$ 为 $C$ 的右焦点，过 $F$ 的直线与 $C$ 的两条渐近线的交点分别为 $M,N$.若 $\triangle OMN$ 为直角三角形，则 $\|MN\|=$ (　　)<br>A. $\frac{3}{2}$　B. 3　C. $2\sqrt{3}$　D. 4 | 不妨设 $\angle OMF=90^\circ$，由渐近线方程及图形可知，$\|OM\|=\|OF\|\cdot\cos 30^\circ$，$\|MN\|=\|OM\|\cdot\tan 60^\circ$.答案：B |
| [2017·全国卷Ⅱ] 设 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\2x-3y+3\geqslant 0,\\y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是 (　　)<br>A. $-15$　B. $-9$　C. 1　D. 9 | 画出约束条件表示的可行域，结合图形求 $y=-2x+z$ 在 $y$ 轴上的截距的最小值.答案：A |
| [2017·全国卷Ⅲ] 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0,\\2^x,x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1$ 的 $x$ 的取值范围是________. | 先写出函数 $y=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的表达式，原不等式可化为 $f\left(x-\frac{1}{2}\right)>1-f(x)$，画出 $y=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 与 $y=1-f(x)$ 的图像，从图像得解集，答案：$\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$ |

**自测题**

1. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$P$ 为平面 $ABC$ 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是 (　　)

A. $-2$　B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{4}{3}$　D. $-1$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant 0,\\-\ln x,x>0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-a$ 有 3 个零点，则实数 $a$ 的取值范围是 (　　)

A. $[0,4)$　B. $[0,2)$

C. $(-\infty,4]$　D. $(-\infty,2]$

3. 阿波罗尼斯是古希腊数学家，“阿波罗尼斯圆”是他的主要研究成果之一：若动点 $F$ 与两定点 $G,H$ 的距离之比为 $\lambda$ $(\lambda>0$，且 $\lambda\neq 1)$，则点 $F$ 的轨迹就是圆.事实上，互换该定理中的部分题设和结论，命题依然成立.已知点 $M(2,0)$，点 $P$ 为圆 $O:x^2+y^2=16$ 上的点，若存在 $x$ 轴上的定点 $N(t,0)(t>4)$ 和常数 $\lambda$，对满足已知条件的点 $P$ 均有 $|PM|=\lambda|PN|$，则 $\lambda=$ (　　)

A. 1　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$　D. $\frac{1}{4}$

4. 设不等式组 $\begin{cases}x\leqslant 10,\\y\leqslant 12,\\4x+3y\geqslant 52\end{cases}$ 所表示的平面区域为 $D$，若圆 $E$ 落在区域 $D$ 中，则圆 $E$ 的半径的最大值为________.

# 思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是"化整为零，各个击破，再积零为整"的策略. 使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，不重不漏，分类标准统一；三是明确分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种：(1)由概念引起的分类讨论；(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；(3)由数学运算引起的分类讨论；(4)由图形的不确定性引起的分类讨论；(5)由参数的变化引起的分类讨论.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·天津卷] 已知 $a\in\mathbf{R}$,设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a,x\leqslant 1,\\ x-a\ln x,x>1.\end{cases}$ 若关于 $x$ 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则 $a$ 的取值范围为 (　　)<br>A. $[0,1]$　　B. $[0,2]$<br>C. $[0,\mathrm{e}]$　　D. $[1,\mathrm{e}]$ | 由选项可知 $a\geqslant 0$,所以可分 $0\leqslant a\leqslant 1$ 和 $a>1$ 分类求解. 答案:C |
| [2017·全国卷Ⅰ] 设 $A,B$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点. 若 $C$ 上存在点 $M$ 满足 $\angle AMB=120°$,则 $m$ 的取值范围是 (　　)<br>A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$<br>B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$<br>C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$<br>D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$ | 分焦点在 $x$ 轴上和焦点在 $y$ 轴上两种情况讨论. 答案:A |
| [2016·全国卷Ⅲ] 在封闭的直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 $V$ 的球. 若 $AB\perp BC$,$AB=6$,$BC=8$,$AA_1=3$,则 $V$ 的最大值是 (　　)<br>A. $4\pi$　　B. $\frac{9\pi}{2}$<br>C. $6\pi$　　D. $\frac{32\pi}{3}$ | 分球与三棱柱的三个侧面相切和球与三棱柱的上、下两个底面相切进行讨论. 答案:B |
| [2014·全国卷Ⅰ] 设 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant a,\\ x-y\leqslant -1,\end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为 7,则 $a=$ (　　)<br>A. $-5$　　B. 3<br>C. $-5$ 或 3　　D. 5 或 $-3$ | 分 $a>0$ 和 $a\leqslant 0$ 两种情况讨论求解. 答案:B |

**自测题**

1. 已知双曲线 $E$ 的渐近线方程是 $y=\pm 2x$,则 $E$ 的离心率为 (　　)

A. $\sqrt{2}$ 或 2

B. $\sqrt{5}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right),x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1,x>0,\end{cases}$ 若 $f(x)\geqslant ax-1$ 恒成立,则实数 $a$ 的取值范围是 (　　)

A. $[0,+\infty)$　　B. $[0,\mathrm{e}]$

C. $[0,1]$　　D. $[\mathrm{e},+\infty)$

3. 有 7 名大学生(4 男 3 女)分成两组进行夜跑,到达终点再会合,若要求女生不能单独成组,且每组最少 2 人,则不同的分组方法共有 (　　)

A. 52 种

B. 55 种

C. 104 种

D. 110 种

4. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}+a$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 时有两个零点,则实数 $a$ 的取值范围是 (　　)

A. $\left[\frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},-1\right)$

B. $\left[\frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},1\right)$

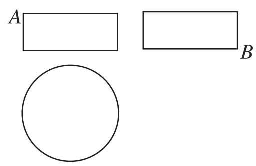
C. $\left[\frac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}},-1\right]$

D. $[-1,\mathrm{e})$

# 思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时，采用某种手段将问题转化，使问题得以解决的一种思维策略，其核心是把复杂的问题化归为简单的问题，将较难的问题化归为较容易求解的问题，将未能解决的问题化归为已经解决的问题.

常见的转化与化归思想应用具体表现在：将抽象函数问题转化为具体函数问题，立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形，“至少”或“是否存在”等正向思维受阻转化为逆向思维，空间与平面的转化，相等问题与不等问题的转化等.

| 示例 | 解法关键 |
| --- | --- |
| [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在$[0,2\pi]$的零点个数为　(　　)<br>A. 2　　B. 3<br>C. 4　　D. 5 | 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在$[0,2\pi]$的零点问题转化为函数 $h(x)=2\sin x$ 与 $g(x)=\sin 2x$ 图像的交点问题. 答案：B |
| [2018·北京卷] 在平面直角坐标系中，记 $d$ 为点$P(\cos\theta,\sin\theta)$到直线 $x-my-2=0$ 的距离. 当 $\theta,m$ 变化时，$d$ 的最大值为　(　　)<br>A. 1　　B. 2<br>C. 3　　D. 4 | $P$ 为单位圆上一点，原问题转化为求圆心(定点)到直线的距离，而直线过定点，这样进一步转化为圆心与直线所过定点间的距离问题. 答案：C |
| [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_. | 利用导数的符号与导数为 0 进行求解. 答案：$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ |
| [2018·全国卷Ⅰ] 某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如图 S-1 所示. 圆柱表面上的点 $M$ 在正视图上的对应点为 $A$，圆柱表面上的点 $N$ 在左视图上的对应点为 $B$，则在此圆柱侧面上，从 $M$ 到 $N$ 的路径中，最短路径的长度为　(　　)<br>A. $2\sqrt{17}$　　B. $2\sqrt{5}$<br>C. 3　　D. 2<br><br>图 S-1 | 首先根据题中所给的三视图，得到点 $M$ 和点 $N$ 在圆柱上所处的位置，点 $M$ 在上底面上，点 $N$ 在下底面上，并且将圆柱的侧面展开图平铺，点 $M,N$ 在其四分之一的矩形的对角线的端点处，根据平面上两点间直线段最短，利用勾股定理，求得结果. 答案：B |
| [2017·全国卷Ⅰ] 设 $A,B$ 是椭圆 $C$：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点. 若 $C$ 上存在点 $M$ 满足$\angle AMB=120°$，则 $m$ 的取值范围是　(　　)<br>A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　　B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$<br>C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$ | 将椭圆上的点 $M$ 作为短轴的一个端点去处理. 答案：A |
| [2017·全国卷Ⅱ] 已知函数$f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$时，$f(x)=2x^3+x^2$，则$f(2)=$________. | 根据函数的性质，$f(2)=-f(-2)$. 答案：12 |

**自测题**

1. 如图 S-2 所示，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 $a$，底面边长为 $b$，一只蚂蚁从点 $A$ 出发沿每个侧面爬到 $A_1$，路线为 $A—M—N—A_1$，则蚂蚁爬行的最短路程是　(　　)

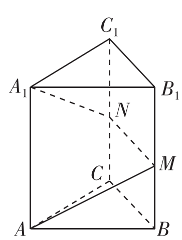


图 S-2

A. $\sqrt{a^2+9b^2}$

B. $\sqrt{9a^2+b^2}$

C. $\sqrt{4a^2+9b^2}$

D. $\sqrt{a^2+b^2}$

2. 若命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，不等式$x_0^2+mx_0+m^2-1\leqslant 0$”为假命题，则实数 $m$ 的取值范围是　(　　)

A. $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

B. $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]\cup\left[\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

D. $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

3. 如图 S-3 所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，沿对角线 $AC$ 将其折成直二面角，连接 $BD$，则三棱锥 $D\text{-}ABC$ 的体积为________.

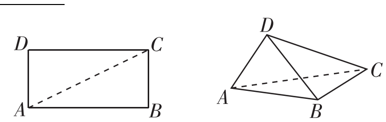


图 S-3

4. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，则不等式 $f(x^2-4)+f(3x)>0$ 的解集为____________.

# 自习篇
## 集合与常用逻辑用语、复数、不等式、算法框图与推理证明

### 温习一　集合

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,5\}$，则下列结论正确的是　(　　)
   A. $B\subseteq A$　　B. $\complement_U A=\{1,5\}$
   C. $A\cup B=\{3\}$　　D. $A\cap B=\{2,4,5\}$
2. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2\geqslant 4\}$，则图 Z-1 中阴影部分所表示的集合为　(　　)

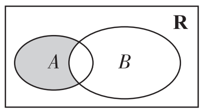


图 Z-1

   A. $\{-2,-1,0,1\}$
   B. $\{0\}$
   C. $\{-1,0\}$
   D. $\{-1,0,1\}$
3. 已知集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x\mid x=2m,m\in A\}$，则 $A\cup B$ 的所有元素之和为　(　　)
   A. 21　　B. 17
   C. 15　　D. 13
4. 若集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,4\}$，$C=A\cap B$，则 $C$ 的子集共有　(　　)
   A. 2 个　　B. 3 个
   C. 4 个　　D. 6 个
5. 设集合 $A=\{-1\}$，$B=\{x\mid x^2+mx-3=1\}$，若 $A\subseteq B$，则 $m=$________.
6. 设集合 $A=\{2,\ln x\}$，$B=\{x,y^2\}$，若 $A\cap B=\{0\}$，则 $y$ 的值为____________.

**【考场点拨】**

对于集合的考查，难度一般较小，是很容易得分的题目，但在做题中要注意以下几点：(1)关于子集和真子集的包含关系，确定有关参数的取值范围的问题，可以借助数轴来完成；(2)关于集合内元素的个数要考虑元素的互异性；(3)判断集合与集合之间的关系时，要注意考虑空集.

### 温习二　常用逻辑用语

1. “$\frac{1}{2}<x<1$”是“不等式 $|x-1|<1$ 成立”的　(　　)
   A. 充分条件
   B. 必要条件
   C. 充分必要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. 设命题 $p$：$\exists x_0<0$，$e^{x_0}-x_0>1$，则 $\neg p$ 为　(　　)
   A. $\forall x\geqslant 0$，$e^x-x>1$
   B. $\forall x<0$，$e^x-x\leqslant 1$
   C. $\exists x_0\geqslant 0$，$e^{x_0}-x_0\leqslant 1$
   D. $\exists x_0<0$，$e^{x_0}-x_0\leqslant 1$
3. 已知命题 $p$：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$\lg\cos x_0>0$；命题 $q$：$\forall x<0$，$3^x>0$，则下列命题为真命题的是　(　　)
   A. $p\wedge q$
   B. $p\vee\neg q$
   C. $\neg p\wedge\neg q$
   D. $p\vee q$
4. 下列有关命题的说法正确的是　(　　)
   A. 若 $p\wedge q$ 为假命题，则 $p,q$ 均为假命题
   B. “$x=-1$”是“$x^2-5x-6=0$”的必要不充分条件
   C. 命题“若 $x>1$，则 $\frac{1}{x}<1$”的逆否命题为真命题
   D. 命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+x_0+1<0$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+x+1\geqslant 0$”
5. 若“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+x_0+m<0$”是假命题，则实数 $m$ 的取值范围是________.
6. 已知 $a\in\mathbf{R}$，$p$：$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\geqslant 0$，$q$：$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$x_0^2+2ax_0+2-a=0$，若命题 $p\wedge q$ 为真命题，则实数 $a$ 的取值范围是________.

**【考场点拨】**

(1)有关特称命题的否定问题，在求解的时候，要明确特称命题的否定形式.(2)判断充要条件时应注意：首先弄清条件 $p$ 和结论 $q$ 分别是什么，然后直接依据定义、定理、性质尝试由 $p$ 推导 $q$，由 $q$ 推导 $p$.对于带有否定性的命题或比较难判断的命题，除借助集合思想化抽象为直观外，还可利用原命题和逆否命题、逆命题和否命题的等价性，转化为判断它的等价命题；对于范围问题也可以转化为包含关系来处理.

### 温习三　复数

1. [2019·全国卷Ⅲ] 若 $z(1+i)=2i$，则 $z=$　(　　)
   A. $-1-i$　　B. $-1+i$
   C. $1-i$　　D. $1+i$
2. 已知复数 $z=-\frac{1}{i}-1$，则它的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为　(　　)
   A. $(-1,-1)$
   B. $(-1,1)$
   C. $(1,2)$
   D. $(1,-2)$
3. 已知复数 $z=\frac{a-i}{2-i}$ 为纯虚数，则实数 $a=$　(　　)
   A. 2　　B. $\frac{1}{2}$
   C. $-2$　　D. $-\frac{1}{2}$
4. 已知复数 $z$ 满足 $z(1-i)=2i$，其中 i 为虚数单位，则 $|z-3i|=$　(　　)
   A. 9　　B. 3
   C. 5　　D. $\sqrt{5}$
5. 下面关于复数 $z=\frac{2}{-1-i}$ 的四个命题：
   $p_1$：$|z|=2$；$p_2$：$z$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(-1,-1)$；$p_3$：$z$ 的虚部为 $-1$；$p_4$：$z^2=-2i$.
   其中是真命题的是　(　　)
   A. $p_2,p_3$　　B. $p_1,p_2$
   C. $p_2,p_4$　　D. $p_3,p_4$

6. 欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$（i 为虚数单位）是由瑞士著名数学家欧拉发明的，它将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数与指数函数的关系，它在复变函数论里占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”，$\dfrac{i}{e^{\frac{\pi}{4}i}}$表示的复数对应的点位于复平面内（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

【考场点拨】

(1)复数代数形式的加减乘除运算的法则是进行复数运算的理论依据，加减运算类似于多项式的合并同类项，乘法运算类似于多项式的乘法，除法运算则先将除式写成分式的形式，再将分母实数化.(2)要熟悉复数的基本概念，如复数 $a+bi$($a,b\in\mathbf{R}$)的实部为 $a$、虚部为 $b$、模为 $\sqrt{a^2+b^2}$、对应点为$(a,b)$、共轭复数为 $a-bi$.

## 温习四　不等式

1. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$

B. 若 $a>b$，则$\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$

C. 若 $a>b$，则 $a^3>b^3$

D. 若 $a>b,c>0$，则 $a^c>b^c$

2. 已知实数 $x,y$ 满足$\begin{cases}y\geqslant 3x-3,\\2y\leqslant x+4,\\3x+4y+12\geqslant 0,\end{cases}$则 $z=2x-y+2$ 的最大值是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 已知点 $A(3,1)$在直线 $y=mx+n$ $(m>0,n>0)$上，则$\dfrac{1}{m}+\dfrac{3}{n}$的最小值为（　　）

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

4. 高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，函数 $y=[x]$($x\in\mathbf{R}$)称为高斯函数，其中$[x]$表示不超过 $x$ 的最大整数，例如：$[-2.1]=-3$，$[3.1]=3$.已知函数 $f(x)=\dfrac{2^{x+1}}{1+2^{2x}}$，则函数 $y=[f(x)]$的值域是（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $(0,1]$

C. $(0,1)$　　D. $\{-1,0,1\}$

5. 若 $x,y$ 满足约束条件$\begin{cases}x+2y-2\geqslant 0,\\x-3y+3\geqslant 0,\\2x-y-4\leqslant 0,\end{cases}$目标函数 $z=ax+y$ 仅在点(2,0)处取得最小值，则实数 $a$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

C. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

6. 若变量 $x,y$ 满足不等式组$\begin{cases}x-y+2\geqslant 0,\\x-5y+10\leqslant 0,\\x+y-8\leqslant 0,\end{cases}$则 $z=\dfrac{y}{x+2}$的最大值为________.

【考场点拨】

(1)与不等式的性质相关的选择题，可以用特殊值排除法求解；(2)解决线性规划问题要做好以下两个方面：①正确作出不等式组表示的平面区域；②结合目标函数的几何意义，常见的有截距、距离、斜率等，求最值或取值范围.

