参考答案（作业手册）

高分特训

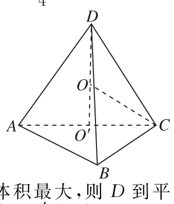
第一组

1. B [解析] ∵函数 $f(x)=x^2-\cos x$ 为偶函数，∴ $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，∵当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)=2x+\sin x\geqslant0$，∴函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又 $0<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{\pi}{2}$，∴ $f(0)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{3}{5}\right)$，即 $f(0)<f\left(-\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{3}{5}\right)$，故选B.

2. D [解析] 因为函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的图像关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称，所以 $\frac{3\pi}{4}\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}k,k\in\mathbf{Z}$，又 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上为单调函数，所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\frac{\pi}{2}}{\omega}$，即 $\omega\leqslant2$，因为 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2}{3}$ 或 $\omega=2$，即 $f(x)=\sin\frac{2}{3}x$ 或 $f(x)=\sin 2x$，所以总有 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$，故①②正确；由 $f(x)=\sin\frac{2}{3}x$ 或 $f(x)=\sin 2x$ 的图像(图略)知，$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},0\right]$ 上单调递增，故③正确；当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)=\sin\frac{2}{3}x$ 只有一个极大值，没有极小值，故④不正确. 综上，所有正确结论的编号是①②③，故选D.

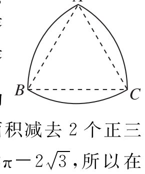
3. D [解析] 设 $P(m^2,m)$，$m>0$，易知抛物线在第一象限对应的函数为 $f(x)=\sqrt{x}(x>0)$，因为 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以抛物线在点 P 处的切线斜率为 $f'(m^2)=\frac{1}{2\sqrt{m^2}}=\frac{1}{2m}$，又切线过点 $F(-4,0)$，所以 $\frac{m}{m^2+4}=\frac{1}{2m}$，得 $m=2$，则 $P(4,2)$. 设双曲线的右焦点为 $A(4,0)$，则 $2a=|PF|-|PA|=\sqrt{68}-\sqrt{4}=2(\sqrt{17}-1)$，即 $a=\sqrt{17}-1$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}+1}{4}$. 故选D.

4. $\frac{625\pi}{4}$ [解析] 如图所示，取 AC 的中点 O'，连接 DO'，则 O' 为△ABC 的外接圆圆心，且 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$. 设 O 为四面体 $ABCD$ 的外接球球心，则 $OO'\perp$ 平面 ABC，若四面体 $ABCD$ 的体积最大，则 D 到平面 ABC 的距离最大，此时 $DO'\perp$ 平面 ABC，∴ D,O,O' 三点共线，则 $V_{四面体ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DO'=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times8\cdot DO'=8DO'=80$，∴ $DO'=10$. 设外接球的半径为 R，连接 OC，则在Rt△$OO'C$ 中，$O'O^2+O'C^2=OC^2$，即 $(10-R)^2+5^2=R^2$，解得 $R=\frac{25}{4}$，∴球 O 的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\frac{625}{16}=\frac{625\pi}{4}$.



第二组

1. B [解析] 如图，设 $BC=2$，以 B 为圆心的扇形面积是 $\frac{\pi\times2^2}{6}=\frac{2\pi}{3}$，△$ABC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，所以勒洛三角形的面积为3个扇形面积减去2个正三角形面积，即 $\frac{2\pi}{3}\times3-2\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$，所以在勒洛三角形中随机取一点，此点取自正三角形内的概率为 $\frac{\sqrt{3}}{2\pi-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2(\pi-\sqrt{3})}$. 故选B.



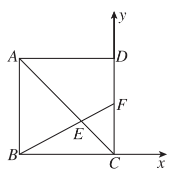
2. C [解析] 由图得 $\begin{cases}2\sin(2\pi\omega+\varphi)=2,\\2\sin(4\pi\omega+\varphi)=-1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}2\pi\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\4\pi\omega+\varphi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\pi$，$\pi<\frac{\pi}{2\omega}<2\pi$，∴ $\begin{cases}\omega=\frac{1}{3},\\\varphi=-\frac{\pi}{6},\end{cases}$ 从而 $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=2\sin\left[\frac{2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{3}-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$，令 $\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{4}$，故选C.

3. A [解析] 函数 $f(x)=e^{x-1}-e^{-x+1}+a\sin\pi x$ $(x\in\mathbf{R}$，e是自然对数的底数，$a>0)$ 存在唯一的零点等价于函数 $\varphi(x)=a\sin\pi x(a>0)$ 的图像与函数 $g(x)=e^{1-x}-e^{x-1}$ 的图像有唯一一个交点，∵ $\varphi(1)=0$，$g(1)=0$，∴函数 $\varphi(x)=a\sin\pi x(a>0)$ 的图像与函数 $g(x)=e^{1-x}-e^{x-1}$ 的图像的唯一一个交点的坐标为 $(1,0)$. ∵ $g'(x)=-e^{1-x}-e^{x-1}$，且 $e^{1-x}>0$，$e^{x-1}>0$，∴ $g'(x)=-e^{1-x}-e^{x-1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒小于零，即 $g(x)=e^{1-x}-e^{x-1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，又 $\varphi(x)=a\sin\pi x(a>0)$ 的最小正周期为2，最大值为 a，∴要使函数 $\varphi(x)=a\sin\pi x$ 的图像与函数 $g(x)=e^{1-x}-e^{x-1}$ 的图像有唯一一个交点，只需 $\varphi'(1)\geqslant g'(1)$. ∵ $\varphi'(1)=\pi a\cos\pi=-\pi a$，$g'(1)=-e^{1-1}-e^{1-1}=-2$，∴ $-\pi a\geqslant-2$，解得 $a\leqslant\frac{2}{\pi}$，又 $a>0$，∴实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{2}{\pi}\right]$. 故选A.

4. -1 [解析] 将点 M 的坐标 $(1,2)$ 代入 $y^2=2px$，可得 $p=2$，所以抛物线方程为 $y^2=4x$. 由题意知，直线 l 的斜率存在且不为0，设直线 l 的方程为 $x=my+n(m\neq0)$，与 $y^2=4x$ 联立，消去 x 得 $y^2-4my-4n=0$，由 $\Delta>0$ 得 $16m^2+16n>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1,x_2\neq1$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$，又由△MAB 的内切圆圆心为点 $(1,t)$，可得 $k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1-2}{x_1-1}+\frac{y_2-2}{x_2-1}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}+\frac{y_2-2}{\frac{y_2^2}{4}-1}=0$，整理得 $y_1+y_2+4=4m+4=0$，解得 $m=-1$，从而直线 l 的方程为 $y=-x+n$，所以直线 l 的斜率为 -1.