## 温习五　算法框图

1. 执行如图 Z-2 所示的程序框图，若输入的 $n=4$，则输出的 $j=$（　　）

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

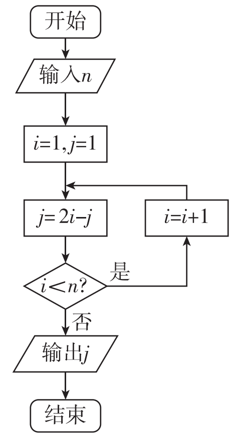



图 Z-2

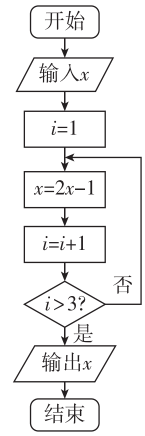



图 Z-3

2. “我有一壶酒，携着游春走，遇店添一倍，逢友饮一斗，店友经三处，没了壶中酒，借问此壶中，当原多少酒？”该问题用程序框图表达如图 Z-3 所示，为了使最终输出的 $x=0$，则一开始输入的 $x=$（　　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{7}{8}$

C. $\dfrac{15}{16}$　　D. $\dfrac{31}{32}$

3. 阅读如图 Z-4 所示的程序框图，若输入的 $k=9$，则该算法的功能是（　　）

A. 计算数列$\{2^{n-1}\}$的前 10 项和

B. 计算数列$\{2^{n-1}\}$的前 9 项和

C. 计算数列$\{2^n-1\}$的前 10 项和

D. 计算数列$\{2^n-1\}$的前 9 项和

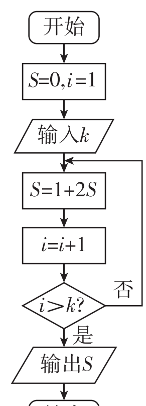



图 Z-4

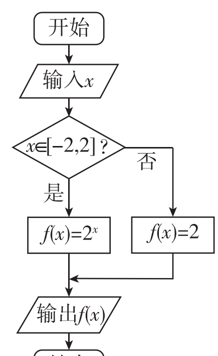



图 Z-5

4. 阅读程序框图 Z-5，如果输出的函数值在区间$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$内，则输入的实数 $x$ 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,-1]$

C. $[-1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

5. 《九章算术》“盈不足”章中有这样一则故事：“今有良马与驽马发长安至齐.齐去长安三千里.良马初日行一百九十三里，日增十三里；驽马初日行九十七里，日减半里.”为了计算每天良马和驽马所走的路程之和，设计框图如图 Z-6 所示，若输出的 $S$ 的值为 365，则判断框中可填　(　　)

A. $i>6$?　　B. $i>7$?

C. $i>8$?　　D. $i>9$?

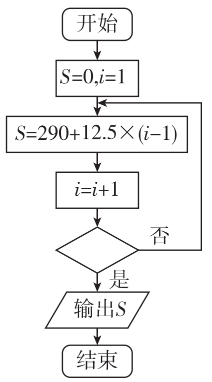


图 Z-6

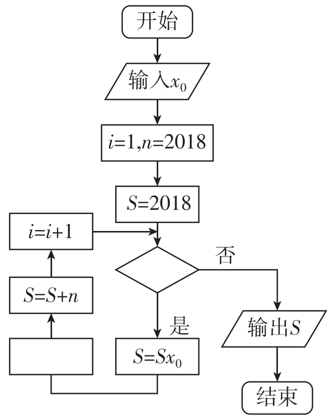


图 Z-7

6. 南宋数学家秦九韶在《数书九章》中提出的秦九韶算法至今仍是多项式求值比较先进的算法.已知 $f(x)=2018x^{2017}+2017x^{2016}+\cdots+2x+1$，如图 Z-7 所示的程序框图设计的是求 $f(x_0)$ 的值，在“　　”和“　　”中应填入的执行语句分别是　(　　)

A. $i\leqslant 2016$? 和 $n=$i

B. $i\leqslant 2017$? 和 $n=i+1$

C. $i\leqslant 2016$? 和 $n=2017-i$

D. $i\leqslant 2017$? 和 $n=2018-i$

【考场点拨】

解决程序框图问题时一定要注意以下几点：①不要混淆处理框和输入框；②注意区分程序框图是条件结构还是循环结构；③注意区分当型循环结构和直到型循环结构；④处理循环结构的问题时一定要正确控制循环次数；⑤要注意各个框的顺序；⑥在给出程序框图求解输出结果的试题中只要按照程序框图规定的运算方法逐次计算，直到达到输出条件即可.

## 温习六　推理证明

1. 在一次学校组织的中华传统文化知识竞赛中，甲、乙、丙三个小组参加比赛，比赛共分两个阶段，每一题答对得 5 分，不答得 0 分，答错扣 3 分.已知甲组在第一阶段的得分是 80 分，进入第二阶段甲组只答对了 20 道题，则下列哪一个分数可能是甲组的最终得分　(　　)

A. 195　　B. 177

C. 179　　D. 178

2. 甲、乙、丙、丁四名同学参加某次过关考试，甲、乙、丙三个人分别去老师处询问成绩，老师给每个人只提供了其他三人的成绩.然后，甲说：“我们四个人中至少两人不过关；”乙说：“我们四人中至多两人不过关；”丙说：“甲、乙、丁恰好有一人过关.”假设他们说的都是真的，则下列结论正确的是　(　　)

A. 甲没过关　　B. 乙过关

C. 丙过关　　D. 丁过关

3. [2019·全国卷Ⅱ] 2019 年 1 月 3 日嫦娥四号探测器成功实现人类历史上首次月球背面软着陆，我国航天事业取得又一重大成就.实现月球背面软着陆需要解决的一个关键技术问题是地面与探测器的通讯联系.为解决这个问题，发射了嫦娥四号中继星“鹊桥”，鹊桥沿着围绕地月拉格朗日 $L_2$ 点的轨道运行.$L_2$ 点是平衡点，位于地月连线的延长线上.设地球质量为 $M_1$，月球质量为 $M_2$，地月距离为 $R$，$L_2$ 点到月球的距离为 $r$，根据牛顿运动定律和万有引力定律，$r$ 满足方程：$\frac{M_1}{(R+r)^2}+\frac{M_2}{r^2}=(R+r)\frac{M_1}{R^3}$.

设 $\alpha=\frac{r}{R}$.由于 $\alpha$ 的值很小，因此在近似计算中 $\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3$，则 $r$ 的近似值为　(　　)

A. $\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}R$　B. $\sqrt{\frac{M_2}{2M_1}}R$　C. $\sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}R$　D. $\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R$

4. 在某次国际交流活动中，组织者在某天上午安排了六场专家报告(时间如下，转场时间忽略不计)，并要求听报告者不能迟到和早退.

| 报告名称 | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 开始时间 | 8:00 | 8:10 | 8:45 | 8:40 | 9:15 | 9:25 |
| 结束时间 | 8:30 | 9:05 | 9:20 | 9:30 | 10:10 | 10:10 |

某单位派甲、乙两人参加报告，为了获得更多的信息，单位要求甲、乙两人所听报告不相同，且所听报告的总时间尽可能长，那么甲、乙两人应该舍去的报告名称为________.

5. 埃及数学家发现了一个独特现象：除 $\frac{2}{3}$ 用一个单独的符号表示以外，其他形如 $\frac{2}{n}(n=5,7,9,\cdots)$ 的分数都可写成若干个单分数(分子为 1 的分数)和的形式，例如 $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$，我们可以这样理解：假定有 2 个面包，要平均分给 5 人，如果每人得 $\frac{1}{2}$，不够分，每人得 $\frac{1}{3}$，余 $\frac{1}{3}$，再将这 $\frac{1}{3}$ 分成 5 份，每人得 $\frac{1}{15}$，这样每人分得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$.故我们可以得出形如 $\frac{2}{n}(n=5,7,9,11,\cdots)$ 的分数的分解：$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$，$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$，$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$，….按此规律，$\frac{2}{11}=$________.

6. 一球筐中装有 $n$ 个小球，甲、乙两个同学轮流且不放回地抓球，每次最少抓一个球，最多抓三个球，规定：由甲先抓，且谁抓到最后一个球谁赢.则以下推断中正确的有________.

①若 $n=4$，则乙有必赢的策略；②若 $n=6$，则甲有必赢的策略；③若 $n=9$，则甲有必赢的策略.

【考场点拨】

常见的归纳推理分为数的归纳和形的归纳两类：(1)数的归纳包括数的归纳和式子的归纳，解决此类问题时，需要细心观察，寻求相邻项及项与序号之间的关系，同时还要联系相关的知识，如等差数列、等比数列等；(2)形的归纳主要包括图形数目的归纳和图形变化规律的归纳，对于逻辑推理题，由于关系较复杂，所以常用表格形式列出相互关系，再逐个进行推理验证.

01 模块一

# 函数与导数

## 第1讲 函数的图像与性质

## Z 真知真题扫描

必备知识结论 高考真题验证

### ■ 必备知识

函数的图像

(1)函数图像的平移口诀:“左加右减”“上加下减”.

(2)函数图像的对称性

①函数 $y=f(-x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $y$ 轴对称;

②函数 $y=-f(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像关于 $x$ 轴对称;

③函数 $y=-f(-x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称.

(3)函数图像的翻折变换

①将函数 $y=f(x)$ 的图像保留 $x$ 轴上方的部分并把 $x$ 轴下方的部分关于 $x$ 轴作对称就得到函数 $y=|f(x)|$ 的图像;

②将函数 $y=f(x)$ 的图像去掉 $y$ 轴左侧的部分,保留 $y$ 轴右侧的部分并把它关于 $y$ 轴作对称就得到函数 $y=f(|x|)$ 的图像.

(4)函数图像的伸缩变换

①将函数 $y=f(x)$ 的图像上所有点的横坐标不变,纵坐标伸长($a>1$)或缩短($0<a<1$)到原来的 $a$ 倍,得到函数 $y=af(x)$ 的图像;

②将函数 $y=f(x)$ 的图像上所有点的纵坐标不变,横坐标伸长($a>1$)或缩短($0<a<1$)到原来的 $\frac{1}{a}$,得到函数 $y=f(ax)$ 的图像.

### ■ 必备结论

函数的性质

(1)函数的单调性

①当 $f(x)$,$g(x)$ 在相同的定义域上同为增(减)函数时,$f(x)+g(x)$ 为增(减)函数;

②复合函数的单调性符合“同增异减”的原则.

(2)函数的奇偶性

①奇函数在关于原点对称的两个区间上有相同的单调性,偶函数在关于原点对称的两个区间上有相反的单调性.

②若 $f(x)$,$g(x)$ 均为偶函数,$m(x)$,$n(x)$ 均为奇函数,且 $f(x)$,$g(x)$,$m(x)$,$n(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$,则有以下结论:$f(x)+g(x)$,$f(x)-g(x)$,$f(x)\cdot g(x)$ 均是偶函数;$m(x)+n(x)$,$m(x)-n(x)$ 均是奇函数,$m(x)\cdot n(x)$ 是偶函数;$f(x)\cdot m(x)$ 是奇函数.

③在 $x=0$ 处有定义的奇函数的图像必过原点,存在既是奇函数也是偶函数的函数.

(3)函数的周期性

①若 $f(x+T)=f(x)$,则 $T$ 是 $f(x)$ 的周期;

②若 $f(x+T)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$,则 $2T$ 是 $f(x)$ 的周期;

③若 $f(x+T)=-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$,则 $2T$ 是 $f(x)$ 的周期;

④若 $f(x+a)=f(x+b)(a\neq b)$,则 $T=|a-b|$ 是 $f(x)$ 的周期.

(4)函数的对称性

①$f(a-x)=f(a+x)\Leftrightarrow f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称;

②$f(a-x)=f(b+x)\Leftrightarrow f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称;

③$f(a-x)+f(a+x)=2b\Leftrightarrow f(x)$ 的图像关于点 $(a,b)$ 对称;

④$y=f(x+a)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称;

⑤$y=f(x+a)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称.

(5)函数的对称性与周期性

①若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和直线 $x=b(b\neq a)$ 对称,则 $T=2|b-a|$ 是 $f(x)$ 的周期;

②若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)(b\neq a)$ 对称,则 $T=2|b-a|$ 是 $f(x)$ 的周期;

③若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)(b\neq a)$ 对称,则 $T=4|b-a|$ 是 $f(x)$ 的周期.

### ■ 真题验证

1. [2016·全国卷Ⅱ 10] 下列函数中,其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ( )

A. $y=x$  B. $y=\lg x$

C. $y=2^x$  D. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

2. [2018·全国卷Ⅰ 12] 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x},x\leqslant 0,\\1,x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 $x$ 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1]$  B. $(0,+\infty)$

C. $(-1,0)$  D. $(-\infty,0)$

3. [2019·全国卷Ⅲ 12] 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,则 ( )

A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})$

B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})$

C. $f(2^{-\frac{3}{2}})>f(2^{-\frac{2}{3}})>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$

D. $f(2^{-\frac{2}{3}})>f(2^{-\frac{3}{2}})>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$

4. [2019·全国卷Ⅱ 6] 设 $f(x)$ 为奇函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=e^x-1$,则当 $x<0$ 时,$f(x)=$ ( )

A. $e^{-x}-1$  B. $e^{-x}+1$

C. $-e^{-x}-1$  D. $-e^{-x}+1$

5. [2018·全国卷Ⅱ12] 已知 $f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数,满足 $f(1-x)=f(1+x)$.若 $f(1)=2$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ (　　)

A. $-50$　　B. 0

C. 2　　D. 50

6. [2017·全国卷Ⅱ8] 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$的单调递增区间是 (　　)

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

7. [2017·全国卷Ⅲ7] 函数 $y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$的部分图像大致为 (　　)

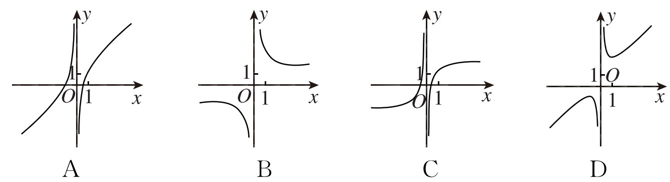



图 M1-1-1

8. [2018·全国卷Ⅲ16] 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$,$f(a)=4$,则$f(-a)=$________.

9. [2017·全国卷Ⅱ14] 已知函数$f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f(x)=2x^3+x^2$,则$f(2)=$________.

## K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

### 小题 1　函数的概念与表示

**例 1** (1)若函数 $f(x)$的定义域为$[1,8]$,则函数$\frac{f(2^x)}{x-3}$的定义域为 (　　)

A. $(0,3)$　　B. $[1,3)\cup(3,8]$

C. $[1,3)$　　D. $[0,3)$

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-2},x\leqslant 2,\\-\log_2(x+2),x>2,\end{cases}$若 $f(a)=-3$,则 $f(6-a)=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)函数定义域的求解策略:①若 $f(x)$的定义域为$[m,n]$,则在 $f[g(x)]$中,$m\leqslant g(x)\leqslant n$,从中解得 $x$ 的范围即为 $f[g(x)]$的定义域;②若 $f[g(x)]$的定义域为$[m,n]$,则由 $m\leqslant x\leqslant n$ 确定的 $g(x)$的范围即为 $f(x)$的定义域.

(2)高考对分段函数的考查,主要是分段函数的求值、利用分段函数的单调性求参数的取值范围.求分段函数的奇偶性,或利用分段函数的奇偶性求参数的值.

**自测题**

1. 若函数 $f(x)=\sqrt{2-x}\ln(x+1)$,则函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$的定义域为 (　　)

A. $(-1,2]$　　B. $(-1,1)$

C. $(-2,2)$　　D. $[-2,2]$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+2^{x-1},x\geqslant 2,\\3+\log_2(2-x),x<2,\end{cases}$则 $f[f(0)]=$ (　　)

A. 4　　B. 8

C. 9　　D. 17

3. 已知函数 $f(x)=2^{x^2-a}$,$f(\sqrt{3})=\frac{1}{4}$,则 $f(-\sqrt{2})=$ (　　)

A. 1　　B. $-\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{8}$

### 小题 2　函数的性质及应用

**例 2** (1)若函数 $f(x)=xg(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,在$(-\infty,0)$上是增函数,且 $f(1)=0$,$g(0)=0$,则使得 $g(x)<0$的 $x$ 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$

D. $(-\infty,-1)$

(2)已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,当 $x<0$ 时,$f(x)=x^3-1$;当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(-x)=-f(x)$;当 $x>\frac{1}{2}$时,$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$.则 $f(2019)=$ (　　)

A. $-2$　　B. $-1$

C. 0　　D. 2

(3)已知函数 $f(x)=\frac{m}{3^x-1}-\frac{5}{2}$的图像关于点$(0,2)$对称,则 $f(x)>11$ 的解集为 (　　)

A. $(-1,0)$

B. $(-1,0)\cup(0,1)$

C. $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

D. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

在利用函数的奇偶性解决问题时，必须注意以下几点：①函数的定义域必须关于原点对称；②凡是具有奇偶性的函数，在关于原点对称的区间上其函数值、图像、解析式、单调性都有密切的联系；③当奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义时，一定有 $f(0)=0$.

**自测题**

1. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$，则下列判断正确的是 （　　）
   A. 函数 $f(x)$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数
   B. 函数 $f(x)$ 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数
   C. 函数 $f(x)$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数
   D. 函数 $f(x)$ 是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

2. 已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, x\geqslant1,\\ ax+a-2, x<1\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，那么实数 $a$ 的取值范围是 （　　）
   A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,1)$
   C. $(1,2)$　　D. $(1,2]$

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x\ln x-1$，则 $f(1)+f(-e)=$ （　　）
   A. $-e$　　B. $-e+1$
   C. $e-1$　　D. $e-2$

4. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x-1)$，且当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=3^x+\frac{4}{9}$，则 $f(\log_{\frac{1}{3}}5)=$ （　　）
   A. $-1$　　B. $0$
   C. $1$　　D. $2$

5. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $f(1)=a$，则 $f(2)+f(3)+f(4)=$ （　　）
   A. $0$　　B. $-a$
   C. $a$　　D. $3a$

6. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，若存在常数 $a,b$，使得对定义域内的任意 $x$，都有 $f(x)+f(2a-x)=2b$ 成立，则 $a+b=$________.