第三组

1. C [解析] 以 C 为原点，BC，CD 所在直线分别为 x，y 轴，建立平面直角坐标系，如图所示，则 $C(0,0)$，$A(-3,3)$，$B(-3,0)$，由△ABE∽△CFE，可得 $\frac{AB}{CF}=\frac{AE}{CE}=2$，则 $CF=\frac{3}{2}$，即 $F\left(0,\frac{3}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{CA}=(-3,3)$，$\overrightarrow{BF}=\left(3,\frac{3}{2}\right)$，则 $(\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{BF})\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}-4\overrightarrow{BF}\right)=(3,6)\cdot(-13,-5)=3\times(-13)+6\times(-5)=-69$. 故选C.



2. C [解析] 根据题意，$f(x+1)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，则有 $f(2+x)=f(-x)$，又由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，可得 $f(-x)=-f(x)$，则有 $f(2+x)=-f(x)$，进而可得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为4的周期函数. 又由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，知 $f(0)=0$，若 $f(-1)=2$，则 $f(1)=-f(-1)=-2$，$f(2)=f(0)=0$，$f(3)=f(-1)=2$，$f(4)=f(0)=0$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=504\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+[f(1)+f(2)+f(3)]=0$. 故选C.

3. D [解析] 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的过第一象限的渐近线的方程为 $y=\frac{b}{a}x$，圆 C：$x^2+(y-b)^2=4$ 的圆心坐标为 $(0,b)$，半径为2，∵ $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，∴△ABC 是边长为2的等边三角形，∴ $|AB|=2$，圆心 C 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 $\sqrt{3}$，又 $|AB|=|OB|-|OA|=2|OA|$，∴ $|OA|=1$，$|OB|=3$. 在△OBC，△OAC 中，由余弦定理得 $\cos\angle BOC=\cos\angle AOC=\frac{3^2+b^2-4}{6b}=\frac{b^2+1-4}{2b}$，∴ $b=\sqrt{7}$，由圆心 C 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 $\sqrt{3}$，得 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{c}=\sqrt{3}$，∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$. 故选D.

4. $\frac{2\pi}{3}$ [解析] 因为 $f(x)=A\sin(x+\varphi)$ 的图像的一条对称轴为直线 $x=\frac{5\pi}{6}$，所以 $A\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=\pm A$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=A\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $x-\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $f(x_1)+f(x_2)=0$ 且 $f(x)$ 在区间 (x_1,x_2) 上具有单调性，所以 $|x_1+x_2|=2\left|k\pi+\frac{\pi}{3}\right|$，当 $k=0$ 时，$|x_1+x_2|$ 取得最小值 $\frac{2\pi}{3}$.

第四组

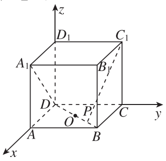
1. B [解析] 因为 $m=\log_{0.3}0.6>\log_{0.3}1=0$，$n=\frac{1}{2}\log_2 0.6<\frac{1}{2}\log_2 1=0$，所以 $mn<0$，$m-n>0$. 因为 $-\frac{1}{n}=-2\log_{0.6}2=\log_{0.6}0.25>0$，$\frac{1}{m}=\log_{0.6}0.3>0$，而 $\log_{0.6}0.25>\log_{0.6}0.3$，所以 $-\frac{1}{n}>\frac{1}{m}>0$，可得 $m+n>0$，因为 $(m-n)-(m+n)=-2n>0$，所以 $m-n>m+n$，所以 $m-n>m+n>mn$. 故选B.

2. A [解析] 函数 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)\left(x\in\left[0,\frac{9\pi}{16}\right]\right)$，令 $4x+\frac{\pi}{4}=t$，则 $\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{5}{2}\pi$，函数 $y=f(x)+a(a\in\mathbf{R})$ 恰有三个零点，可转化为函数 $y=\sin t\left(t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5}{2}\pi\right]\right)$ 的图像与直线 $y=-a$ 有三个交点. 根据三角函数图像的性质可得 $\frac{1}{2}(t_1+t_2)=\frac{\pi}{2}$，$\frac{9}{4}\pi\leqslant t_3<\frac{5}{2}\pi$，∴ $t_1+t_2=\pi$，即 $x_1+x_2=\frac{\pi}{8}$，由 $\frac{9}{4}\pi\leqslant4x_3+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{2}\pi$，可得 $\frac{\pi}{2}\leqslant x_3<\frac{9\pi}{16}$，∴ $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是 $\left[\frac{5\pi}{8},\frac{11\pi}{16}\right)$. 故选A.

3. B [解析] 由题知 $F(2,0)$，设过焦点 F 的直线方程为 $x=my+2$，与抛物线方程联立，消去 x 可得 $y^2-8my-16=0$，设 $A\left(\frac{y_1^2}{8},y_1\right)$，$B\left(\frac{y_2^2}{8},y_2\right)$，则 $y_1+y_2=8m$，$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{y_1^2}{8}\cdot\frac{1}{y_1}+\frac{y_2^2}{8}\cdot\frac{1}{y_2}=m$. 由抛物线的焦点弦公式可知 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{8}{\sin^2\theta}\in[16,24]$（其中 θ 为直

线 AB 的倾斜角)，则 $\sin^2\theta\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$，所以 $\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{1}{1-\sin^2\theta}-1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，故 $m^2=\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)^2\in[1,2]$，所以 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 的取值范围是 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$. 故选 B.

4. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ ［解析］以 D 为坐标原点，DA 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，DD_1 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A_1(2,0,2)$，$D(0,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，设 $P(a,a,0)$，$1<a<2$，则 $\overrightarrow{A_1D}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{C_1P}=(a,a-2,-2)$. ∵异面直线 A_1D 与 C_1P 所成的角为 θ，∴$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{C_1P}|}{|\overrightarrow{A_1D}|\cdot|\overrightarrow{C_1P}|}=\frac{|4-2a|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{a^2+(a-2)^2+4}}=\frac{2-a}{2\sqrt{a^2-2a+4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+4}}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2a}{a^2-2a+4}}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{a+\frac{4}{a}-2}}$，∵$1<a<2$，∴$a+\frac{4}{a}\in(4,5)$，∴$a+\frac{4}{a}-2\in(2,3)$，∴$\frac{2}{a+\frac{4}{a}-2}\in\left(\frac{2}{3},1\right)$，∴$\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2}{a+\frac{4}{a}-2}}\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$，∴$\cos\theta$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.