## 小题 3　函数的图像及应用

**例 3** (1)[2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为 （　　）

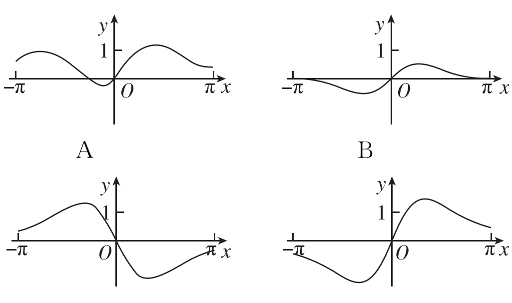


图 M1-1-2

(2) 函数 $f(x)=xe^{-|x|}$ 的图像可能是 （　　）

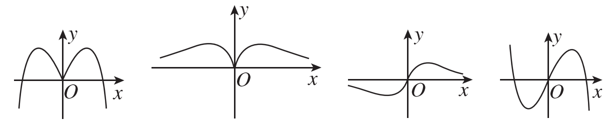


图 M1-1-3

[听课笔记]

【考场点拨】

识别函数图像常用的方法：(1)由函数的定义域判断函数图像的左、右端点，由函数的值域判断函数图像的上、下顶点；(2)由函数的单调性判断函数图像的变化趋势；(3)由函数的奇偶性判断函数图像的对称性；(4)由函数的周期性识别图像；(5)由函数图像的特征点(特殊点)排除不合要求的图像.

**自测题**

1. 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为 （　　）

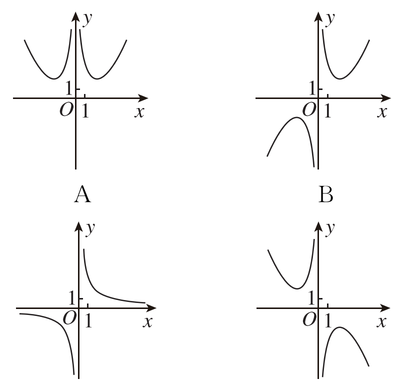


图 M1-1-4

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，且函数 $f(x+3)$ 是偶函数，则 $a=f(0.3^{1.1})$，$b=f(3^{0.5})$，$c=f(0)$ 的大小关系是 （　　）
   A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$
   C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

3. 函数 $f(x)=\ln x$ 的图像与函数 $g(x)=x^2-4x+4$ 的图像的交点个数为 （　　）
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 函数 $f(x)=e^{\frac{(x-n)^2}{m}}$(其中 e 为自然对数的底数)的图像如图 M1-1-5 所示，则 （　　）
   A. $m>0,0<n<1$
   B. $m>0,-1<n<0$
   C. $m<0,0<n<1$
   D. $m<0,-1<n<0$

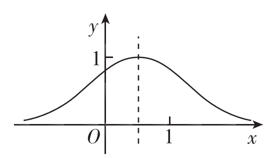


图 M1-1-5

请完成 限时集训(一)

# 第2讲　基本初等函数、函数与方程

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

1. 幂函数的图像和性质

幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像都过点(1,1),若 $\alpha>0$,则幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在第一象限内单调递增;若 $\alpha<0$,则幂函数 $y=x^{\alpha}$ 在第一象限内单调递减.

2. 指数函数与对数函数的图像和性质

当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 是增函数;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 是减函数.对于求解与指数函数、对数函数的单调性有关的题目时要注意根据底数 $a$ 的取值范围分类讨论.

3. 函数零点个数的判断方法

①直接求零点:令 $f(x)=0$,若该方程有解,则该方程有几个解函数 $f(x)$就有几个零点;

②利用零点存在性定理判断:若函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的图像连续不断,并且在区间端点处的函数值符号相反,即 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在区间$(a,b)$内,函数 $y=f(x)$至少有一个零点,即相应的方程 $f(x)=0$ 在区间$(a,b)$内至少有一个实数解;

③利用函数的图像判断:把函数的零点问题等价地转化为两个函数图像的交点问题,通过判断交点个数得出函数零点的个数.

### ■ 必备结论

1. 定点

指数函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$过定点$(1,a)$,$(0,1)$;对数函数 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$过定点$(1,0)$,$(a,1)$.

2. 底数 $a$ 的变化对函数图像的影响

(1)指数函数:

①当 $a>1$ 时,在第一象限内,$a$ 越大图像越靠近 $y$ 轴;

②当 $0<a<1$ 时,在第一象限内,$a$ 越小图像越靠近 $x$ 轴.

(2)对数函数:

①当 $a>1$ 时,在第一象限内,$a$ 越大图像越靠近 $x$ 轴;

②当 $0<a<1$ 时,在第一象限内,$a$ 越小图像越靠近 $y$ 轴.

### ■ 真题验证

1. [2019·全国卷Ⅰ3] 已知 $a=\log_2 0.2$,$b=2^{0.2}$,$c=0.2^{0.3}$,则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

2. [2017·全国卷Ⅰ9] 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$,则 (　　)

A. $f(x)$在$(0,2)$单调递增

B. $f(x)$在$(0,2)$单调递减

C. $y=f(x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$的图像关于点$(1,0)$对称

3. [2019·北京卷7] 在天文学中,天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$,其中星等为 $m_k$ 的星的亮度为 $E_k(k=1,2)$.已知太阳的星等是$-26.7$,天狼星的星等是$-1.45$,则太阳与天狼星的亮度的比值为 (　　)

A. $10^{10.1}$　　B. $10.1$

C. $\lg 10.1$　　D. $10^{-10.1}$

4. [2018·全国卷Ⅲ7] 下列函数中,其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是 (　　)

A. $y=\ln(1-x)$

B. $y=\ln(2-x)$

C. $y=\ln(1+x)$

D. $y=\ln(2+x)$

5. [2017·全国卷Ⅲ12] 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$有唯一零点,则 $a=$ (　　)

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

6. [2018·全国卷Ⅰ13] 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$,若 $f(3)=1$,则 $a=$________.

# K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

## 小题 1　基本初等函数的图像与性质

**例1** (1)已知定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=2019^x$. 若 $a=f(\ln 3e)$，$b=f(0.2^{0.3})$，$c=f\left(-\frac{3}{2}\right)$，则 $a,b,c$ 的大小关系是　　(　　)

A. $b<a<c$　　B. $c<b<a$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

(2)已知函数 $y=\log_2(ax-1)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是________.

[听课笔记]

【考场点拨】

对于实数大小的比较问题，我们通常是运用基本初等函数的单调性来解决. 在指数函数中，当底数或指数不相同时，不能直接利用函数的单调性进行比较，这就必须掌握一些特殊方法. 在进行指数幂的大小比较时，若底数不同，则首先考虑将其转化成同底数，然后再根据指数函数的单调性进行判断. 对于不同底而同指数的指数幂的大小比较，可利用图像法求解，既快捷，又准确.

**自测题**

1. 计算：$2\lg 2+\lg 25+(\sqrt{3}-1)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=$　　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

2. 已知点 $(m,8)$ 在幂函数 $f(x)=(m-1)x^n$ 的图像上，设 $a=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$b=f(\ln\pi)$，$c=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $a,b,c$ 的大小关系为　　(　　)

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

3. [2019·浙江卷] 在同一直角坐标系中，函数 $y=\frac{1}{a^x}$，$y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ $(a>0$，且 $a\neq1)$ 的图像可能是　　(　　)

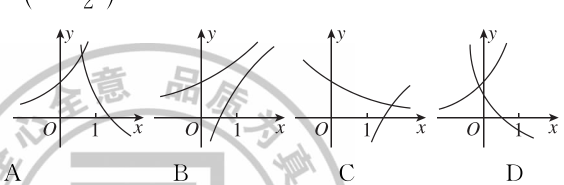



图 M1-2-1

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则　　(　　)

A. $f(-3)<f(-\log_3 13)<f(2^{0.6})$

B. $f(-3)<f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)$

C. $f(2^{0.6})<f(-\log_3 13)<f(-3)$

D. $f(2^{0.6})<f(-3)<f(-\log_3 13)$

## 小题 2　函数的零点

**例2** (1)函数 $f(x)=x^2-2x-1-|x-1|$ 的所有零点之和为________.

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+2x+a(x\leqslant0),\\ ax-3(x>0)\end{cases}$ 有且只有 1 个零点，则实数 $a$ 的取值范围是________.

[听课笔记]

【考场点拨】

函数的零点或方程的根的问题，一般以含参数的三次式、分式、以 e 为底的指数式或对数式及三角函数式的函数零点或方程根的形式出现. 解决此类问题时常利用零点存在性定理、解方程法或图像法.

**自测题**

1. 函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间为　　(　　)

A. (0,1)　　B. (1,2)　　C. (2,3)　　D. (3,4)

2. 若函数 $f(x)=|2^x-4|-a$ 存在两个零点，且一个为正数，另一个为负数，则实数 $a$ 的取值范围为　　(　　)

A. (0,4)　　B. $(0,+\infty)$

C. (3,4)　　D. $(3,+\infty)$

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-x^2,x>0,\\ e^{|x+2|}-a,x\leqslant0\end{cases}$ 只有 3 个不同的零点，则实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A. $\{1\}\cup[e^2,+\infty)$　　B. $\{1\}\cup(e^2,+\infty)$

C. $[1,e^2]$　　D. $(1,e^2]$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+1,x<0,\\ 2^x,x\geqslant0,\end{cases}$ 方程 $f(x)-a=0$ 有 3 个不同的实数解，则 $a$ 的取值范围是________.

## 小题 3　函数建模与信息题

**例3** (1)在实数原有的运算法则中，我们补充定义新运算“$\oplus$”如下：当 $a\geqslant b$ 时，$a\oplus b=a$；当 $a<b$ 时，$a\oplus b=b^2$. 则当 $x\in[-2,2]$ 时，函数 $f(x)=(1\oplus x)\times x-(2\oplus x)$ 的最大值为　　(　　)

A. $-1$　　B. 1　　C. 6　　D. 12

(2)铅酸电池是一种蓄电池，电极主要由铅及其氧化物制成，电解液是硫酸溶液，这种电池具有电压稳定、价格便宜等优点，在交通、通信、电力、军事、航海、航空等领域有着广泛的应用. 由于在实际生活中使用方法不当，铅酸电池的能量未被完全使用，导致了能源的浪费，因此准确预测铅酸电池剩余放电时间是使用中亟待解决的问题.

研究发现，当电池以某恒定电流放电时，电压 $U$ 关于放电时间 $t$ 的变化率 $y$ 满足 $y=ae^{bt}+\frac{1}{2}$（其中 $a,b$ 为常数，e 是自然对数的底数，$e^{5.707}\approx301$）.

实验数据显示，当时间 $t$ 的值为 0 和 5 时，电压 $U$ 关于放电时间 $t$ 的变化率 $y$ 分别为 $-2$ 和 $-752$，则 $a=$______，$b=$______.（结果保留两位有效数字）

［听课笔记］

【考场点拨】

解决函数模型的实际问题的一般步骤：通过读题，提炼出相应的数学问题，即将文字语言转化为数学语言，建立相应的数学模型，然后通过数学知识去解决问题.

**自测题**

1. 团体购买某公园门票，票价如下表：

| 购票人数 | 1～50 | 51～100 | 100 以上 |
|---|---|---|---|
| 门票价格（元/人） | 13 | 11 | 9 |

现某单位要组织其市场部和生产部的员工游览该公园，若按部门作为团体，选择两个不同的时间分别购票游览公园，则共需支付门票费 1290 元；若两个部门合在一起作为一个团体，同一时间购票游览公园，则共需支付门票费 990 元. 那么这两个部门的人数之差为 （　）

A. 20　B. 30　C. 35　D. 40

2. 如果把一个平面区域内两点间的距离的最大值称为此区域的直径，那么曲线 $|y|=2-x^2$ 围成的平面区域的直径为 （　）

A. 2　B. 4　C. $2\sqrt{2}$　D. $2\sqrt{6}$

3. 定义域为 $[a,b]$ 的函数 $y=f(x)$ 图像的两个端点为 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$，向量 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$（$O$ 为坐标原点），$M(x,y)$ 是 $f(x)$ 图像上任意一点，其中 $x=\lambda a+(1-\lambda)b(\lambda\in[0,1])$，若不等式 $|\overrightarrow{MN}|\leqslant k$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足“$k$ 范围线性近似”，其中最小正实数 $k$ 称为该函数的线性近似阈值. 若函数 $y=\frac{2}{x}$ 定义在 $[1,2]$ 上，则该函数的线性近似阈值是 （　）

A. $2-\sqrt{2}$　B. $3-2\sqrt{2}$　C. $3+2\sqrt{2}$　D. $2+\sqrt{2}$

请完成　限时集训（二）

# 第 3 讲　导数的简单应用

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

1. 导数与函数单调性的关系

①$f'(x)>0(f'(x)<0)$ 在 $(a,b)$ 上恒成立 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调递增（减）；

②$f(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调递增（减）（$f'(x)=0$ 不恒成立）$\Rightarrow f'(x)\geqslant 0(f'(x)\leqslant 0)$ 在 $(a,b)$ 上恒成立.

2. 求函数 $f(x)$ 极值的方法

求函数 $f(x)$ 的极值应先确定函数 $f(x)$ 的定义域，再解方程 $f'(x)=0$，最后判断 $f'(x)=0$ 的根是否是函数 $f(x)$ 的极值点.

3. 求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最值的方法

①若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增（减），则 $f(a)$ 为最小（大）值，$f(b)$ 为最大（小）值；

②若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有极值，则先求出极值，再与 $f(a)$，$f(b)$ 作比较，最大者是最大值，最小者是最小值；

③函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上有唯一一个极值点，这个极值点就是最大（或最小）值点.

### ■ 真题验证

1. ［2018・全国卷Ⅰ6］设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 （　）

A. $y=-2x$　B. $y=-x$　C. $y=2x$　D. $y=x$

2. ［2018・全国卷Ⅲ9］函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为 （　）

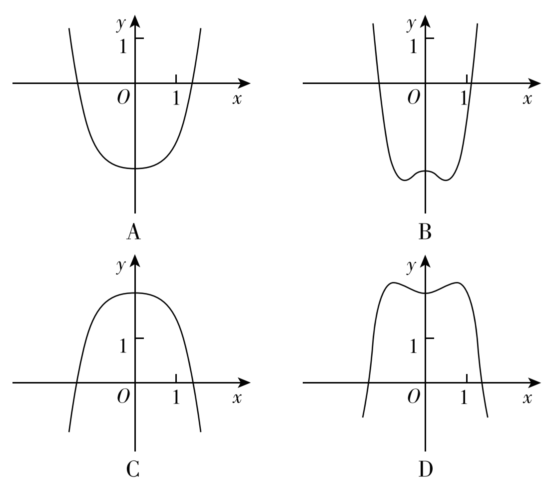



图 M1-3-1

3. ［2017・全国卷Ⅰ14］曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为________.

4. ［2016・全国卷Ⅲ16］已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=e^{-x-1}-x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是________.

5. ［2018・全国卷Ⅱ13］曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为________.

# K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

## 小题 1　导数的几何意义

**例 1**　(1)若直线 $y=2x+b$ 是曲线 $y=\ln x+\ln 2$ 的一条切线，则实数 $b$ 的值为（　　）

A. $-1$　　B. 0　　C. 1　　D. 2

(2)已知函数 $f(x)=e^x+ax$ 的图像在点 $(0,f(0))$ 处的切线 $l$ 与曲线 $y=-\ln x$ 相切，则 $a=$________.

(3)[2019·江苏卷] 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，点 $A$ 在曲线 $y=\ln x$ 上，且该曲线在点 $A$ 处的切线经过点 $(-e,-1)$（e 为自然对数的底数），则点 $A$ 的坐标是________.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数的几何意义求曲线的切线（切线的斜率存在）的基本思路：(1)在某点处的切线方程：设曲线在点 $(x_0,y_0)$ 处的切线为 $l$，先求出切线的斜率 $k=f'(x_0)$，再根据点斜式求出切线的方程；(2)过某点 $(x_1,y_1)$（此点不一定是切点）的切线方程：设出切点坐标 $(x_0,f(x_0))$，利用导函数表示出切线的斜率，根据 $(x_1,y_1)$ 和 $(x_0,f(x_0))$ 两点连线的斜率等于切线的斜率列出方程，通过计算求出切线的方程.

**自测题**

1. 曲线 $y=xe^x-2x^2+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=2x-1$　　B. $y=2x+1$

C. $y=x-1$　　D. $y=x+1$

2. 设 $P$ 为曲线 $C$：$y=x^2+2x+3$ 上的点，且曲线 $C$ 在点 $P$ 处的切线的倾斜角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，则点 $P$ 横坐标的取值范围为（　　）

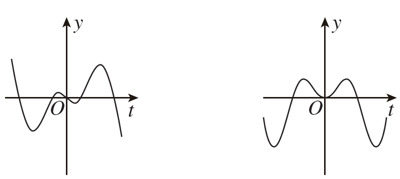
A. $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$　　B. $[-1,0]$

C. $[0,1]$　　D. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

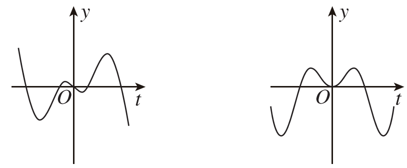
3. 已知函数 $f(x)=x-\frac{\ln x}{ax}(a\neq 0)$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线 $l_1$ 与在点 $(e,f(e))$ 处的切线 $l_2$ 互相垂直，则 $l_1$ 与 $l_2$ 的交点坐标为____________.