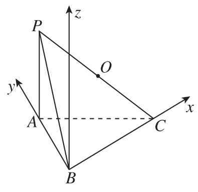
第五组

1. C ［解析］设 F' 为椭圆的左焦点，连接 AF'，BF'(图略)，则四边形 $AFBF'$ 是平行四边形，∴$6=|AF|+|BF|=|AF'|+|AF|=2a$，∴$a=3$. 不妨设 $P(0,b)$，∵点 P 到直线 $l:4x-3y=0$ 的距离不小于 $\frac{6}{5}$，∴$\frac{|-3b|}{\sqrt{16+9}}\geqslant\frac{6}{5}$，解得 $b\geqslant2$，∴$c\leqslant\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$，∴$0<\frac{c}{a}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{3}$，∴椭圆 C 的离心率的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$.

2. C ［解析］由题意，$\beta\sin\alpha>\alpha\sin\beta$，$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$. 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，设 $g(x)=x\cos x-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$，∴$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，∴$g(x)<g(0)=0$，∴$f'(x)<0$，∴$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，∵$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$，即 $f(\alpha)>f(\beta)$，∴$\alpha<\beta$. 故选 C.

3. D ［解析］因为 $2a_na_{n+1}+a_n+3a_{n+1}+2=0$，所以 $2a_na_{n+1}+2a_n+2a_{n+1}+2=a_n-a_{n+1}$，所以 $2(a_n+1)(a_{n+1}+1)=(a_n+1)-(a_{n+1}+1)$. 由 $b_n=\frac{n-\lambda}{a_n+1}$，知 $a_n+1\neq0$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{a_n+1}=2$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$ 为等差数列，且首项为 $\frac{1}{a_1+1}=2$，公差为 2，则 $\frac{1}{a_n+1}=2+2(n-1)=2n$，所以 $a_n=\frac{1}{2n}-1$，所以 $b_n=2n(n-\lambda)=2n^2-2\lambda n$. 要使 b_5 为数列 $\{b_n\}$ 的唯一最小项，则 $\frac{\lambda}{2}\in\left(\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right)$，所以 $\lambda\in(9,11)$. 故选 D.

4. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ［解析］设球 O 的半径为 r，则由题知 $4\pi r^2=24\pi$，∴$r=\sqrt{6}$，∴$PC=2r=2\sqrt{6}$，∵$PA\perp AC$，$AC=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，∴$PA=\sqrt{24-20}=2$. 易知 $PA\perp$ 平面 ABC，以 B 为坐标原点，BC 所在直线为 x 轴，BA 所在直线为 y 轴，过 B 作平面 ABC 的垂线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，则 $P(0,2,2)$，$C(4,0,0)$，$A(0,2,0)$，$B(0,0,0)$，∴$\overrightarrow{PC}=(4,-2,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(0,-2,0)$. 设异面直线 PC 与 AB 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{4}{\sqrt{24}\times2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，∴异面直线 PC 与 AB 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.



第六组

1. D ［解析］由题意，圆 C 的圆心为 $C(2,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，设 $P(x,y)$，切线 l_1,l_2 分别切圆 C 于点 A,B，则由题知 $PA\perp PB$，又 $PA\perp AC$，$PB\perp BC$，$|AC|=|BC|$，所以四边形 $PACB$ 为正方形，所以 $|PC|=2$，所以点 P 的轨迹是以点 $(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，其轨迹方程为 $(x-2)^2+y^2=4$. 若直线 l 上存在点 P 满足题意，则直线 l 与点 P 的轨迹有交点，所以圆心 $C(2,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant2$，解得 $k\geqslant0$，即实数 k 的取值范围是 $[0,+\infty)$. 故选 D.

2. B ［解析］当直线 l 的斜率不存在时，设直线 l 的方程为 $x=t$，$-2<t<2$ 且 $t\neq0$，与椭圆方程联立，得 $\frac{t^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，∴$y=\pm\sqrt{3-\frac{3t^2}{4}}$，∴$|AB|=2\sqrt{3-\frac{3t^2}{4}}$，∴$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times|t|\times2\sqrt{3-\frac{3t^2}{4}}=\sqrt{3}$，解得 $t^2=2$，∴$|OA|^2+|OB|^2=2t^2+2\times\left(3-\frac{3t^2}{4}\right)=6+\frac{1}{2}t^2=7$. 当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m(m\neq0)$，与椭圆方程联立，消去 y 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，由 $\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$，得 $4k^2-m^2+3>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，∴$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2-m^2+3}}{3+4k^2}$. ∵点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，∴$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\sqrt{3}$，得 $3+4k^2=2m^2$，即 $k^2=\frac{2m^2-3}{4}$①.

又 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，∴$|OA|^2+|OB|^2=\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)+6=\frac{1}{4}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+6=\frac{8k^2m^2-6m^2+18+24k^2}{(3+4k^2)^2}+6$，将①代入得 $|OA|^2+|OB|^2=1+6=7$. 故选 B.

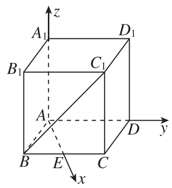
3. B ［解析］设 $AB=m$，$AC=n$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}mn$，$\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $\sqrt{m^2+n^2}$，三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}mn\left(\sqrt{9-\frac{m^2+n^2}{4}}+3\right)\leqslant\frac{1}{3}\times\frac{m^2+n^2}{4}\left(\sqrt{9-\frac{m^2+n^2}{4}}+3\right)$(当且仅当 $m=n$ 时等号成立). 设 $t=\frac{m^2+n^2}{4}(0<t\leqslant9)$，则 $f(t)=\frac{1}{3}t(\sqrt{9-t}+3)$，$f'(t)=\frac{1}{3}\left(\sqrt{9-t}-\frac{t}{2\sqrt{9-t}}+3\right)$，令 $f'(t)=0$，得 $t=8$，∴$f(t)$ 在 $(0,8)$ 上单调递增，在 $(8,9]$ 上单调递减，∴$f(t)_{\max}=f(8)=\frac{32}{3}$，即该三棱锥体积的最大值是 $\frac{32}{3}$，故选 B.

4. $-\frac{3}{2}<a<1$ ［解析］∵$f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=e^x-\frac{1}{e^x}-2\sin x$，∴$f(-x)=e^{-x}-\frac{1}{e^{-x}}-2\sin(-x)=-\left(e^x-\frac{1}{e^x}-2\sin x\right)=-f(x)$，∴$f(x)$ 是奇函数，且 $f(0)=0$. 又∵$f'(x)=e^x+\frac{1}{e^x}-2\cos x$，$e^x+\frac{1}{e^x}\geqslant2$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立)，$2\cos x\leqslant2$，∴$f'(x)\geqslant0$，∴$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，∴$f(2a^2)+f(a-3)+f(0)<0$ 可化为 $f(2a^2)<-f(a-3)=f(3-a)$，∴$2a^2<3-a$，解得 $-\frac{3}{2}<a<1$.

第七组

1. B ［解析］由函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，得 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，又对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 时取得最小值，所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 令 $2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，故 a 的最大值是 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

2. B ［解析］取 BC 的中点 E，连接 AE，由题易知 $AE\perp AD$. 以 A 为原点，AE 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，AA_1 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AB=2$，则 $B(\sqrt{3},-1,0)$，$C_1(\sqrt{3},1,2)$，$A(0,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，∴$\overrightarrow{BC_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$. 设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x-y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=2z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},0)$. 设直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{8}\times\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，∴$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，∴直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$. 故选 B.



3. A ［解析］由题可知，抛物线的焦点为 $F(1,0)$，圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的圆心坐标为 $(1,0)$，半径为 1. 设 $|PF|=m$，$|QF|=n$，则 $|PM|=m-1$，$|QN|=n-1$，∵$y^2=4x$，∴$p=2$，根据抛物线的常用结论，有 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}=1$，∴$\frac{m+n}{mn}=1$，则 $m+n=mn$，∴$\frac{1}{|PM|}+\frac{4}{|QN|}=\frac{1}{m-1}+\frac{4}{n-1}=\frac{4m+n-5}{mn-(m+n)+1}=4m+n-5$. 又∵$(4m+n)\cdot1=(4m+n)\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=4+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}+1\geqslant5+2\sqrt{\frac{4m}{n}\cdot\frac{n}{m}}=9$，当且仅当 $\frac{4m}{n}=\frac{n}{m}$，即 $n=2m=3$ 时等号成立，∴$4m+n-5\geqslant4$，则 $\frac{1}{|PM|}+\frac{4}{|QN|}$ 的值不可能为 3. 故选 A.

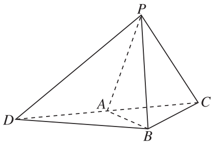
4. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$ ［解析］由题知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $f(x)=0$，得 $a=\frac{\ln x}{x}-x^2+2ex-e^2$. 设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}-x^2+2ex-e^2(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+2(e-x)=\frac{\ln\frac{e}{x}}{x^2}+2(e-$

x),所以 $g'(\mathrm{e})=0$,当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$g'(x)>0$,当 $x>\mathrm{e}$ 时,$g'(x)<0$,所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增,在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$,且当 $x\to+\infty$ 时,$g(x)\to-\infty$. 因为函数 $f(x)=\ln x-x^3+2\mathrm{e}x^2-(a+\mathrm{e}^2)x$ 在定义域内有零点,所以直线 $y=a$ 和函数 $g(x)$ 的图像有交点,所以 $a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$.

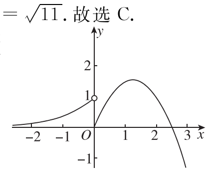
第八组

1. A [解析] 由题意知 M 位于双曲线右支上,设双曲线的右焦点是 F',连接 MF',NF'(图略),由双曲线的对称性和 $\angle MFN=90°$,得四边形 $MFNF'$ 是矩形,$\because \angle MOF=120°$,$\therefore \angle MOF'=60°$,故 $\triangle MOF'$ 是等边三角形,$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle MFF'$ 中,$\angle MFF'=30°$,又 $|FF'|=2c$,$\therefore |MF'|=c$,$|MF|=\sqrt{3}c$,$\because |MF|-|MF'|=2a$,$\therefore \sqrt{3}c-c=2a$,$\therefore \frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$,$\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=(\sqrt{3}+1)^2-1=3+2\sqrt{3}$. 故选 A.

2. C [解析] 如图,延长 CA 至 D,使得 $AD=3$,连接 DB,PD,因为 $AD=AB=3$,所以 $\triangle ADB$ 为等腰三角形,又 $\angle DAB=180°-\angle CAB=120°$,故 $\angle ADB=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$,所以 $\angle ADB+\angle DCB=90°$,即 $\angle DBC=90°$,故 $CB\perp DB$. 因为 $PB=4$,$PC=5$,$BC=3$,所以 $PC^2=PB^2+BC^2$,所以 $CB\perp PB$,因为 $DB\cap PB=B$,$DB\subset$ 平面 PBD,$PB\subset$ 平面 PBD,所以 $CB\perp$ 平面 PBD,所以 $V_{三棱锥C\text{-}PBD}=V_{三棱锥C\text{-}PBD}=\frac{1}{3}\cdot CB\cdot S_{\triangle PBD}$,因为 A 为 DC 的中点,所以 $V_{三棱锥P\text{-}ABC}=\frac{1}{2}V_{三棱锥P\text{-}CBD}=\frac{1}{6}\times 3\times S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}S_{\triangle PBD}$. 因为 $DA=AC=AP=3$,所以 $\triangle PDC$ 为直角三角形,所以 $PD=\sqrt{CD^2-PC^2}=\sqrt{36-25}=\sqrt{11}$,又 $DB=\sqrt{3}AD=3\sqrt{3}$,$PB=4$,所以 $DB^2=PD^2+PB^2$,即 $PD\perp PB$,所以 $S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{11}=2\sqrt{11}$,所以 $V_{三棱锥P\text{-}ABC}=\sqrt{11}$. 故选 C.



3. B [解析] 方程 $f(x)=kx+1$ 有 3 个不同的实根,即曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx+1$ 有 3 个不同的交点,画出函数 $f(x)$ 的图像如下图所示. 易知直线 $y=kx+1$ 过定点 $(0,1)$,当直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=-x^2+\frac{5}{2}x$ 相切,且切点位于第一象限时,曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx+1$ 有 2 个交点,由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ y=-x^2+\frac{5}{2}x\end{cases}$ 消去 y,整理得 $x^2+\left(k-\frac{5}{2}\right)x+1=0$,令 $\Delta=\left(k-\frac{5}{2}\right)^2-4=0$,解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{9}{2}$(舍去). 结合图像可得,若方程 $f(x)=kx+1$ 有 3 个不同的实根,则 k 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 故选 B.