## 小题 2　与导数有关的函数图像问题

**例 2**　(1)设函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$ 的图像在点 $(t,f(t))$ 处的切线斜率为 $g(t)$，则函数 $y=g(t)$ 的部分图像可以是（　　）



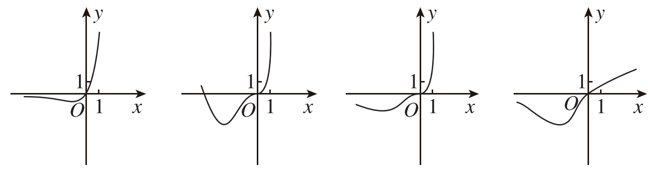
A　　B



C　　D

图 M1-3-2

(2)函数 $f(x)=x^3e^x$ 的图像大致为（　　）



A　　B　　C　　D

图 M1-3-3

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)与函数图像有关的问题，常利用导数法解决，也可用排除法解决.

(2)导函数在某个区间 $D$ 上有 $f'(x)>0$ 恒成立，则导函数的图像恒在 $x$ 轴的上方；导函数在某个区间 $D$ 上有 $f'(x)<0$ 恒成立，则导函数的图像恒在 $x$ 轴的下方；$|f'(x)|$ 的大小决定了 $f(x)$ 变化的快慢.

**自测题**

1. 设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)=x\sin x$ 的导函数，则导函数 $f'(x)$ 的部分图像为（　　）

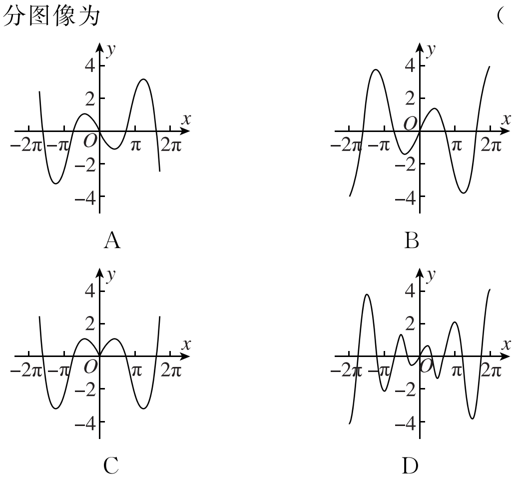


图 M1-3-4

2. 函数 $y=e^x x^2-1$ 的图像大致为　　(　　)

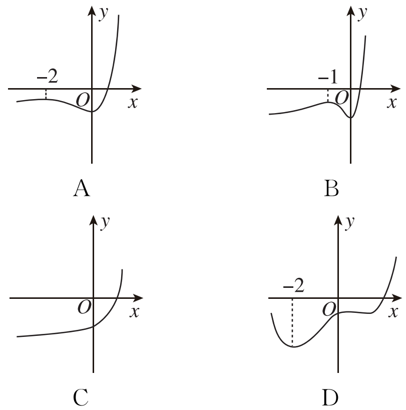



图 M1-3-5

### 小题 3　利用导数研究函数的单调性

**例 3**　(1)已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\frac{1}{e^x}$,其中 e 是自然对数的底数.若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$,则实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A. $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},1\right]$

C. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

(2)若函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+x\ln x-x$ 存在单调递增区间,则实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A. $\left(-\frac{1}{e},1\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数研究函数单调性的常见题型有以下三种:①已知函数解析式求单调区间,实质上是求 $f'(x)>0$,$f'(x)<0$ 的解集,但是要注意定义域;②解决含参数问题及不等式问题要注意两个转化(一是利用导数解决含有参数的函数单调性问题可将问题转化为不等式恒成立问题,要注意分类讨论和数形结合思想的应用,二是将不等式的证明、方程根的个数的判定问题转化为函数的单调性问题处理);③已知函数的单调性,利用已知区间和函数单调区间的包含关系或转化为恒成立问题解决.

**自测题**

1. 对于实数集 **R** 上的可导函数 $f(x)$,若满足 $(x^2-3x+2)f'(x)<0$,则在区间 $[1,2]$ 上必有　　(　　)

A. $f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$

B. $f(x)\leqslant f(1)$

C. $f(x)\geqslant f(2)$

D. $f(x)\leqslant f(1)$ 或 $f(x)\geqslant f(2)$

2. 若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,则 $k$ 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $[2,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x)+(x+1)f'(x)>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则下列判断一定正确的是　　(　　)

A. $f(0)<0<2f(1)$　　B. $0<f(0)<2f(1)$

C. $0<2f(1)<f(0)$　　D. $2f(1)<0<f(0)$

### 小题 4　利用导数研究函数的极值、最值

**例 4**　(1)对于 **R** 上的可导函数 $f(x)$,若满足 $(2-x)f'(x)<0$,则必有　　(　　)

A. $f(1)+f(3)<2f(2)$

B. $f(1)+f(3)\leqslant 2f(2)$

C. $f(1)+f(3)>2f(2)$

D. $f(1)+f(3)\geqslant 2f(2)$

(2)若函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a+2)x-4$ 有极值,则 $a$ 的取值范围是____________.

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)对于含参的函数的极值、最值问题,要注意分类讨论思想的应用.注意导函数的零点不一定是极值点.

(2)在闭区间上图像连续的函数一定存在最大值和最小值;在不是闭区间的情况下,函数在这个区间上的最大值和最小值可能都存在,也可能只存在一个,或者既无最大值也无最小值;在一个区间上,如果函数只有一个极值点,则这个极值点就是最值点.

**自测题**

1. 已知函数 $f(x)=2\ln x+ax^2-3x$ 在 $x=2$ 处取得极小值,则 $f(x)$ 的极大值为　　(　　)

A. 2　　B. $-\frac{5}{2}$

C. $3+\ln 2$　　D. $-2+2\ln 2$

2. 若函数 $f(x)=x^3-3x$ 在 $(a,6-a^2)$ 上有极小值,则实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\sqrt{5},1)$　　B. $[-\sqrt{5},1)$

C. $[-2,1]$　　D. $(-2,1)$

3. 已知函数 $f(x)=x^2+ax-\ln x$,若 $m,n\in[1,+\infty)$,$m\neq n$,且 $\frac{f(m)-f(n)}{m-n}>3$ 恒成立,则实数 $a$ 的取值范围是　　(　　)

A. $[1,+\infty)$　　B. $[3-2\sqrt{2},+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $[2,+\infty)$

请完成　**限时集训(三)**

# 第4讲　导数的热点问题

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

1. 利用导数证明不等式

利用导数证明不等式的常见类型：

①对于(或可化为)左、右两边结构相同的不等式，构造函数 $f(x)$，使原不等式转化为 $f(a)>f(b)$ 的形式；

②对形如 $f(x)>g(x)$ 的不等式，构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$；

③对于形如(或可化为) $f(x_1,x_2)\geqslant A$ 的不等式，可选 $x_1$(或 $x_2$)为主元，构造函数 $f(x,x_2)$(或 $f(x_1,x)$)；

④引入第三元，以第三元为自变量.

2. 利用导数研究恒成立问题

①$a>f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a>f(x)_{\max}$；

②$a<f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a<f(x)_{\min}$.

3. 利用导数研究存在性问题

①$a>f(x)$有解$\Leftrightarrow a>f(x)_{\min}$；

②$a<f(x)$有解$\Leftrightarrow a<f(x)_{\max}$.

### ■ 真题验证

1. [2019·全国卷Ⅰ20] 已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导数.

(1)证明：$f'(x)$在区间$(0,\pi)$存在唯一零点；

(2)若 $x\in[0,\pi]$时，$f(x)\geqslant ax$，求 $a$ 的取值范围.

[试做]

2. [2019·全国卷Ⅱ21] 已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$. 证明：

(1)$f(x)$存在唯一的极值点；

(2)$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

[试做]

3. [2019·全国卷Ⅲ20] 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $0<a<3$ 时，记 $f(x)$在区间$[0,1]$的最大值为 $M$，最小值为 $m$，求 $M-m$ 的取值范围.

[试做]

4. ［2018·全国卷Ⅱ21］已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$.

(1)若 $a=3$,求 $f(x)$的单调区间;

(2)证明:$f(x)$只有一个零点.

［试做］

## K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

### 解答1　单调性

**例1**　已知函数 $f(x)=(a-1)\ln x+x+\frac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程;

(2)讨论 $f(x)$的单调性.

［听课笔记］

【考场点拨】

利用导数求函数的单调区间时,由 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)求解即可;在判断含有参数的函数的单调性时,有时需要对参数的取值进行分类讨论,才能得出函数的单调区间.

**自测题**

已知函数 $f(x)=e^x$,$g(x)=ax^2+x+1\ (a>0)$,设 $F(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$,讨论函数 $F(x)$的单调性.

### 解答2　极值、最值

**例2**　已知函数 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$,e 为自然对数的底数,$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f(x)$的极值;

(2)若 $f(x)\geqslant g(x)$恒成立,求$\frac{b(a+1)}{2}$的最大值.

［听课笔记］

【考场点拨】

求函数最值的常用方法是由导数确定函数的单调性,由函数的单调性确定函数的极值,比较极值与端点值来确定最值.

**自测题**

已知函数 $f(x)=\frac{a}{e^x}+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=e$,求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)求函数 $f(x)$的极值点个数.

## 解答 3 存在性问题与恒成立问题

**例 3** 已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^x-\frac{1}{2}x^2+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若存在 $x_0\in[1,2]$,使得 $f(x_0)<0$,求 $a$ 的取值范围.

[听课笔记]

**【考场点拨】**

(1)利用导数解决恒成立问题常用的是“转化法”:①若是不等式 $f(x)>A$ 在区间 $D$ 上恒成立,则在区间 $D$ 上 $f(x)_{\min}>A$;②若是不等式 $f(x)<A$ 在区间 $D$ 上恒成立,则在区间 $D$ 上 $f(x)_{\max}<A$.

(2)解决存在性问题的一般思路是:根据条件将问题转化为某函数在该区间上最大(小)值满足的不等式成立问题,然后利用导数求该函数在该区间上的最值,最后求解不等式.

**自测题**

1. 已知函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x}+2x(a\in\mathbf{R})$,且曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线 $y=2x$ 平行.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间;

(2)若关于 $x$ 的不等式 $f(x)\geqslant 2x+\frac{m}{x}$恒成立,求实数 $m$ 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x)=ax\ln x+b(a,b\in\mathbf{R})$,$g(x)=x^2+kx+3(k\in\mathbf{R})$,曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=x-1$.

(1)求 $f(x)$在$[m,n](0<m<n)$上的最小值;

(2)若存在 $x_0\in\left[\frac{1}{e},e\right]$,使得 $2f(x_0)+g(x_0)\geqslant 0$ 成立,求 $k$ 的取值范围.

## 解答4 零点(方程的解)的判断

**例4** 已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R})$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线 $l$ 的方程为 $2x+y=0$,求 $a,b$ 的值,并求函数 $f(x)$ 的最大值;

(2)若 $a=0,b=1$,且 $t\in(0,+\infty)$ 时,关于 $x$ 的方程 $tf(x)=x^2$ 有唯一实数解,求实数 $t$ 的值.

[听课笔记]

【考场点拨】

方程的根、函数的零点、函数的图像与 $x$ 轴的交点的横坐标是三个等价的概念,解决这类问题可以通过函数的单调性、极值与最值画出函数图像的走势,通过数形结合思想直观求解.

**自测题**

已知函数 $f(x)=x^2-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $a=2$, $g(x)=x-2\sqrt{x}$,求证:函数 $h(x)=f(x)-g(x)-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的零点.

## 解答5 极值点不可求问题

**例5** 已知函数 $f(x)=(x+a)\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=0$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)若 $a>0$ 时,$f(x)$ 有极小值,求 $a$ 的取值范围.

[听课笔记]

【考场点拨】

极值点不可求问题的求解策略:(1)虚设,设极值点为 $x_0$,得出关于极值点的等式 $g(x_0)=0$,再整体代换并结合已知求解;(2)对导函数进行二次求导,可以进一步弄清极值点的取值区间,确定函数在相应区间上的单调性,直至所需结论.

**自测题**

1. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax-3(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若函数 $f(x)$ 有最大值 $M$,且 $M>a-5$,求实数 $a$ 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x)=ax+\ln x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $a=1$ 时，令函数 $g(x)=xe^{x}-f(x)$（其中 e 是自然对数的底数），求 $g(x)$ 的最小值.

## 解答 6 不等式的证明问题

**例 6** 已知函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln x$，$g(x)=x-\frac{k}{x}$.

(1)证明：函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=1$；

(2)若函数 $y=f(x)-g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有两个零点，证明：$1\leqslant k<\frac{17}{8}$.

[听课笔记]

【考场点拨】

证明 $f(x)\geqslant g(x)$ 或 $f(x)\leqslant g(x)$ 时，可构造函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，将上述不等式转化为求证 $h(x)\geqslant 0$ 或 $h(x)\leqslant 0$，从而利用 $h(x)$ 的最小值或者最大值来证明不等式，也可利用 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\max}$ 或 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\min}$ 来证明不等式.

**自测题**

已知函数 $f(x)=x\ln x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1)令 $g(x)=f'(x)-ax^2(a\in\mathbf{R})$，试讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

(2)证明：$f(x)<2e^{x-2}$.

请完成 **限时集训（四）**

# 02 模块二 三角函数与平面向量

## 第 5 讲　平面向量

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

1. 平面向量的线性运算

(1)三点共线的等价转化

$A,P,B$ 三点共线$\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\neq 0)\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}(x+y=1)$.

(2)三角形中线向量公式

已知平面内不共线的三点 $O,A,B$,若 $P$ 为 $AB$ 的中点,则 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

(3)三角形的重心

已知平面内不共线的三点 $A,B,C$,$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\Leftrightarrow G$ 是$\triangle ABC$ 的重心.特别地,$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}\Leftrightarrow P$ 为$\triangle ABC$ 的重心.

2. 平面向量的数量积

(1)求平面向量模的公式

①$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$;

②$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\pm 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}$;

③若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$;

④利用向量的几何意义,即先利用向量加减法的平行四边形法则或三角形法则作出向量,再利用余弦定理等方法求解.

(2)几个重要结论

已知非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$,则

①垂直:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$;

②平行:$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2\Leftrightarrow x_1y_2-y_1x_2=0$;

③当 $\theta$ 为锐角时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不同向,当 $\theta$ 为钝角时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不反向;

④向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影为$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$,它是一个实数,但不一定大于 0.

### ■ 真题验证

1. [2018·全国卷Ⅰ7] 在$\triangle ABC$ 中,$AD$ 为 $BC$ 边上的中线,$E$ 为 $AD$ 的中点,则$\overrightarrow{EB}=$　　(　　)

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

2. [2017·全国卷Ⅱ4] 设非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则　　(　　)

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　C. $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

3. [2019·全国卷Ⅱ3] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,$\boldsymbol{b}=(3,2)$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$　　(　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $5\sqrt{2}$　　D. 50

4. [2019·全国卷Ⅰ8] 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$,且$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

5. [2019·全国卷Ⅲ13] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$,$\boldsymbol{b}=(-8,6)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$________.

6. [2017·全国卷Ⅰ13] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(m,1)$.若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,则 $m=$________.

7. [2018·全国卷Ⅲ13] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-2)$,$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$,若 $\boldsymbol{c}\parallel(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则 $\lambda=$________.

## K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

### 小题 1　平面向量的线性运算

**例 1** (1)若$\triangle ABC$ 内一点 $O$ 满足$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,直线 $AO$ 交 $BC$ 于点 $D$,则　　(　　)

A. $2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$　　B. $3\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$

C. $\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$　　D. $5\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$

(2)在$\triangle ABC$ 中,$D$ 为 $BC$ 的中点,$E$ 为 $AD$ 的中点,$F$ 为 $BE$ 的中点,若$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda+\mu=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)解决向量的线性运算问题时应注意：①尽可能地将向量转化到同一个平行四边形或三角形中(注意已知条件)；②选用从同一顶点出发的基向量或首尾相接的向量.

(2)向量共线的两个常用结论：①若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$ 与 $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ 平行，则 $x_1y_2-x_2y_1=0$；②若 $O$ 为直线 $AB$ 外一点，点 $P$ 在直线 $AB$ 上，则有 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}(\alpha+\beta=1)$.

**自测题**

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(4,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-5,2)$，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则实数 $m=$ (    )

A. 1　B. $-1$　C. $\frac{7}{5}$　D. $-\frac{7}{5}$

2. 如图 M2-5-1 所示，在正方形 $ABCD$ 中，$E$ 为 $AB$ 的中点，$F$ 为 $CE$ 的中点，则 $\overrightarrow{AF}=$ (    )

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

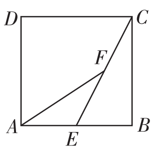



图 M2-5-1

3. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$E$，$F$ 分别为 $BC$，$CD$ 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AF}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x+y=$ (    )

A. 2　B. 1　C. $\frac{3}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

4. 已知 $O$ 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，且 $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AC}$，若 $B$，$O$，$D$ 三点共线，则 $t$ 的值为 (    )

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

## 小题 2　平面向量的数量积及应用

**例 2** (1)若非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 (    )

A. $\pi$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\frac{3\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{4}$

(2)已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$\boldsymbol{e}$ 为单位向量，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}$ 在 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}$ 方向上的投影为 (    )

A. 5　B. $\frac{15}{4}$

C. $\frac{15\sqrt{13}}{13}$　D. $\frac{5\sqrt{21}}{7}$

(3)在 $\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，$AB=2$，$AC=1$，$E$，$F$ 为 $AB$ 的三等分点($E$ 靠近 $A$)，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=$ (    )

A. $\frac{8}{9}$　B. $\frac{10}{9}$　C. $\frac{17}{9}$　D. $\frac{25}{9}$

［听课笔记］

【考场点拨】

(1)平面向量数量积的解题思路有三种：数量积的定义，坐标运算，数量积的几何意义. 坐标运算是处理问题的主要方法，只需建立平面直角坐标系，把点的坐标表示出来，从而转化为坐标运算.