4. $(7,+\infty)$ [解析] 由 $\frac{a_m-a_n}{m-n}>t$ 得 $\frac{(m^2+am)-(n^2+an)}{m-n}>t$,即 $m+n+a>t$,数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $R(10)$,即 $m+n+a>10$ 恒成立,即 $a>10-(m+n)$ 恒成立,显然 $m+n$ 的最小值为 3,故 $10-(m+n)$ 的最大值为 7,$\therefore a>7$.

第九组

1. C [解析] 在直角三角形 BCE 中,$a=c\cos 15°$,$b=c\sin 15°$,则所求概率 $P=\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{梯形ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}c^2}{\frac{1}{2}(a+b)^2}=\frac{c^2}{c^2(\cos 15°+\sin 15°)^2}=\frac{1}{1+\sin 30°}=\frac{2}{3}$,故选 C.

2. B [解析] 以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴,建立平面直角坐标系(图略),则 $B(5,0)$,设 $D(m,n)$,$C(m+2,n)$,$m>0$,$n>0$,则 $\overrightarrow{AC}=(m+2,n)$,$\overrightarrow{BD}=(m-5,n)$,$\because \begin{cases}AD=4,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}m^2+n^2=16,\\ m^2+n^2-3m-10=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}m=2,\\ n=2\sqrt{3},\end{cases}$ 因此直线 BC 的方程为 $y=\frac{2\sqrt{3}}{4-5}(x-5)$,即 $y=-2\sqrt{3}(x-5)$. 设 $E(x,-2\sqrt{3}(x-5))$,$4\leqslant x\leqslant 5$,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=(x,-2\sqrt{3}(x-5))\cdot(x-2,-2\sqrt{3}(x-5)-2\sqrt{3})=13x^2-110x+240$,当 $x=\frac{55}{13}\in[4,5]$ 时,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}$ 取得最小值 $\frac{95}{13}$. 故选 B.

3. D [解析] 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=n^2+n$①,
当 $n\geqslant 2$ 时,$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)$②,
①−②得 $\frac{1}{n}a_n=2n(n\geqslant 2)$,故 $a_n=2n^2(n\geqslant 2)$,
当 $n=1$ 时,$a_1=2$ 满足上式,所以 $a_n=2n^2(n\in\mathbf{N}^*)$. 由题知 $b_n=\frac{2n+1}{a_na_{n+1}}=\frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$,则 $T_n=\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$,由于 $T_n<\frac{n}{n+1}\lambda(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立,故 $\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]<\frac{n}{n+1}\lambda(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立,整理得 $\lambda>\frac{n+2}{4n+4}(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立,易知当 $n=1$ 时,$\left(\frac{n+2}{4n+4}\right)_{\max}=\frac{3}{8}$,所以 $\lambda>\frac{3}{8}$,故选 D.

4. $\frac{5}{3}$ [解析] 过 A,D 作平面 α 的垂线,垂足分别为 F,E,连接 EF,则 EF 过 BC 的中点 S,连接 SA,DS(图略). 在直角梯形 $AFED$ 中,$AD=2$,$AS=DS=\sqrt{3}$,$DE=1$,所以 $SE=\sqrt{2}$,$\tan\angle DSE=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\cos\angle ASD=\frac{3+3-4}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$,所以 $\tan\angle ASD=2\sqrt{2}$,因此 $\tan(\angle ASD+\angle DSE)=\frac{2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$,所以 $\tan\angle ASF=\frac{5\sqrt{2}}{2}$,故 $\sin\angle ASF=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$,所以 $AF=AS\cdot\sin\angle ASF=\frac{5}{3}$,即点 A 到平面 α 的距离等于 $\frac{5}{3}$.

第十组

1. C [解析] 由题意可得 $f'(x)=\mathrm{e}^{x-a}-\mathrm{e}^{-x+a}$,令 $f'(x)\geqslant 0$,得 $x\geqslant a$,$\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增. $\because 3^a=\log_3 b=c$,$\therefore a<c<b$,故 $f(a)<f(c)<f(b)$,故选 C.

2. B [解析] 依题意,当 M 为 BC 的中点时,截面为四边形 $AMND_1$,从而当 $0<BM\leqslant\frac{1}{2}$ 时,截面为四边形,当 $\frac{1}{2}<BM<1$ 时,截面与正方体的上底面也相交,所以截面为五边形,故 BM 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$. 故选 B.

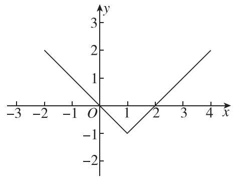
3. A [解析] 由 $f(x)f(y)=f(x+y)$,令 $x=0$,$y=-1$,得 $f(0)f(-1)=f(-1)$,$\because$ 当 $x<0$ 时,$f(x)>1$,$\therefore f(-1)>1$,$\therefore f(0)=1$,$\therefore a_1=1$. 当 $x>0$ 时,$-x<0$,$\because f(x)f(-x)=f(0)=1$,$\therefore f(x)=\frac{1}{f(-x)}$,又 $f(-x)>1$,$\therefore$ 当 $x>0$ 时,$0<f(x)<1$. 令 $x_2>x_1$,则 $x_2-x_1>0$,$\because f(x_1)f(x_2-x_1)=f(x_2)$,即 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=f(x_2-x_1)\in(0,1)$,$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,又 $f(a_{n+1})f\left(\frac{1}{1+a_n}\right)=f\left(a_{n+1}+\frac{1}{1+a_n}\right)=1=f(0)$,$\therefore a_{n+1}=-\frac{1}{1+a_n}$. 令 $n=1$,得 $a_2=-\frac{1}{2}$;令 $n=2$,得 $a_3=-2$;令 $n=3$,得 $a_4=1$. $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列,$\therefore a_{2016}=a_3=-2$,$a_{2017}=a_1=1$,$a_{2018}=a_2=-\frac{1}{2}$,$a_{2019}=a_3=-2$,$a_{2020}=a_1=1$. $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,$\therefore f(-2)>f\left(-\frac{1}{2}\right)>f(1)$,$\therefore f(a_{2016})>f(a_{2018})$,$f(a_{2017})=f(a_{2020})$,$f(a_{2018})<f(a_{2019})$,$f(a_{2016})=f(a_{2019})$. 故选 A.

4. $-\frac{24}{25}$ [解析] 由任意角的三角函数的定义得,$\sin\alpha=b$,$\cos\alpha=a$. $\because a+b=\frac{7}{5}$,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$,两边同时平方可得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$,$\therefore 1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$,$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$,$\therefore \cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2\alpha=-2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$.

限时集训(一)

基础过关

1. C [解析] 由题意可得,$f(x)=|x-1|-1=\begin{cases}x-2,x\geqslant 1,\\ -x,x<1,\end{cases}$ 绘制函数图像如图所示,观察函数图像可得,图像关于直线 $x=1$ 对称,选项 A 中的结论正确;最小值为 −1,选项 B 中的结论正确;图像不关于点 $(1,-1)$ 对称,选项 C 中的结论错误;在 $(-\infty,0]$ 上单调递减,选项 D 中的结论正确. 故选 C.



2. A [解析] 函数 $y=x\cos x$ 为奇函数,故排除 B,D,当 x 取很小的正实数时,函数值大于零,故选 A.

3. C [解析] 因为当 $x>2$ 时,$f(x)=-f(x-2)$,所以 $f(x+2)=-f(x)$,故 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,因此当 $x>2$ 时,函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,所以 $f(2019)=f(3+4\times 504)=f(3)=-f(1)$,又当 $x\leqslant 2$ 时,$f(x)=\mathrm{e}^{x-1}+x^2$,所以 $f(2019)=-f(1)=-(1+1)=-2$. 故选 C.

4. B [解析] 由题意知,$f(-x)=(-x)^3+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是奇函数,且 $f(2)=8+\ln(\sqrt{5}-2)>0$,故选 B.

5. D [解析] 当 $x\leqslant 2$ 时,$f(x)=2^{|x-2|}=2^{2-x}$,函数单调递减,$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(2)=1$. 当 $x>2$ 时,$f(x)=\log_2(x+a)$ 单调递增,若满足题意,只需 $\log_2(x+a)\geqslant 1$ 恒成立,即 $x+a\geqslant 2$ 恒成立,$\therefore a\geqslant(2-x)_{\max}$,$\therefore a\geqslant 0$,故选 D.

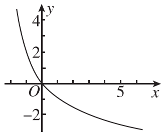
6. B [解析] 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,所以 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f(2)=f(0)$,$f(3)=f(-1)$. 又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,又由 $f(1+x)=f(1-x)$ 可得 $f(x+1)=f(1-x)=-f(x-1)$,所以 $f(x+2)=-f(x)$,故 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,因此,函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,所以 $f(4)=f(0)$,又 $f(1)=a$,因此 $f(2)+f(3)+f(4)=f(0)+f(-1)+f(0)=-f(1)=-a$. 故选 B.

7. C [解析] 由于函数 $y=f(x)$ 是偶函数,则 $f(x)=f(|x|)$,当 $0\leqslant a<b$ 时,$(a-b)[f(a)-f(b)]>0$,则 $a-b<0$,$f(a)-f(b)<0$,即 $f(a)<f(b)$,$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. $\because$ 函数 $y=f(x)$ 的图像过点 $(-2,1)$,$\therefore f(-2)=1$,由 $f(x-2)>1$,得 $f(x-2)>f(-2)$,由偶函数的性质得 $f(|x-2|)>f(2)$. $\because$ 函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,$\therefore |x-2|>2$,解得 $x<0$ 或 $x>4$,因此,使得不等式 $f(x-2)>1$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$,故选 C.

8. B [解析] 由 $f(x+1)=f(x)$ 可得,$a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}+1\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$,$c=f\left(\frac{4}{3}\right)=f\left(1+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)$,又 $b=f\left(\frac{2}{3}\right)$,且当 $x\in[0,1)$ 时,$f(x)=\log_2(x+$

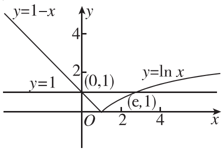
1)，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，由 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，可得 $c<a<b$. 故选 B.

9. A ［解析］作出函数$f(x)$的大致图像如图所示，由图像可知，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，∵$f(3m-2x)<f\left(\frac{1}{2}x+m\right)$，∴ $3m-2x>\frac{1}{2}x+m$，即$\frac{5}{4}x<m$. ∵$x\in[m,m+1]$，∴$\frac{5}{4}(m+1)<m$，解得 $m<-5$，即 $m\in(-\infty,-5)$.



10. $\frac{1}{2}$ ［解析］由题知 $f(-1)=4$，则 $f(4)=16+\log_a 4=14$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

11. $(-\infty,0)\cup(e,+\infty)$ ［解析］方法一：若 $m\geqslant1$，则由 $\ln m>1$，得 $m>e$；若 $m<1$，则由 $1-m>1$，得 $m<0$. 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(e,+\infty)$.
方法二：如图所示，可得 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x\geqslant1,\\ 1-x, x<1\end{cases}$ 的图像与直线 $y=1$ 的交点分别为$(0,1)$，$(e,1)$，由图可知，若 $f(m)>1$，则实数 m 的取值范围是$(-\infty,0)\cup(e,+\infty)$.



12. 3 ［解析］因为函数 $f(x)$ 的图像关于点$(2,0)$对称，所以 $f(1)=-f(3)=-3$，又因为函数$f(x)$为奇函数，所以 $f(-1)=-f(1)=3$.

13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ［解析］∵函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+4)=f(x)$，∴$f(x)$为周期为 4 的周期函数，∴$f(-5)=f(-5+4)=f(-1)$. 由 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}, 0<x\leqslant2,\\ \left|x+\frac{1}{2}\right|, -2<x\leqslant0,\end{cases}$ 可得 $f(-5)=f(-1)=\left|-1+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，∴$f[f(-5)]=f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $(0,2)$ ［解析］$f(x)=\begin{cases}1, x\geqslant0,\\ -1-\frac{4}{x-2}, x<0,\end{cases}$ 所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在$[0,+\infty)$上为常数函数，则$\begin{cases}x^2-2x<2-x,\\ x^2-2x<0,\end{cases}$解得 $0<x<2$.

能力提升

15. A ［解析］由函数 $f(x)=\frac{m}{3^x-1}-\frac{5}{2}$的图像关于点$(0,2)$对称，得 $f(x)+f(-x)=4$，即 $m=-9$，则 $f(x)>11$ 等价于$\frac{-9}{3^x-1}-\frac{5}{2}>11$，即$\frac{1}{3}<3^x<1$，解得$-1<x<0$，则原不等式的解集为$(-1,0)$.

16. B ［解析］因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在区间$(-\infty,0]$上为增函数，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数. 因为 $f(3)=0$，所以不等式 $f(1-2x)>0$ 等价于 $f(1-2x)>f(3)$，所以$|1-2x|<3$，解得$-1<x<2$，即不等式的解集为$(-1,2)$.