(2)用数量积可求投影，其方法是：$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$；$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$.

**自测题**

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，且 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ (    )

A. $-10$　B. $-6$　C. 6　D. 10

2. 已知矩形 $ABCD$ 的对角线长为 4，若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PC}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$ (    )

A. $-2$　B. $-3$　C. $-4$　D. $-5$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120^\circ$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影为 (    )

A. $-4$　B. $-3$　C. $-2$　D. $-1$

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60^\circ$，若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则实数 $\lambda$ 的值为 (    )

A. $-1$　B. 0　C. 1　D. 2

请完成 限时集训(五)

# 第 6 讲　三角函数的图像与性质

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### 必备知识

1. 三角函数中常用的转化思想及方法技巧

(1)方程思想：$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 三者中知一可求二；

(2)“1”的替换：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

(3)切弦互化：弦的齐次式可化为切；

(4)角的替换:$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$,$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(5)诱导公式:奇变偶不变,符号看象限;

(6)构造辅助角(以特殊角为主):$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)\left(\tan\varphi=\frac{b}{a}\right)$.

2. **函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像变换**

由 $y=\sin x$ 的图像通过图像变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像有两种途径:一是先平移后伸缩,二是先伸缩后平移.

3. **函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k(A>0,\omega>0)$ 解析式的求法**

(1)$A$ 的确定:$A=\frac{最大值-最小值}{2}$;

(2)$k$ 的确定:$k=\frac{最大值+最小值}{2}$;

(3)$\omega$ 的确定:结合图像,先求出最小正周期 $T$,然后由 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 来确定 $\omega$;

(4)$\varphi$ 的确定:根据"五点法"中的五个点求解 $\varphi$,代入最大值点时有 $\omega x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,代入最小值点时有 $\omega x+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

## ■ 真题验证

1. [2018·全国卷Ⅲ6] 函数 $f(x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期是 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{2}$　C. $\pi$　D. $2\pi$

2. [2019·全国卷Ⅱ8] 若 $x_1=\frac{\pi}{4}$,$x_2=\frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点,则 $\omega=$ ( )

A. 2　B. $\frac{3}{2}$

C. 1　D. $\frac{1}{2}$

3. [2016·全国卷Ⅰ6] 将函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后,所得图像对应的函数为 ( )

A. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　B. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　D. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

4. [2016·全国卷Ⅱ3] 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图 M2-6-1 所示,则 ( )

A. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

B. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

D. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

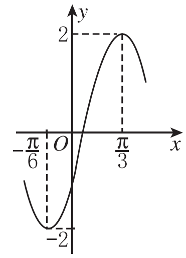


图 M2-6-1

5. [2018·全国卷Ⅰ8] 已知函数 $f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$,则 ( )

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$,最大值为 3

B. $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$,最大值为 4

C. $f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi$,最大值为 3

D. $f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi$,最大值为 4

6. [2018·全国卷Ⅱ10] 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[0,a]$ 是减函数,则 $a$ 的最大值是 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　D. $\pi$

# K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

### 小题 1　三角函数的定义、诱导公式及同角关系式

**例 1** (1)如图 M2-6-2,点 $A$ 为单位圆上一点,$\angle xOA=\frac{\pi}{3}$,点 $A$ 沿单位圆逆时针方向旋转角 $\alpha$ 到点 $B\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$,则 $\sin\alpha=$ ( )

A. $\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

B. $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

C. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

D. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$

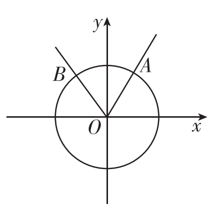


图 M2-6-2

(2)若 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $2\cos\theta+\sqrt{1-2\sin(\pi-\theta)\cos\theta}=$ ( )

A. $\sin\theta+\cos\theta$　B. $\sin\theta-\cos\theta$

C. $\cos\theta-\sin\theta$　D. $3\cos\theta-\sin\theta$

[听课笔记]

**【考场点拨】**

高考常考易错点:

(1)利用三角函数的定义解题时,一般是结合题中所给的角的终边所过的点的坐标求得正弦、余弦值,然后借助于同角三角函数的基本关系式,代入求值即可得结果,但一定要注意角的终边所在象限.

(2)利用同角三角函数的基本关系式时要注意两点：①用平方关系式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$时，要根据题设分析角$\alpha$的终边所在象限，建立“和积”转换思想，即$\sin\alpha\pm\cos\alpha$与$\sin\alpha\cos\alpha$可通过$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$进行转换；②已知$\tan\alpha$求值时，常将所求式子的分子分母同时除以$\cos\alpha$，转化为$\tan\alpha$进行计算.

**自测题**

1. 函数$y=\log_a(x+4)+2(a>0$且$a\neq1)$的图像恒过定点$A$，若点$A$在角$\theta$的终边上，则$\sin2\theta=$ ( )

A. $-\frac{5}{13}$　B. $\frac{5}{13}$

C. $-\frac{12}{13}$　D. $\frac{12}{13}$

2. 已知$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{3}{5}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)=$ ( )

A. $-\frac{4}{5}$　B. $\frac{4}{5}$　C. $-\frac{3}{5}$　D. $\frac{3}{5}$

3. 已知角$\theta=\frac{8\pi}{3}$的终边经过点$P(x,2\sqrt{3})$，则$x$的值为 ( )

A. $\pm2$　B. $2$

C. $-2$　D. $-4$

4. 已知$\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha=\sqrt{3}$，则$\tan\alpha=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\sqrt{2}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $-\sqrt{2}$

## 小题2 三角函数的图像及应用

**例2** (1)函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的部分图像如图M2-6-3所示，则$f(\pi)=$ ( )

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 2

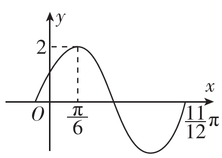


图 M2-6-3

(2)将函数$f(x)=A\cos(2x+\varphi)(A>0,\varphi>0)$的图像向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度后，得到的图像关于$y$轴对称，且$f(0)=1$，则当$\varphi$取得最小值时，$f(x)=$ ( )

A. $\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

B. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

C. $\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

D. $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

[听课笔记]

【考场点拨】

三角函数图像平移变换中的误区：

(1)函数图像的平移法则是“左加右减、上加下减”，但是左右平移变换只是针对$x$进行的变换.

(2)函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的图像向左(右)平移$k(k>0)$个单位长度后，其图像对应的函数解析式为$f(x)=\sin[\omega(x+k)+\varphi]$($f(x)=\sin[\omega(x-k)+\varphi]$)，而不是$f(x)=\sin(\omega x+k+\varphi)$($f(x)=\sin(\omega x-k+\varphi)$).

**自测题**

1. 要得到函数$y=\sqrt{3}\cos^2x+\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}$的图像，只需将函数$y=\sin2x$的图像 ( )

A. 向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

B. 向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度

C. 向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

D. 向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度

2. 将函数$f(x)=\sin x+\cos x$的图像上各点的纵坐标保持不变，横坐标缩小为原来的$\frac{1}{2}$，再将所得图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数$g(x)$的图像，则 ( )

A. $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{11\pi}{12}\right)$

C. $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

D. $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$

3. 已知函数$f(x)=A\sin\omega x$与$g(x)=\frac{A}{2}\cos\omega x(A>0,\omega>0)$的部分图像如图M2-6-4所示，则 ( )

A. $A=1,\omega=\frac{3}{\pi}$

B. $A=2,\omega=\frac{\pi}{3}$

C. $A=1,\omega=\frac{\pi}{3}$

D. $A=2,\omega=\frac{3}{\pi}$

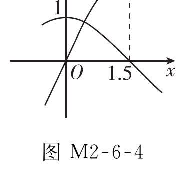


图 M2-6-4

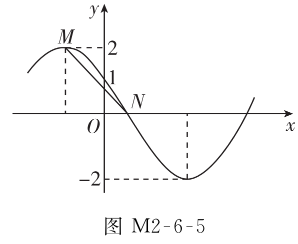


图 M2-6-5

4. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\varphi\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$的部分图像如图M2-6-5所示，且$f(0)=1$，$|MN|=\frac{5}{2}$，则$f(1)=$________.

## 小题3 三角函数的性质及应用

**例3** (1)已知函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $[a,b]$,值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,则 $b-a$ 的最大值为 ( )

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. $\frac{5\pi}{3}$

(2)[2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$的最小值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用三角函数的性质解题策略:

(1)利用三角函数的性质解决问题时,首先要将函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式,再对比 $y=\sin x$ 的性质,即把 $\omega x+\varphi$看成一个整体来处理;

(2)一定要令 $\omega>0$,否则容易出错,同时结合图像进行分析.

**自测题**

1. 下列函数中,最小正周期为 $\pi$ 且在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上为减函数的是 ( )

A. $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$　　B. $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$　　D. $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

2. 函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为 $\pi$,则 $f(x)$的图像的一条对称轴方程是 ( )

A. $x=-\frac{\pi}{12}$　　B. $x=\frac{\pi}{6}$

C. $x=\frac{\pi}{3}$　　D. $x=\frac{\pi}{2}$

3. 函数 $y=\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$图像上相邻的最高点和最低点之间的距离为 ( )

A. $\sqrt{\pi^2+1}$　　B. $\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}$

C. $\sqrt{4\pi^2+1}$　　D. $\sqrt{\pi^2+4}$

4. 设函数 $f(x)=a\sin x\cos x-2\sin^2x$,若直线 $x=\frac{\pi}{6}$是$f(x)$图像的一条对称轴,则 ( )

A. $f(x)$的最小正周期为 $\pi$,最大值为1

B. $f(x)$的最小正周期为 $\pi$,最大值为2

C. $f(x)$的最小正周期为 $2\pi$,最大值为1

D. $f(x)$的最小正周期为 $2\pi$,最大值为2

## 小题4 三角函数的含参问题

**例4** (1)已知函数 $f(x)=\cos(x+\theta)(0<\theta<\pi)$在 $x=\frac{\pi}{3}$处取得最小值,则 $f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间是 ( )

A. $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

C. $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right]$

(2)已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的最小正周期为 $\pi$,若函数 $f(x)$在$[0,a]$上单调递减,则 $a$ 的最大值是 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

[听课笔记]

【考场点拨】

三角函数含参问题的解题策略:

解决含参数的三角函数问题是在三角函数图像、性质以及相关公式的基础上,经过一系列的化简,利用辅助角公式得到三角函数的一般形式,然后结合题目中的条件,求解所含参数的范围及其他相关问题.解决含有参数的三角函数问题,一般利用数形结合、分类讨论和转化的数学思想.

**自测题**

1. 若函数 $f(x)=m+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为0,则 $m=$ ( )

A. $-\sqrt{2}$　　B. $-2$　　C. $-1$　　D. $\sqrt{2}$

2. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$,若 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)$,则 $\omega$ 的最小正值是 ( )

A. 1　　B. $\frac{6}{5}$　　C. 2　　D. 6

3. 设函数 $f(x)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+m$,若当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)\in\left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$,则 $m=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. 1　　D. $\frac{7}{2}$

4. 若关于 $x$ 的方程 $(\sin x+\cos x)^2+\cos 2x=m$ 在区间$[0,\pi)$上有两个不同的实根 $x_1,x_2$,且 $|x_1-x_2|\geq\frac{\pi}{4}$,则实数 $m$ 的取值范围是 ( )

A. $[0,2)$　　B. $[0,2]$

C. $[1,\sqrt{2}+1]$　　D. $[\sqrt{2}-1,1]$

请完成 限时集训(六)

# 第 7 讲　三角恒等变换与正余弦定理

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

1. 正弦定理常用的变形公式

①$a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C,\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$，$R$ 为$\triangle ABC$外接圆的半径；

②$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C,\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$；

③$a\sin B=b\sin A,b\sin C=c\sin B,a\sin C=c\sin A$.

2. 三角形的面积

①$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$；

②$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$R$ 为$\triangle ABC$外接圆的半径.

3. 利用余弦定理判断三角形形状

设三角形的内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$.

①若 $b^2+c^2>a^2$，则 $A$ 为锐角；

②若 $b^2+c^2=a^2$，则 $A$ 为直角；

③若 $b^2+c^2<a^2$，则 $A$ 为钝角.

### ■ 真题验证

1. [2019·全国卷Ⅰ7] $\tan 255°=$　(　　)

A. $-2-\sqrt{3}$　B. $-2+\sqrt{3}$

C. $2-\sqrt{3}$　D. $2+\sqrt{3}$

2. [2019·全国卷Ⅱ11] 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$　(　　)

A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. [2018·全国卷Ⅲ4] 若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$　(　　)

A. $\frac{8}{9}$　B. $\frac{7}{9}$　C. $-\frac{7}{9}$　D. $-\frac{8}{9}$

4. [2016·全国卷Ⅲ6] 若 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\theta=$　(　　)

A. $-\frac{4}{5}$　B. $-\frac{1}{5}$　C. $\frac{1}{5}$　D. $\frac{4}{5}$

5. [2019·全国卷Ⅰ11] $\triangle ABC$的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$. 已知 $a\sin A-b\sin B=4c\sin C,\cos A=-\frac{1}{4}$，则$\frac{b}{c}=$　(　　)

A. 6　B. 5　C. 4　D. 3

6. [2017·全国卷Ⅰ11] $\triangle ABC$的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$. 已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0,a=2,c=\sqrt{2}$，则 $C=$　(　　)

A. $\frac{\pi}{12}$　B. $\frac{\pi}{6}$　C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{3}$

7. [2018·全国卷Ⅲ11] $\triangle ABC$的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$，若$\triangle ABC$的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$C=$　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{6}$

8. [2019·全国卷Ⅱ15] $\triangle ABC$的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$. 已知 $b\sin A+a\cos B=0$，则$B=$________.

9. [2018·全国卷Ⅰ16] $\triangle ABC$的内角 $A,B,C$ 的对边分别为 $a,b,c$. 已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C,b^2+c^2-a^2=8$，则$\triangle ABC$的面积为________.

10. [2019·浙江卷14] 在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°,AB=4,BC=3$，点 $D$ 在线段 $AC$ 上. 若$\angle BDC=45°$，则 $BD=$________，$\cos\angle ABD=$________.

## K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

### 小题 1　三角恒等变换与求值

**例 1** (1)[2017·全国卷Ⅲ] 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$　(　　)

A. $-\frac{7}{9}$　B. $-\frac{2}{9}$

C. $\frac{2}{9}$　D. $\frac{7}{9}$

(2)[2019·江苏卷] 已知$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{2}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$的值是________.

[听课笔记]

【考场点拨】

三角恒等变换与求值的常用解题策略：

考虑用“1”代换，利用降幂与升幂公式运算，考虑二倍角公式的应用，有时还会考虑弦切互化以及角的拆分.

**自测题**

1. 若 $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$ ( )

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

2. 已知 $\tan\alpha=3$，则$\frac{\sin 2\alpha+1}{1+\cos 2\alpha}=$ ( )

A. 8　　B. 7

C. 6　　D. 5

3. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos 2\alpha=\frac{4}{5}$，则$\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$ ( )

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

4. 化简 $2\sqrt{1+\sin 4}+\sqrt{2+2\cos 4}$的结果是 ( )

A. $2\cos 2$　　B. $2\sin 2$

C. $4\sin 2+2\cos 2$　　D. $2\sin 2+4\cos 2$

## 小题 2 利用正、余弦定理解三角形

### 角度 1 三角形基本量的求解

**例 2** (1)已知在$\triangle ABC$中，$a,b,c$分别为内角$A,B,C$的对边，$A$为最小角，且 $a=\sqrt{3}$，$b=2$，$\cos A=\frac{5}{8}$，则$\triangle ABC$的面积为 ( )

A. $\frac{7\sqrt{3}}{16}$　　B. $\frac{\sqrt{39}}{16}$

C. $\frac{\sqrt{39}}{4}$　　D. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

(2)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$A=\frac{2\pi}{3}$，$a=2\sqrt{10}$，且$\triangle ABC$的面积$S=\frac{a^2+b^2-c^2}{12}$，则$c=$ ( )

A. $2\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

[听课笔记]

【考场点拨】

在解三角形时，三角形内角和定理起着重要作用，在解题时要注意根据这个定理确定角的范围，从而确定三角函数值的符号. 在判断三角形的形状时，等式两边一般不要约去公因式，应移项提取公因式，以免漏解.

### 角度 2 解三角形的综合问题

**例 3** (1)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$c<b\cos A$，则$\triangle ABC$为 ( )

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 等边三角形

(2)在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$a\sin A-c\sin C=(a-b)\sin B$，且$c=4$，则$\triangle ABC$面积的最大值为 ( )

A. $2\sqrt{3}$　　B. 4

C. $4\sqrt{3}$　　D. $8\sqrt{3}$

[听课笔记]

【考场点拨】

利用正、余弦定理解三角形的一般解题思路：

(1)利用正弦定理或余弦定理把边代换成角，或者把角代换成边；

(2)在解三角形时，要有意识地考虑哪个定理更适合解题，当给出的条件含有边的平方时，多考虑余弦定理，当给出的条件含有正弦或边的一次式时，多考虑正弦定理.

**自测题**

1. 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$\cos A=\frac{1}{3}$，$a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\sin B=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

2. 在$\triangle ABC$中，若$BC\cdot\cos A=AC\cdot\cos B$，则$\triangle ABC$是 ( )

A. 等腰三角形

B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰或直角三角形

3. 已知在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$所对的边分别为$a,b,c$，且$b^2+c^2=a^2+bc$. 若$\sin B\cdot\sin C=\sin^2 A$，则$\triangle ABC$是 ( )

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

4. 在锐角三角形$ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$A=2B$，则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$的取值范围是________.