17. D ［解析］由 $f(x)=f(4-x)$得函数 $f(x)$的图像关于直线 $x=2$ 对称，则 $a=f(0)=f(4)$，$b=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)$，$c=f(3)$，又因为$(x-2)f'(x)>0$，所以当 $x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$为增函数，所以 $f(4)>f\left(\frac{7}{2}\right)>f(3)$，即 $a>b>c$，故选 D.

18. B ［解析］∵函数 $f(x)$对定义域内的任意 x，均有 $f[f(x)-\ln x-x^3]=2$，∴$f(x)-\ln x-x^3$ 是定值，不妨令 $f(x)-\ln x-x^3=t$，则 $f(t)=\ln t+t^3+t=2$，解得 $t=1$，∴$f(x)=\ln x+x^3+1$，∴$f(e)=\ln e+e^3+1=e^3+2$，故选 B.

19. A ［解析］因为对任意 $x_1<x_2\leqslant1$，满足 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，所以当 $x\leqslant1$ 时，$y=f(x)$是减函数，又因为 $f(x+1)$为偶函数，所以$y=f(x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称，所以当 $x>1$时，$y=f(x)$是增函数，又因为 $f(3)=1$，所以有 $f(-1)=1$. 当 $\log_2 x\leqslant1$，即 $0<x\leqslant2$ 时，$f(\log_2 x)<1\Rightarrow f(\log_2 x)<f(-1)\Rightarrow\log_2 x>-1\Rightarrow x>\frac{1}{2}$，∴$\frac{1}{2}<x\leqslant2$；当 $\log_2 x>1$，即 $x>2$ 时，$f(\log_2 x)<1\Rightarrow f(\log_2 x)<f(3)\Rightarrow\log_2 x<3\Rightarrow x<8$，∴$2<x<8$. 综上所述，不等式 $f(\log_2 x)<1$ 的解集为$\left(\frac{1}{2},8\right)$，故选 A.

20. 4038 ［解析］由 $g(x)=(x-1)^3+1$ 知，$g(x)+g(2-x)=2$，得函数 $y=g(x)$的图像关于点$(1,1)$对称，又函数 $f(x)$的图像关于点$(1,1)$对称，则函数 $f(x)$的图像与函数 $g(x)$图像的交点关于点$(1,1)$对称，则 $x_1+x_{2019}=x_2+x_{2018}=x_3+x_{2017}=\cdots=2x_{1010}=2$，$y_1+y_{2019}=y_2+y_{2018}=y_3+y_{2017}=\cdots=2y_{1010}=2$，故 $x_1+x_2+\cdots+x_{2018}+x_{2019}=2019$，$y_1+y_2+\cdots+y_{2018}+y_{2019}=2019$，即 $\sum_{i=1}^{2019}(x_i+y_i)=4038$.

限时集训（二）

基础过关

1. A ［解析］函数 $y=a^{x-1}(a>0$，且 $a\neq1)$的图像恒过点 A，∴令 $x-1=0$，可得 $x=1$，此时 $y=1$，∴恒过点 $A(1,1)$. 把 $x=1$，$y=1$ 代入各选项验证，只有 A 选项中函数的图像没有经过 A 点. 故选 A.

2. B ［解析］$x=2^{0.2}>2^0=1$，$y=\lg\frac{2}{5}<\lg1=0$，$z=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{5}}<\left(\frac{2}{5}\right)^0=1$ 且 $z>0$，∴$y<z<x$.

3. D ［解析］当 $m\geqslant2$ 时，$m^2-1=3$，∴$m^2=4$，∴$m=\pm2$，∵$m\geqslant2$，∴$m=2$；当 $0<m<2$ 时，$\log_2 m=3$，∴$m=2^3=8$，∵$0<m<2$，∴m 无解. 综上所述 $m=2$，故选 D.

4. D ［解析］因为$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^y$，所以 $x>y$，所以选项 A，B，C 都不一定成立，而 $y=x^3$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，故 $x^3>y^3$，故选 D.

5. D ［解析］∵函数 $f(x)=\ln x+\ln(a-x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称，∴$f(1+x)=f(1-x)$，即 $\ln(1-x)+\ln(a-1+x)=\ln(1+x)+\ln(a-1-x)$，∴$(1-x)(a-1+x)=(1+x)(a-1-x)$，整理得$(a-2)x=0$ 恒成立，∴$a=2$，∴$f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，其定义域为$(0,2)$. 又 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln(2x-x^2)$，∵当 $0<x<2$ 时，$0<2x-x^2\leqslant1$，∴$\ln(2x-x^2)\leqslant0$，∴函数 $f(x)$的值域为$(-\infty,0]$.

6. A ［解析］由 $f(x)=e^{|x|-x^2}$，可得 $f(0)=1$，排除选项 C，D；由指数函数图像和性质可得函数 $f(x)>0$ 恒成立，排除选项 B，故选 A.

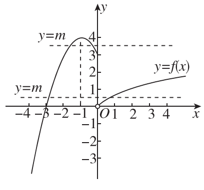
7. B ［解析］因为 $g(x)=e^x-e^{-x}-2$，所以 $g'(x)=e^x+e^{-x}>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即函数 $g(x)=e^x-e^{-x}-2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又$g(0)=e^0-e^0-2=-2<0$，$g(1)=e^1-e^{-1}-2>0$，所以 $g(x)$在$(0,1)$上必然存在零点，即 $x_0\in(0,1)$，因此 $f(x_0)=[x_0]=0$，所以 $g[f(x_0)]=g(0)=-2$. 故选 B.

8. A ［解析］$x_1=\ln\frac{1}{2}=-\ln2<0$，$x_2=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}\in(0,1)$，∵$e^{-x_3}=\ln x_3>0$，∴$x_3>1$，进而得到 $x_1<x_2<x_3$. 故选 A.

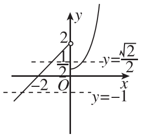
9. B ［解析］由题可知，小于数字 x 的素数个数大约可以表示为 $\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}$，则 10 000 以内的素数的个数为 $\pi(10\ 000)\approx\frac{10\ 000}{\ln 10\ 000}=\frac{10\ 000}{4\ln10}=\frac{10\ 000\lg e}{4}=2500\lg e\approx0.434\ 29\times2\ 500\approx1086$，故选 B.

10. D ［解析］根据题意，$f(x)=x\cdot2^{|x|}=\begin{cases}x\cdot2^x, x\geqslant0,\\ x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x, x<0,\end{cases}$ 当 $x<0$ 时，$f(x)=x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x<0$，又由 $\log_3\frac{1}{2}=-\log_3 2<0$，得 $b<0$；当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x\cdot2^x$，其导数 $f'(x)=2^x+x\cdot2^x\ln2>0$，则 $f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数，又 $f(0)=0$，则当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，又由 $0<\log_3\sqrt{5}<1<\ln3$，得 $0<a<c$. 综上可得，$c>a>b$. 故选 D.