5. 在$\triangle ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，若$(a+b)\sin B=c\sin C-a\sin A$，$c=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$的面积记为$S$，则当$S+\frac{2}{S}$取得最小值时，$ab=$________.

### 小题 3　正、余弦定理的实际应用

**例 4**　(1)某船在海面上向正东方向行驶了 $x$ km 后迅速将航向调整为南偏西 $60°$，然后沿着新的方向行驶了 $3\sqrt{3}$ km，此时发现离出发点恰好 3 km，则 $x$ 的值为　(　　)

A. 3　　B. 6

C. 3 或 6　　D. 4 或 6

(2)如图 M2-7-1 所示，在一个坡度一定的山坡 $AC$ 的顶上有一高度为 25 m 的建筑物 $CD$，为了测量该山坡相对于水平地面的坡角 $\theta$，在山坡的 $A$ 处测得 $\angle DAC=15°$，沿山坡前进 50 m 到达 $B$ 处，又测得 $\angle DBC=45°$，根据以上数据可得 $\cos\theta=$________.

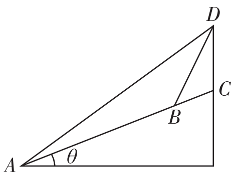


图 M2-7-1

[听课笔记]

【考场点拨】

三角形的应用解题策略：

三角形的应用实际上是把此类问题转化为解三角形问题，通过题设画出图形，在三角形中找出已知条件和所求的量，利用正弦定理或者余弦定理去解决，此类题目一般不难，关键是对题设的转化.

**自测题**

1. 某人向正东方向走了 $x$ 千米，然后向右转 $120°$，再朝新方向走了 3 千米，结果他离出发点恰好 $\sqrt{13}$ 千米，那么 $x$ 的值是　(　　)

A. 1　　B. 4

C. 3　　D. $\sqrt{3}$

2. 在 200 米高的山顶上，测得山下一塔顶与塔底的俯角分别为 $30°$，$60°$，则塔高为　(　　)

A. $\frac{400}{3}$ 米　　B. $\frac{400\sqrt{3}}{3}$ 米

C. $200\sqrt{3}$ 米　　D. 200 米

3. 如图 M2-7-2 所示，某路边树干被台风吹断后(没有完全断开)，树干与地面成 $75°$ 角，折断部分与地面成 $45°$ 角，树干底部与树尖着地处相距 10 米，则大树原来的高度是________米.

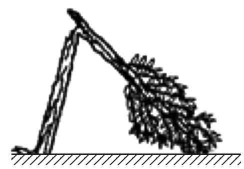


图 M2-7-2

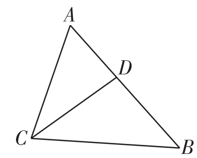


图 M2-7-3

4. 如图 M2-7-3 所示，某观测站 $C$ 在 $A$ 城的南偏西 $20°$ 方向上，由 $A$ 城出发的一条公路的走向是南偏东 $40°$，在 $C$ 处测得公路上 $B$ 处有一人距 $C$ 处 31 km，且正沿公路向 $A$ 城走去，走了 20 km 后到达 $D$ 处，此时 $C$，$D$ 两点之间的距离为 21 km，那么这人还要走________km 才能到达 $A$ 城.

请完成　**限时集训(七)**

# 第 8 讲　解三角形的热点问题

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

**三角形解答题的解题策略**

解三角形问题的第一步一般需要边角互化：

(1)当出现边角混合的式子时，常常根据 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ 来统一成边或统一成角.

(2)当式子中出现三边的平方时，常常利用余弦定理解题.

(3)当三个内角 $A$，$B$，$C$ 都出现时，根据三角形的内角和 $A+B+C=180°$ 消掉一个角，留下两个角，然后化简整理；当已知一个角，式子中含有另外两个角时，结合已知消掉一个角，留下一个角，然后根据两角和与差的公式展开，再进一步化简.

### ■ 真题验证

1. [2019·全国卷Ⅲ18] $\triangle ABC$ 的内角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别是 $a$，$b$，$c$，已知 $a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.

(1)求 $B$；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c=1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

[试做]

2. [2019·江苏卷15] 在△$ABC$中,角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$.

(1)若$a=3c,b=\sqrt{2},\cos B=\frac{2}{3}$,求$c$的值;

(2)若$\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$,求$\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)$的值.

[试做]

## K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

### 解答1　三角形基本量的求解

**例1** [2019·北京卷] 在△$ABC$中,$a=3,b-c=2,\cos B=-\frac{1}{2}$.

(1)求$b,c$的值;

(2)求$\sin(B+C)$的值.

[听课笔记]

【考场点拨】

对于三角形基本量的求解一般都是在解答题的第一问中设置,解决这类问题常用正、余弦定理直接计算.

**自测题**

在△$ABC$中,内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,且$2\sqrt{3}\cdot\sin^2\frac{A}{2}+\sin A-\sqrt{3}=0$.

(1)求角$A$的大小;

(2)已知△$ABC$外接圆的半径$R=\sqrt{3}$,且$b=\sqrt{3}$,求△$ABC$的周长.

### 解答2　与三角形面积有关的问题

**例2** 在△$ABC$中,内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$,且$a-\frac{\sqrt{2}}{2}c=b\cos C$.

(1)求角$B$的大小;

(2)若$a=4,\cos C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,求△$ABC$的面积.

[听课笔记]

**例3** 在△$ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，且$a=2\sqrt{3}$，$(2\sqrt{3}+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$.

(1)求角$A$的大小；

(2)求△$ABC$面积的最大值.

［听课笔记］

【考场点拨】

解三角形的面积问题，归根结底是解三角形问题，有时和其他知识综合考查，如求面积的最大值(最小值)时，常利用三角函数或者基本不等式求解. 另外，在解与三角形面积有关的问题时，要熟记30°，45°，60°等特殊角的三角函数值，以便在解题中应用.

**自测题**

在△$ABC$中，内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，且$2(\tan A+\tan B)=\dfrac{\tan A}{\cos B}+\dfrac{\tan B}{\cos A}$.

(1)求$\dfrac{a+b}{c}$的值；

(2)若$c=2$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，求△$ABC$的面积.

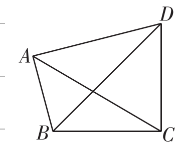
## 解答3 以平面几何为载体的解三角形问题

**例4** 如图M2-8-1所示，在平面四边形$ABCD$中，$BC=CD=2$，△$BCD$的面积是2.

(1)求$\angle BCD$的大小；

(2)若$\angle ABD=2\angle ACB=60°$，求线段$AD$的长.

［听课笔记］



图M2-8-1

【考场点拨】

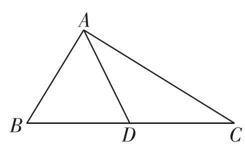
解三角形问题，多为边和角的求值问题，这就需要根据正、余弦定理结合已知条件灵活转化边和角之间的关系，从而达到解决问题的目的. 其基本步骤是：第一步，定条件，即确定三角形中的已知和所求，在图形中标出来，然后确定转化的方向；第二步，定工具，即根据条件和所求合理地选择转化工具，实现边和角之间的互化；第三步，求结果，判断所求结果是否符合条件.

**自测题**

如图M2-8-2所示，$D$是直角三角形$ABC$斜边$BC$上一点，$\angle BAC=90°$，$AC=\sqrt{3}DC$.

(1)若$\angle DAC=30°$，求角$B$的大小；

(2)若$BD=2DC=2x$，且$AD=2\sqrt{2}$，求$x$的值.



图M2-8-2

请完成 限时集训（八）

# 第 9 讲　数列、等差数列与等比数列

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

1. 等差、等比数列的性质

$m,n,p,q\in \mathbf{N}_+$

| | 等差数列$\{a_n\}$ | 等比数列$\{a_n\}$ |
|---|---|---|
| 通项公式变形 | 对任意 $m,n\in \mathbf{N}_+$，$a_n=a_m+(n-m)d$ | 对任意 $m,n\in \mathbf{N}_+$，$a_n=a_mq^{n-m}$ |
| 性质 | 若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ | 若 $m+n=p+q$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ |
| 求和公式 | $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ | $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ |

2. 等差、等比数列的证明或判断方法

| 方法 | 等差数列$\{a_n\}$ | 等比数列$\{a_n\}$ |
|---|---|---|
| 定义法 | $a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\in \mathbf{N}^*)$ | $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数)$(n\in \mathbf{N}^*)$ |
| 中项法 | $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$ | $a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(a_n\neq 0,n\in \mathbf{N}^*)$ |
| 通项公式法 | $a_n=kn+b$($k,b$为常数) | $a_n=k\cdot q^n$($k,q$为常数且$k\neq 0,q\neq 0$) |
| 前$n$项和公式法 | $S_n=An^2+Bn$($A,B$为常数) | $S_n=k(1-q^n)$($k,q$为常数且$k\neq 0,q\neq 0$)或$S_n=k-kq^n$($k,q$为常数且$k\neq 0,q\neq 0$) |

3. 求数列的通项公式的方法

(1)公式法(定义法)：根据等差数列、等比数列的定义求通项；

(2)累加法：适用于 $a_{n+1}=a_n+f(n)$；

(3)累乘法：适用于 $a_{n+1}=f(n)a_n$；

(4)待定系数法：适用于 $a_{n+1}=qa_n+f(n)$；

(5)递推公式中有 $S_n$：把已知关系通过 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 转化为数列$\{a_n\}$或$S_n$的递推关系，然后采用相应的方法求解.

### ■ 必备结论

数列的性质：

(1)若$\{a_n\}$为等比数列，则下标成等差数列的对应项成等比数列.

若$\{a_n\}$为等差数列，相隔等距离的项组成的数列是等差数列.

(2)对于一个等差数列：

①若项数为偶数，设共有 $2n$ 项，则 $S_偶-S_奇=nd$；$\frac{S_奇}{S_偶}=\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

②若项数为奇数，设共有 $2n-1$ 项，则 $S_奇-S_偶=a_n$；$\frac{S_奇}{S_偶}=\frac{n}{n-1}$.

③对于一个等差数列，$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$仍成等差数列.

### ■ 真题验证

1. [2019·全国卷Ⅲ6] 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 4 项和为 15，且 $a_5=3a_3+4a_1$，则 $a_3=$　(　　)

A. 16　B. 8　C. 4　D. 2

2. [2018·北京卷 5] “十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率为 $f$，则第八个单音的频率为　(　　)

A. $\sqrt[3]{2}f$　B. $\sqrt[3]{2^2}f$

C. $\sqrt[12]{2^5}f$　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

3. [2017·浙江卷 6] 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d$，前 $n$ 项和为 $S_n$，则“$d>0$”是“$S_4+S_6>2S_5$”的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. [2019·全国卷Ⅰ14] 记 $S_n$ 为等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和. 若 $a_1=1,S_3=\frac{3}{4}$，则 $S_4=$________.

5. [2019·全国卷Ⅲ14] 记 $S_n$ 为等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和. 若 $a_3=5,a_7=13$，则 $S_{10}=$________.

6. [2017·江苏卷 9] 等比数列$\{a_n\}$的各项均为实数，其前 $n$ 项和为 $S_n$. 已知 $S_3=\frac{7}{4},S_6=\frac{63}{4}$，则 $a_8=$________.

# K 考点考法探究

研析高考题型 强化方法思维

## 小题1 等差、等比数列的基本计算

**例1** (1)记 $S_n$ 为等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和,若 $a_4+a_5=24$,$S_6=48$,则$\{a_n\}$的公差为 ( )

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的公差为2,若 $a_1,a_3,a_4$ 成等比数列,$S_n$ 是$\{a_n\}$的前 $n$ 项和,则 $S_9$ 等于 ( )

A. $-8$ B. $-6$ C. 0 D. 10

[听课笔记]

【考场点拨】

在进行等差、等比数列的基本运算时要注意:

(1)在进行等差(比)数列的基本运算时,常利用公式把已知条件转化为关于首项 $a_1$ 和 $d(q)$ 的方程组,求出首项 $a_1$ 和$d(q)$.

(2)在进行等比数列的基本运算时,要对 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况进行讨论.

(3)解题时一定要注意几个隐含条件:$n$ 必须是正整数;公比 $q$ 不为0;等比数列中没有0这一项.

**自测题**

1. 已知正项等比数列$\{a_n\}$满足 $a_3=1$,$a_5$ 与$\frac{3}{2}a_4$的等差中项为$\frac{1}{2}$,则 $a_1$的值为 ( )

A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

2. 已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,且 $a_3=5$,$a_{n+1}-a_n-2=0$ $(n\in\mathbf{N}_+)$,若 $S_m=25$,则 $m=$ ( )

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和是 $S_n$,则下列说法正确的是 ( )

A. 若 $a_3>0$,则 $a_{2017}<0$ B. 若 $a_4>0$,则 $a_{2018}<0$

C. 若 $a_3>0$,则 $S_{2017}>0$ D. 若 $a_4>0$,则 $S_{2018}>0$

4. 已知递增的等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=6$,$a_1+1$,$a_2+2$,$a_3$ 成等差数列,则该数列的前6项和 $S_6=$ ( )

A. 93 B. 189 C. $\frac{189}{16}$ D. 378

## 小题2 等差、等比数列的性质

**例2** (1)已知等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=\frac{1}{2}$,该数列前9项的乘积为1,则 $a_1=$ ( )

A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

(2)各项均为实数的等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,若 $S_{10}=10$,$S_{30}=70$,则 $S_{40}=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)利用等差数列的"等和性"和等比数列的"等积性"解题可以大大简化等差、等比数列基本量的计算,等差数列的求和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$常常会和其等和性一起应用.

(2)等差数列中间隔相同的项的和形成的数列也是等差数列.

**自测题**

1. 已知公比不为1的等比数列$\{a_n\}$满足 $a_{15}a_5+a_{14}a_6=20$,若 $a_m^2=10$,则 $m=$ ( )

A. 9 B. 10

C. 11 D. 12

2. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为负数,且 $a_{n+3}\cdot a_{n-1}=4a_n^2(n\in\mathbf{N},n\geqslant2)$,$a_2=2$,则首项 $a_1$ 等于 ( )

A. 1 B. 4

C. $-1$ D. $-4$

3. 在等差数列$\{a_n\}$中,前10项中奇数项的和为15,偶数项的和为30,若 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}=60$,则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=$________.

## 小题3 等差、等比数列的综合问题

**例3** (1)已知函数 $f(n)=n^2\cos(n\pi)$,且 $a_n=f(n)+f(n+1)$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=$ ( )

A. 0 B. 100

C. $-100$ D. 10 200

(2)已知等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,且 $S_8<S_{10}<S_9$,则满足 $S_n>0$ 的正整数 $n$ 的最大值为 ( )

A. 16 B. 17

C. 18 D. 19

[听课笔记]

【考场点拨】

解决数列的综合问题的策略:(1)常见以数列为背景的实际应用问题,只要找到对应的数列模型,不难解决;(2)以数列为背景的不等式恒成立问题,常与数列求和相联系,有时也会利用数列的单调性;(3)与其他知识交汇问题,一般利用相关知识去转化,最终回到数列的问题去解决.

**自测题**

1. 设数列$\{a_n\}$是以2为首项,1为公差的等差数列,$\{b_n\}$是以1为首项,2为公比的等比数列,则$b_{a_1}+b_{a_2}+\cdots+b_{a_6}=$ ( )

A. 78　B. 84

C. 124　D. 126

2. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一个问题:“三百七十八里关,初行健步不为难,次日脚痛减一半,六朝才得到其关,要见次日行里数,请公仔细算相还.”其大意为:“有人走了378里路,第一天健步行走,从第二天起因脚痛每天走的路程为前一天的一半,走了6天后到达目的地.”则此人第4天和第5天共走了 ( )

A. 60里　B. 48里

C. 36里　D. 24里

3. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1+2a_2=3$,点$P_n(n,a_n)$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,都有$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=(1,2)$,则数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$为 ( )

A. $n\left(n-\frac{4}{3}\right)$　B. $n\left(n-\frac{3}{4}\right)$

C. $n\left(n-\frac{2}{3}\right)$　D. $n\left(n-\frac{1}{2}\right)$

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$,$a_2+a_4=48$,$a_5=28$,若$S_n+30>n\lambda$对一切$n\in\mathbf{N}^*$恒成立,则$\lambda$的取值范围为________.

### 小题4　数列的递推关系

**例4** (1)数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,对任意$n\in\mathbf{N}^*$都有$a_{n+1}=1+a_n+n$,则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{99}}=$ ( )

A. $\frac{99}{98}$　B. 2

C. $\frac{99}{50}$　D. $\frac{99}{100}$

(2)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_{n+1}=4a_n-3$,设数列$\{c_n\}$满足$c_n=a_n-1$,则$c_n=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

由递推关系求数列的通项公式,常用的方法有:①先求出数列的前几项,再归纳猜想出数列的通项公式(注意验证);②将已知递推关系式整理、变形,变成等差、等比数列的递推关系式,或用累加法(适用$a_{n+1}=a_n+f(n)$型)、累乘法(适用$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$型)、待定系数法(适用$a_{n+1}=pa_n+q$型)求通项公式.

**自测题**

1. 在数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,$a_1=1$,则$a_6=$ ( )

A. 32　B. 62　C. 63　D. 64

2. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$,且对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$都有$a_{n+1}-a_n=n+2$,则$a_{39}=$ ( )

A. 390　B. 410　C. 820　D. 1640

3. 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=-2$,$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$,则$a_{2019}$的值为 ( )

A. $-2$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{3}{2}$

4. 设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(0<q<1)$,前$n$项和为$S_n$.若存在$m\in\mathbf{N}^*$,使得$a_m+a_{m+2}=\frac{5}{2}a_{m+1}$,且$S_m=1022a_{m+1}$,则$m$的值为________.

请完成　限时集训(九)

# 第10讲　数列求和及数列的简单应用

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

数列求和

(1)直接用等差、等比数列的求和公式求和.

等差数列:$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$;

等比数列:$S_n=\begin{cases}na_1(q=1),\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1),\end{cases}$公比含字母时一定要讨论.

(2)分组转化法求和:通常转化为等差或等比数列求和.

(3)错位相减法求和:如$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列,求$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$的常用方法.

(4)裂项相消法求和中常见的裂项公式:

①$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;

②$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$;

③$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$.

(5)倒序相加法求和:较为常见的是等差数列前$n$项和公式的推导方法.

## ■ 真题验证

1. [2019·全国卷Ⅱ18] 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=2a_2+16$.
(1)求$\{a_n\}$的通项公式；
(2)设$b_n=\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和.
[试做]

2. [2016·全国卷Ⅱ17] 等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4=4$，$a_5+a_7=6$.
(1)求$\{a_n\}$的通项公式；
(2)设$b_n=[a_n]$，求数列$\{b_n\}$的前10项和，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，如$[0.9]=0$，$[2.6]=2$.
[试做]

3. [2017·全国卷Ⅲ17] 设数列$\{a_n\}$满足$a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.
(1)求$\{a_n\}$的通项公式；
(2)求数列$\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$的前$n$项和.
[试做]

# K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

## 解答1 等差、等比数列基本量的计算

**例1** [2019·全国卷Ⅰ] 记$S_n$为等差数列$\{a_n\}$的前$n$项和.已知$S_9=-a_5$.
(1)若$a_3=4$，求$\{a_n\}$的通项公式；
(2)若$a_1>0$，求使得$S_n\geqslant a_n$的$n$的取值范围.

[听课笔记]

【考场点拨】

涉及等差数列、等比数列的综合问题，首先要立足等差、等比数列的概念，设出相应的基本量，充分运用通项公式、数列求和公式、数列的性质，确定基本量.解综合题的关键在于审清题目，弄懂来龙去脉，揭示问题的内在联系和隐含条件，形成解题策略.

**自测题**

已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$S_n=n(n+1)+2$，其中$n\in \mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$a_2,a_{k+2},a_{3k+2}(k\in \mathbf{N}^*)$为等比数列$\{b_n\}$的前三项，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

## 解答2　数列的求和问题

### 角度1　分组转化法求和

**例2**　已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_8=1,S_{16}=24$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$是递增的等比数列，且$b_1+b_4=9,b_2b_3=8$，求$(a_1+b_1)+(a_3+b_3)+(a_5+b_5)+\cdots+(a_{2n-1}+b_{2n-1})$.

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)一个数列既不是等差数列，又不是等比数列，若将这个数列适当拆开，重新组合，就会变成几个可以求和的部分，则可用分组转化法求和，即先分别求和，然后合并相加；

(2)分段求和的数列也是将数列分成若干组，先分别求和，然后合并相加.

### 角度2　裂项相消法求和

**例3**　已知等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且满足$S_1=1$，$S_2=4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式及$S_n$；

(2)设$b_n=\dfrac{1}{(n+1)\cdot \log_3 a_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

[听课笔记]

【考场点拨】

裂项相消法是一种常见的求和方法，其适用题型主要有：

(1)已知数列的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，求前$n$项和，则$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$；

(2)已知数列的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，求前$n$项和，则$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$；

(3)已知数列的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，求前$n$项和，则$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

**自测题**

已知正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_4=81$，且$a_2,a_3$的等差中项为$\dfrac{3}{2}(a_1+a_2)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\log_3 a_{2n-1}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，数列$\{c_n\}$满足$c_n=\dfrac{1}{4S_n-1}$，$T_n$为数列$\{c_n\}$的前$n$项和，求$T_n$.

角度3　错位相减法求和

**例4**　数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+\lambda$（$\lambda$为常数）.

(1)试探究数列$\{a_n+\lambda\}$是否为等比数列，并求$a_n$；

(2)当$\lambda=1$时，求数列$\{n(a_n+\lambda)\}$的前$n$项和$T_n$.

[听课笔记]

【考场点拨】

若数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$一个是等差数列，一个是等比数列，则求$\{a_n\cdot b_n\}$的前$n$项和$S_n$时，可采用错位相减法，且在同乘等比数列的公比后，才可以错位相减. 两式相减后中间大部分项构成等比数列，要注意两端的项，特别是最后一项的符号，在中间大部分项构成的等比数列求和时，要注意首项和项数，最后切记将$S_n$的系数化为1.

**自测题**

若数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，且$S_n=n^2+n$，等比数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，且$T_n=2^n+m$.

(1)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前$n$项和.

## 解答3　数列的证明问题

**例5**　已知数列$\{a_n\}$满足$a_n\neq 1, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$（$n\in\mathbf{N}^*$），数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{1}{a_n-1}$，且$b_1, b_2, b_4$成等比数列.

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2)若$S_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

[听课笔记]

【考场点拨】

解决数列的证明问题要注意：

(1)判断和证明数列$\{a_n\}$是等差（等比）数列的方法主要有定义法和等差（等比）中项性质法，但有的时候不是直接证$\{a_n\}$是等差（等比）数列，而是一个代数式，这时必须把这个代数式看成一个整体，可换元为$\{b_n\}$去证明；

(2)以数列为背景的不等式证明或恒成立问题，多数与数列的求和有关，常利用放缩法或数列的单调性来解决.

**自测题**

已知数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，满足$S_n=2a_n-n$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

(1)证明：$\{a_n+1\}$是等比数列；

(2)求$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}$.

请完成　**限时集训（十）**

# 模块四 立体几何

## 第 11 讲　空间几何体、空间中的位置关系

## Z 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

线、面平行与垂直关系的转化

线线的平行与垂直 $\xrightleftharpoons[\text{性质}]{\text{判定}}$ 线面的平行与垂直 $\xrightleftharpoons[\text{性质}]{\text{判定}}$ 面面的平行与垂直

### ■ 必备结论

(1)正方体(设棱长为 $a$)

①外接球的半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$;②内切球的半径为$\frac{1}{2}a$;③与正方体的所有棱都相切的球的半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

(2)长方体(设棱长分别为 $a,b,c$)

外接球的半径为$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

(3)正四面体(设棱长为 $a$)

①外接球的半径为$\frac{\sqrt{6}}{4}a$;

②内切球的半径为$\frac{\sqrt{6}}{12}a$;

③与正四面体的所有棱都相切的球的半径为$\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

### ■ 真题验证

1. [2018·全国卷Ⅲ3] 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来.构件的凸出部分叫榫头,凹进部分叫卯眼,图 M4-11-1 中木构件右边的小长方体是榫头,若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体,则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是　(　　)

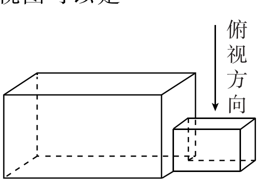


图 M4-11-1

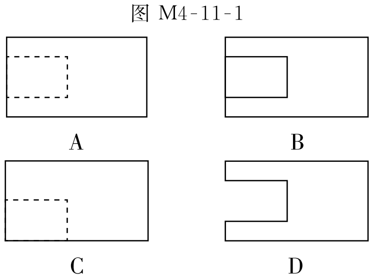


图 M4-11-2

2. [2017·全国卷Ⅱ6] 如图 M4-11-3,网格纸上小正方形的边长为 1,粗实线画出的是某几何体的三视图,该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得,则该几何体的体积为　(　　)

A. $90\pi$

B. $63\pi$

C. $42\pi$

D. $36\pi$

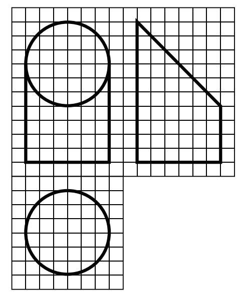
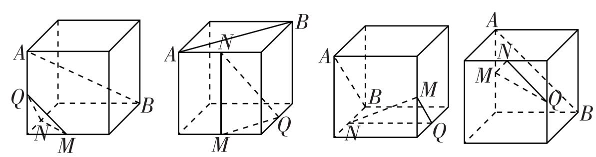


图 M4-11-3

3. [2018·全国卷Ⅰ5] 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 $O_1,O_2$,过直线 $O_1O_2$ 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形,则该圆柱的表面积为　(　　)

A. $12\sqrt{2}\pi$　B. $12\pi$　C. $8\sqrt{2}\pi$　D. $10\pi$

4. [2017·全国卷Ⅰ6] 如图 M4-11-4 所示,在下列四个正方体中,$A,B$ 为正方体的两个顶点,$M,N,Q$ 为所在棱的中点,则在这四个正方体中,直线 $AB$ 与平面 $MNQ$ 不平行的是　(　　)



A　B　C　D

图 M4-11-4

5. [2018·全国卷Ⅱ9] 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$E$ 为棱 $CC_1$ 的中点,则异面直线 $AE$ 与 $CD$ 所成角的正切值为　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

6. [2016·全国卷Ⅰ11] 平面 $\alpha$ 过正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 $A$,$\alpha$∥平面 $CB_1D_1$,$\alpha\cap$平面 $ABCD=m$,$\alpha\cap$平面 $ABB_1A_1=n$,则 $m,n$ 所成角的正弦值为　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\frac{1}{3}$

7. ［2016·全国卷Ⅲ11］在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 $V$ 的球. 若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 $V$ 的最大值是（　　）

A. $4\pi$　　B. $\frac{9\pi}{2}$

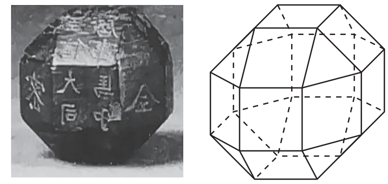
C. $6\pi$　　D. $\frac{32\pi}{3}$

8. ［2018·全国卷Ⅲ12］设 $A,B,C,D$ 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为（　　）

A. $12\sqrt{3}$　　B. $18\sqrt{3}$

C. $24\sqrt{3}$　　D. $54\sqrt{3}$

9. ［2019·全国卷Ⅱ16］中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 M4-11-5①). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图 M4-11-5②是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有______个面，其棱长为________.



①　　②

图 M4-11-5

10. ［2018·全国卷Ⅱ16］已知圆锥的顶点为 $S$，母线 $SA$，$SB$ 互相垂直，$SA$ 与圆锥底面所成角为 30°. 若 $\triangle SAB$ 的面积为 8，则该圆锥的体积为________.

11. ［2017·全国卷Ⅰ16］已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 $O$ 的球面上，$SC$ 是球 $O$ 的直径，若平面 $SCA\perp$ 平面 $SCB$，$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9，则球 $O$ 的表面积为________.

## K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

### 小题 1　空间几何体的三视图与直观图

**例 1** (1)如图 M4-11-6，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB=2$，$BC=3$，点 $P$ 在线段 $B_1D_1$ 上，$\overrightarrow{BA}$的方向为正视方向，当 $AP$ 最短时，四棱锥 $P-AA_1B_1B$ 的侧视图为（　　）

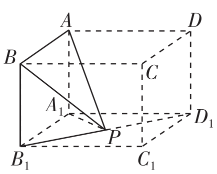
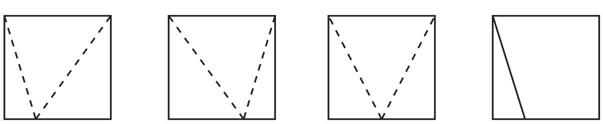



图 M4-11-6



A　　B　　C　　D

图 M4-11-7

(2)图 M4-11-8 是一块木料的三视图，将该木料切削、打磨成半径最大的球，则该木料最多加工出球的个数为（　　）

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

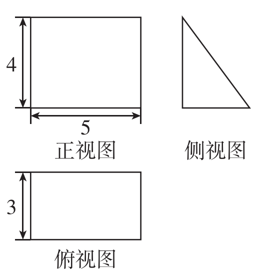



图 M4-11-8

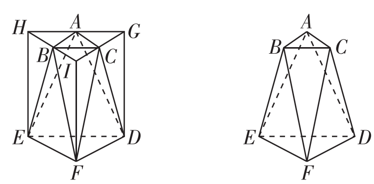
［听课笔记］

【考场点拨】

空间几何体的三视图是从空间几何体的正面、左面、上面用平行投影的方法得到的三个平面投影图. 解决此类问题的关键是根据投影图还原出直观图，确定几何体的形状. 利用去点法还原出几何体的直观图，能快速确定几何体中线面的位置关系.

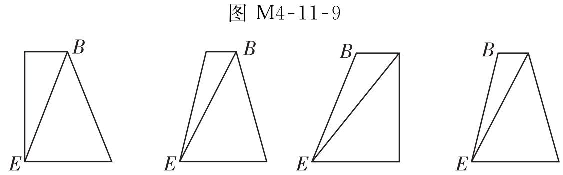
**自测题**

1. 已知三棱柱 $HIG-EFD$ 的底面为等边三角形，且侧棱垂直于底面，该三棱柱截去三个角(如图 M4-11-9①所示，$A$，$B$，$C$ 分别是 $HG$，$HI$，$IG$ 的中点)后得到的几何体如图②所示，则该几何体的侧视图为（　　）




①　　②

图 M4-11-9




A　　B　　C　　D

图 M4-11-10

2. 如图 M4-11-11 所示,网格纸上每个小格都是边长为 1 的正方形,粗线画出的是一个几何体的三视图,记该几何体的各棱的长度构成的集合为 $A$,则　　(　　)

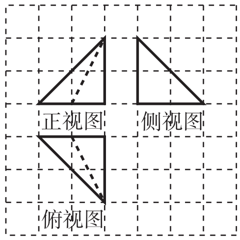


图 M4-11-11

A. $\sqrt{3}\in A$

B. $3\in A$

C. $2\sqrt{3}\in A$

D. $2\sqrt{2}\in A$

## 小题 2　空间几何体的表面积与体积

**例 2**　(1)两个圆锥和一个圆柱分别有公共底面(圆锥与圆柱可看作实心的),且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一球面上.若圆柱的侧面积等于两个圆锥的侧面积之和,且该球的表面积为 $16\pi$,则圆柱的体积为　　(　　)

A. $2\pi$　　B. $\frac{8\pi}{3}$

C. $6\pi$　　D. $8\pi$

(2)如图 M4-11-12 所示,圆柱内有一个直三棱柱,三棱柱的底面在圆柱底面内,且底面是正三角形.如果三棱柱的体积为 $12\sqrt{3}$,圆柱的底面直径与母线长相等,则圆柱的侧面积为________.

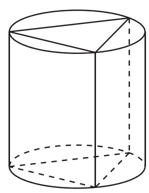


图 M4-11-12

[听课笔记]

【考场点拨】

常考空间几何体的表面积和体积的解题策略:

(1)求空间几何体的表面积的方法:①多面体的表面积是各个面的面积之和,不要忘了底面积;②求组合体的表面积时要注意衔接部分的处理;③旋转体的表面积问题可转化为其侧面展开图去求解.

(2)求空间几何体的体积的常用方法:①直接法,利用公式直接求解;②体积转换法,要根据具体情况,变换顶点和底面,转化为较容易的去求,注意灵活选择;③分割与补全法,把不规则的几何体分割为几个规则的几何体,或者补全为一个规则的几何体去求解.

**自测题**

1. 图 M4-11-13 是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图,则该几何体的表面积为　　(　　)

A. $20\pi$

B. $24\pi$

C. $28\pi$

D. $32\pi$

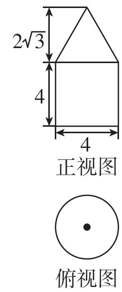


图 M4-11-13

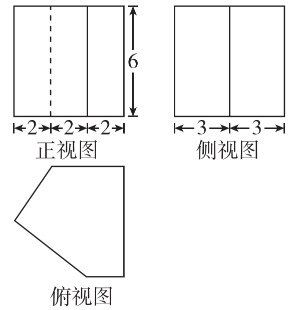


图 M4-11-14

2. [2019·浙江卷] 祖暅是我国南北朝时期的伟大科学家,他提出的"幂势既同,则积不容异"称为祖暅原理,利用该原理可以得到柱体的体积公式 $V_{柱体}=Sh$,其中 $S$ 是柱体的底面积,$h$ 是柱体的高.若某柱体的三视图如图 M4-11-14 所示(单位:cm),则该柱体的体积(单位:$cm^3$)是(　　)

A. 158　　B. 162

C. 182　　D. 324

3. 轴截面为正方形的圆柱的外接球的体积与该圆柱的体积的比值为　　(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

4. [2019·全国卷Ⅲ]学生到工厂劳动实践,利用 3D 打印技术制作模型,如图 M4-11-15,该模型为长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O$-$EFGH$ 后所得的几何体,其中 $O$ 为长方体的中心,$E,F,G,H$ 分别为所在棱的中点,$AB=BC=6$ cm,$AA_1=4$ cm. 3D 打印所用原料密度为 $0.9\ g/cm^3$,不考虑打印损耗,制作该模型所需原料的质量为________g.

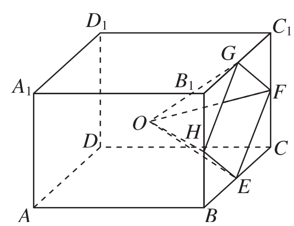


图 M4-11-15

## 小题 3　多面体与球

### 角度 1　外接球

**例 3**　已知 $E,F$ 分别是长方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱 $AB,A_1B_1$ 的中点,若 $AB=2\sqrt{2}$,$AD=AA_1=2$,则四面体 $C_1$-$DEF$ 的外接球的表面积为　　(　　)

A. $13\pi$　　B. $16\pi$

C. $18\pi$　　D. $20\pi$

[听课笔记]

【考场点拨】

几何体与球的外接问题归纳：

(1)求解棱柱、棱锥与球的外接问题时，一般过球心及接点作截面，把空间问题转化为平面图形与圆的相接问题，再利用平面几何知识寻找几何元素间的关系求解；

(2)若球面上四点 $P,A,B,C$ 构成的三条线段 $PA,PB,PC$ 两两互相垂直，一般把有关元素"补形"成为一个球内接长方体，利用 $4R^2=a^2+b^2+c^2$（其中 $R$ 为球的半径，$a,b,c$ 为长方体的棱长）求解.

### 角度 2　内切球

**例 4**　已知球 $O$ 与棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的各面都相切，则平面 $ACB_1$ 截球 $O$ 所得的截面的面积为　(　　)

A. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

[听课笔记] ________________

【考场点拨】

几何体与球的内切问题归纳：

(1)求解棱柱、棱锥的内切球问题时，一般过球心及切点作截面，把空间问题转化为平面图形与圆的相切问题，再利用平面几何知识寻找几何元素间的关系求解；

(2)特别地，当球为正棱锥的内切球时，球心到所有面的距离相等，且为球的半径，这样求球的半径可转化为求球心到棱锥的一个面的距离，故可利用截面的平面几何知识或等体积法去解决.

**自测题**

1. 已知圆台的上、下两底面与侧面都与球相切，圆台的侧面积为 $16\pi$，则该圆台上、下两个底面的周长之和为　(　　)

A. $4\pi$　　B. $6\pi$

C. $8\pi$　　D. $10\pi$

2. 如图 M4-11-16 所示，四棱锥 $E\text{-}ABCD$ 中，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，$\triangle ABE$ 为以 $E$ 为直角顶点的等腰直角三角形，平面 $ABE\perp$平面 $ABCD$，则该几何体外接球的表面积为　(　　)

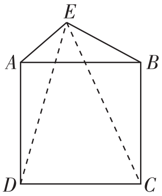



图 M4-11-16

A. $12\pi$　　B. $6\sqrt{2}\pi$

C. $2\sqrt{2}\pi$　　D. $8\pi$

3. 一个圆锥的母线长为 2，圆锥的母线与底面的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则圆锥的内切球的表面积为　(　　)

A. $8\pi$　　B. $4\times(2-\sqrt{2})^2\pi$

C. $4\times(2+\sqrt{2})^2\pi$　　D. $\frac{32\times(4-\sqrt{2})^2}{49}\pi$

4. 若一个正方体的表面积为 $S_1$，其外接球的表面积为 $S_2$，则 $\frac{S_1}{S_2}=$________.

## 小题 4　空间中的位置关系的判断

### 角度 1　线面位置关系

**例 5**　[2019·全国卷Ⅰ] 已知$\angle ACB=90°$，$P$ 为平面 $ABC$ 外一点，$PC=2$，点 $P$ 到$\angle ACB$ 两边 $AC,BC$ 的距离均为$\sqrt{3}$，那么 $P$ 到平面 $ABC$ 的距离为________.

[听课笔记] ________________

【考场点拨】

空间中线面位置关系的判断的注意点：

(1)对于空间中几何元素的位置关系的判断，常用的方法有：①根据定理逐项判断，可以举反例，也可以证明，要结合题目灵活选择；②必要时可以借助空间几何体模型，如长方体、正四面体等来判断线面的位置关系.

(2)求角时，一般情况是利用平移的方法先找到这个角，然后把这个角放到三角形中去求解.

(3)位置关系的判断常用反例法去排除选项.

### 角度 2　异面直线所成的角、线面角

**例 6**　在正四面体 $ABCD$ 中，$E,F$ 分别为棱 $AD,BC$ 的中点，则异面直线 $EF$ 与 $CD$ 所成的角为　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

[听课笔记] ________________

【考场点拨】

解决异面直线所成的角、线面角问题的常用方法：

通过平移、作辅助线等方法，先找到异面直线所成的角、线面角，然后放到一个三角形中，利用三角函数的性质或正、余弦定理等去解决问题.

### 角度3　翻折问题

**例7**　如图M4-11-17所示，在平面四边形$ABCD$中，$E,F$分别是$AD,BD$的中点，$AB=AD=CD=2,BD=2\sqrt{2}$，$\angle BDC=90°$，将$\triangle ABD$沿对角线$BD$折起至$\triangle A'BD$，使平面$A'BD\perp$平面$BCD$，则在四面体$A'\text{-}BCD$中，下列结论不正确的是　　(　　)

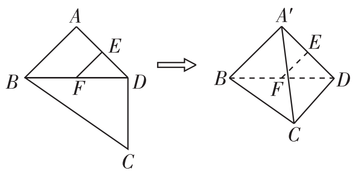


图 M4-11-17

A. $EF\parallel$平面$A'BC$

B. 异面直线$CD$与$A'B$所成的角为90°

C. 异面直线$EF$与$A'C$所成的角为60°

D. 直线$A'C$与平面$BCD$所成的角为30°

[听课笔记]

【考场点拨】

解决翻折问题的策略：

(1)立体几何中的翻折问题主要包含两大问题：一是平面图形按照某种要求折起，转化为空间图形，进而研究图形的位置关系和数量上的变化；二是把一个几何体的表面展开为一个平面图形，从而研究几何体表面上的距离问题.

(2)曲面上的最短路线问题常利用展开图转化为平面上两点间的距离问题，从而使问题得到解决.

**自测题**

1. 设$\alpha,\beta$为两个不同的平面，$m,n$为两条不同的直线，则下列说法中不正确的是　　(　　)

A. 若$m\perp\alpha,n\parallel\alpha$，则$m\perp n$

B. 若$\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则$m\perp n$

C. 若$\alpha\parallel\beta,m\subset\alpha$，则$m\parallel\beta$

D. 若$m\perp n,m\perp\alpha,n\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

2. 如图M4-11-18，在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，直线$AD_1$与平面$BDD_1B_1$所成角的正弦值为　　(　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

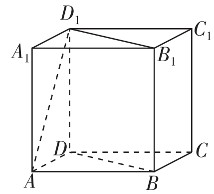


图 M4-11-18

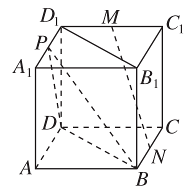


图 M4-11-19

3. 如图M4-11-19，在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$M,N,P$分别是$C_1D_1,BC,A_1D_1$的中点，则下列结论正确的是(　　)

A. $MN\parallel AP$

B. $MN\parallel BD_1$

C. $MN\parallel$平面$BB_1D_1D$

D. $MN\parallel$平面$BDP$

4. 在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，下列说法正确的是(　　)

A. $A_1C_1$与$B_1C$所成的角为60°

B. $D_1C_1\perp AB$

C. $AC_1$与$DC$所成的角为45°

D. $A_1C_1\perp AD$

5. 如图M4-11-20所示，在平行四边形$ABCM$中，$AB=AC=3,\angle ACM=90°$，以$AC$为折痕将$\triangle ACM$折起，使点$M$到达点$D$的位置，且$AB\perp DA$. $Q$为线段$AD$上一点，$P$为线段$BC$上一点，且$BP=DQ=\frac{2}{3}DA$，则三棱锥$Q\text{-}ABP$的体积为________.

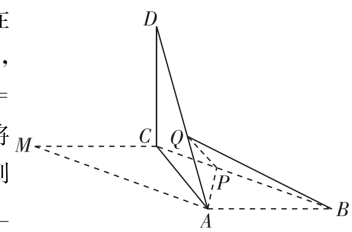


图 M4-11-20

请完成　**限时集训(十一)**

# 第12讲　立体几何

## 真知真题扫描

必备知识结论　高考真题验证

### ■ 必备知识

1. 线线平行

(1)比例线段证平行，特别是三角形中位线的利用；

(2)同一个平面内垂直于同一条直线的两条直线平行；

(3)平行四边形的对边互相平行.

2. 线线垂直

(1)等腰三角形底边上的中线与底边垂直；(2)菱形的对角线互相垂直；(3)圆的直径所对的圆周角为直角；(4)勾股定理验证垂直.

## ■ 真题验证

1. [2019·全国卷Ⅰ19] 如图 M4-12-1,直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形,$AA_1=4$,$AB=2$,$\angle BAD=60°$,$E$,$M$,$N$ 分别是 $BC$,$BB_1$,$A_1D$ 的中点.

(1)证明:$MN/\!/$平面 $C_1DE$;

(2)求点 $C$ 到平面 $C_1DE$ 的距离.

[试做]

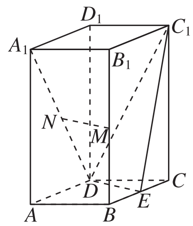
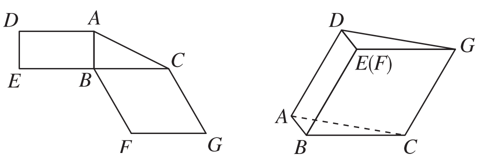


图 M4-12-1

2. [2019·全国卷Ⅲ19] 图 M4-12-2①是由矩形 $ADEB$,Rt△$ABC$和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形,其中 $AB=1$,$BE=BF=2$,$\angle FBC=60°$. 将其沿 $AB$,$BC$ 折起使得 $BE$ 与 $BF$ 重合. 连接 $DG$,如图②.



① ②

图 M4-12-2

(1)证明:图②中的 $A$,$C$,$G$,$D$ 四点共面,且平面 $ABC\perp$平面 $BCGE$;

(2)求图②中的四边形 $ACGD$ 的面积.

[试做]

3. [2017·全国卷Ⅰ18] 如图 M4-12-3,在四棱锥 $P$-$ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,且$\angle BAP=\angle CDP=90°$.

(1)证明:平面 $PAB\perp$平面 $PAD$;

(2)若 $PA=PD=AB=DC$,$\angle APD=90°$,且四棱锥 $P$-$ABCD$的体积为$\frac{8}{3}$,求该四棱锥的侧面积.

[试做]

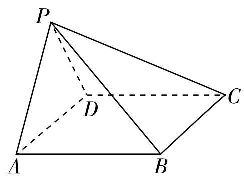


图 M4-12-3

4. [2018·全国卷Ⅲ19] 如图 M4-12-4,矩形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧$\overset{\frown}{CD}$所在平面垂直,$M$ 是$\overset{\frown}{CD}$上异于 $C$,$D$ 的点.

(1)证明:平面 $AMD\perp$平面 $BMC$.

(2)在线段 $AM$ 上是否存在点 $P$,使得 $MC/\!/$平面 $PBD$?说明理由.

[试做]

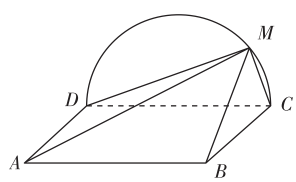


图 M4-12-4

## K 考点考法探究

研析高考题型　强化方法思维

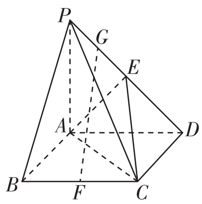
### 解答1　平行、垂直关系的证明

**例1**　如图M4-12-5所示，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AD$，$E$，$F$分别为$PD$，$BC$的中点.

(1)求证：$AE\perp PC$；

(2)$G$为棱$PD$上一点，若$FG\parallel$平面$AEC$，求$\dfrac{PG}{PD}$的值.

[听课笔记]



图M4-12-5

**【考场点拨】**

立体几何中平行、垂直问题的解题策略：

(1)空间线面的平行、垂直关系的判断常用的方法是转化法，如证明面面平行时，可转化为线面平行去证，而证明线面平行时，可转化为线线平行去证明，但有的时候证明线面平行时，先证明面面平行后，就很容易得出线面平行了.

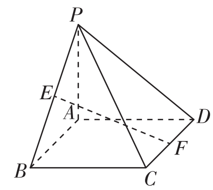
(2)在证明时，常在图形中通过三角形、平行四边形、矩形、中位线等去寻找平行和垂直关系.

**自测题**

如图M4-12-6所示，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的菱形，$\angle ABC=60°$，$E$，$F$分别是$PB$，$CD$的中点，且$PB=PC=PD=4$.

(1)求证：$PA\perp$平面$ABCD$；

(2)求证：$EF\parallel$平面$PAD$.



图M4-12-6

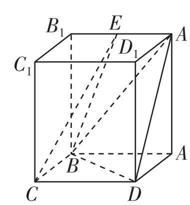
### 解答2　体积、距离的计算

**例2**　如图M4-12-7所示，在四棱柱$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，四边形$ABCD$是平行四边形，$A_1A\perp$平面$ABCD$，$\angle BAD=60°$，$AB=2$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，$E$为$A_1B_1$的中点.

(1)求证：平面$A_1BD\perp$平面$A_1AD$；

(2)求多面体$A_1EABCD$的体积.

[听课笔记]



图M4-12-7

【考场点拨】

体积和距离问题的解题策略：

(1)求体积常用的方法有：(a)换底法；(b)转化法；(c)割补法，换底法的一般思路是找出几何体的底面和高，看是否很容易计算，否则转换顶点和底面，转化为底面和高都比较容易求值的去计算；转化法是利用一个几何体与另一个几何体之间的关系，转换为求另一个几何体的体积；对于较复杂的几何体，有时也进行分割和补全的方法求体积；

(2)求距离时常利用等体积法，即把要求的距离转化成一个几何体的高，利用同一个几何体的体积相等，转化这个几何体的顶点去求解，但有时也利用垂直关系找出距离所对应的线段得长度，然后在三角形中利用正余弦定理（勾股定理）去求值.

**自测题**

1. 如图M4-12-8所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$\angle BAD=90°$，$\triangle PAD$ 为等边三角形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=AD=2CD=2$，$M$ 是 $PB$ 的中点.

(1)证明：$AC\perp PB$；

(2)求点 $P$ 到平面 $AMC$ 的距离.

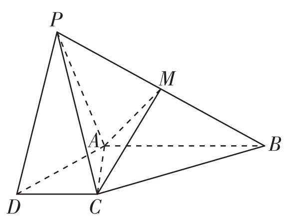


图 M4-12-8

2. 如图M4-12-9，$\triangle PAD$ 是边长为3的等边三角形，四边形 $ABCD$ 为正方形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. 点 $E,F$ 分别为棱 $CD,PD$ 上的点，且 $\frac{PF}{FD}=\frac{CE}{ED}=\frac{1}{2}$，$G$ 为棱 $AB$ 上一点，且 $\frac{AG}{GB}=\lambda$.

(1)当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，求证：$PG/\!/$平面 $AEF$；

(2)已知三棱锥 $A\text{-}EFG$ 的体积为 $\sqrt{3}$，求 $\lambda$ 的值.

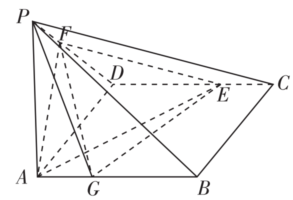


图 M4-12-9

## 解答3 翻折与探索性问题

**例3** [2019·北京卷] 如图M4-12-10，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，$E$ 为 $CD$ 的中点.

(1)求证：$BD\perp$ 平面 $PAC$.

(2)若 $\angle ABC=60°$，求证：平面 $PAB\perp$ 平面 $PAE$.

(3)棱 $PB$ 上是否存在点 $F$，使得 $CF/\!/$平面 $PAE$？说明理由.

[听课笔记]

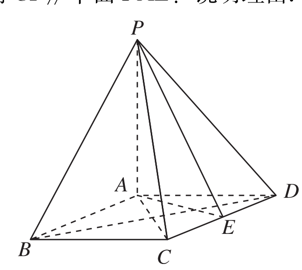


图 M4-12-10

【考场点拨】

翻折与探索性问题的解题策略：

(1)翻折问题在解题时，一定要弄清楚在翻折过程中哪些量发生了变化，哪些量没有发生变化，一般情况下，长度是不变量，而位置关系是常变量，在翻折后，通过连线就能得到三棱锥、四棱锥等几何体，从而把问题转化为我们较熟悉的几何体去解决，这是解题的关键；

(2)对于探索性问题，一般根据探索性问题的设问，首先假设其存在，然后在这个假设下进行推理论证，如果通过推理得到了合乎情理的结论就肯定假设，如果得到了与假设矛盾的结论就否定假设.

**自测题**

1. 如图 M4-12-11①所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\frac{1}{2}AD=2$，点 $E$ 为 $AD$ 边上异于 $A$，$D$ 两点的动点，且 $EF\parallel AB$，$G$ 为 $ED$ 的中点，现沿 $EF$ 将四边形 $ABEF$ 折起，使得 $AE$ 与 $CF$ 的夹角为 60°(如图②)，连接 $BD$，$FD$.

(1)在 $EF$ 上是否存在一点 $M$，使得 $GM\parallel$平面 $BDF$？若存在，说明点 $M$ 的位置，若不存在，请说明理由.

(2)求三棱锥 $G\text{-}BDF$ 的体积的最大值，并计算此时 $DE$ 的长度.

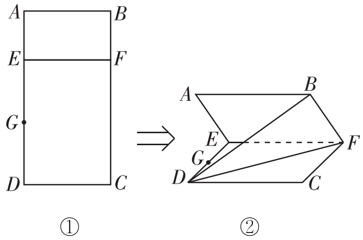


图 M4-12-11

2. 如图 M4-12-12 所示，在四棱锥 $E\text{-}ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$平面 $BCE$，四边形 $ABCD$ 为矩形，$BC=CE$，点 $F$ 为 $CE$ 的中点.

(1)证明：$AE\parallel$平面 $BDF$.

(2)点 $M$ 为 $CD$ 上任意一点，在棱 $AE$ 上是否存在一点 $P$，使得 $PM\perp BE$？若存在，确定点 $P$ 的位置，并加以证明；若不存在，请说明理由.

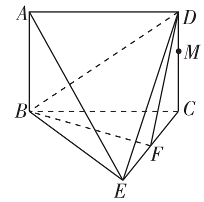


图 M4-12-12

请完成 限时集训(十二)