11. B ［解析］由于函数 $g(x)=f(x)-m$ 有 3 个零点，则方程$f(x)-m=0$ 有 3 个根，故函数 $y=f(x)$的图像与直线$y=m$ 有 3 个交点. 函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), x>0,\\ -x^2-2x+3, x\leqslant0,\end{cases}$ 其图像如图所示，又因为 $f(-1)=4$，$f(0)=3$，由图知，实数 m 的取值范围为$[3,4)$. 故选 B.

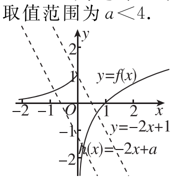


12. B ［解析］由题意，令 $f[f(x)]-1=0$，得 $f[f(x)]=1$，令 $f(x)=t$，由 $f(t)=1$，得 $t=-1$ 或 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，作出函数 $f(x)$的图像，如图所示，结合函数 $f(x)$的图像可知，$f(x)=-1$ 有 1 个解，$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$有 2 个解，故 $y=f[f(x)]-1$ 的零点个数为 3，故选 B.



13. $a<4$ ［解析］由函数的解析式可得 $f(3)=(3-1)^2=4$，则 $f[f(3)]=f(4)=(4-1)^2=9$，原不等式即 $f(a)<\log_2 9$. 分类讨论：当 $a<0$ 时，$2^a<9$，解得 $a<\log_2 9$，则此时 $a<0$；当 $a\geqslant0$ 时，$(a-1)^2<9$，解得$-2<a<4$，则此时 $0\leqslant a<4$. 综上可得，实数 a 的取值范围为 $a<4$.

14. $(-\infty,1]$ ［解析］由 $g(x)=f(x)+2x-a=0$ 得 $f(x)=a-2x$，即方程 $f(x)=-2x+a$ 有两个不同的实数根. 设 $h(x)=-2x+a$，则函数 $y=f(x)$的图像与函数 $h(x)=-2x+a$ 的图像有两个不同的交点. 作出函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\leqslant0,\\ \ln x, x>0\end{cases}$的图像，如图所示，由图像可得，若两函数的图像有两个不同的交点，则需满足 $a\leqslant1$. 所以实数 a 的取值范围是$(-\infty,1]$.

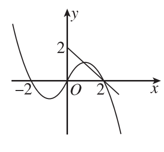


能力提升

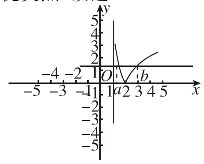
15. B ［解析］∵$1=\log_{0.3}0.3<\log_{0.3}0.2<\log_{0.3}\sqrt{0.3^3}=\frac{3}{2}$，∴$a=\left(\frac{1}{2}\right)^b\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，∴$a\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$b\in\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2},0\right)$，∴$2a-b\in\left(2,3-\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}\right)$，而 $0<-\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}=\log_2\frac{3}{2}<1$，∴$3<3-\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}<4$，结合选项，得 $2<2a-b<4$，故选 B.

16. B ［解析］令 $t=f(x)$，则 $f(t)=4$，当 $t\geqslant0$ 时，由 $f(t)=4$，得 $2^t=4$，得 $t=2$；当 $t<0$ 时，由 $f(t)=4$，得$-t^2-3t+1=4$，即 $t^2+3t+3=0$，判别式 $\Delta=9-4\times3=-3<0$，此时 t 无解，所以 $t=2$，即 $f(x)=2$. 当 $x\geqslant0$ 时，由 $f(x)=2$ 得，$2^x=2$，得 $x=1$；当 $x<0$ 时，由 $f(x)=2$，得$-x^2-3x+1=2$，即 $x^2+3x+1=0$，得 $x_1x_2=1>0$，且 $x_1+x_2=-3<0$，则两个根 x_1，x_2 都小于 0，则方程 $f[f(x)]=4$ 的所有实数根之和为 $1+x_1+x_2=1-3=-2$，故选 B.

17. C ［解析］由"优美点"的定义可知，若$(x_0,f(x_0))$为"优美点"，则点$(-x_0,-f(-x_0))$也在曲线 $f(x)$上，且$(-x_0,-f(-x_0))$也是"优美点". 如图所示，作出函数 $y=x^2+2x(x<0)$的图像关于原点对称的图像，即曲线 $y=-x^2+2x(x>0)$，直线 $y=-x+2$ 过点$(2,0)$，故与曲线 $y=-x^2+2x(x>0)$交于两点，所以曲线 $f(x)$有 4 个优美点. 故选 C.

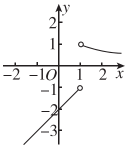


18. A ［解析］作出函数 $f(x)=|\lg(x-1)|$的图像如图所示，∵$1<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$，则 $b>2$，$1<a<2$，∴$\log_{\frac{1}{10}}(a-1)=\lg(b-1)$，即 $\frac{1}{a-1}=b-1$，可得 $a=\frac{b}{b-1}$，则 $2a+b=\frac{2b}{b-1}+b=\frac{(2b-2)+2}{b-1}+b-1+1=(b-1)+\frac{2}{b-1}+3\geqslant2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $b=\sqrt{2}+1$ 时取等号，且 b 的值满足 $b>2$，故选 A.

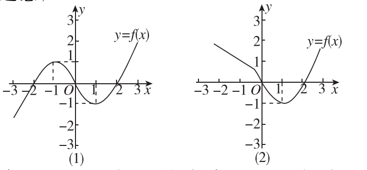


19. A ［解析］由 $g(x)=f(x)-ax+a=0$ 得

$f(x)=a(x-1)$，∵ $f(1)=1-3+2=0$，∴ $g(1)=f(1)-a+a=0$，即 $x=1$ 是 $g(x)$ 的 1 个零点，若 $g(x)$ 恰有 1 个零点，则当 $x\neq1$ 时，方程 $f(x)=a(x-1)$ 没有其他根，即 $a=\frac{f(x)}{x-1}$ 没有根. 当 $x<1$ 时，设 $h(x)=\frac{f(x)}{x-1}=\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$，此时函数 $h(x)$ 为增函数，又 $x<1$，∴ $h(x)<-1$；当 $x>1$ 时，$h(x)=\frac{f(x)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}$，$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}<0$，则 $h(x)$ 为减函数，此时 $h(x)>0$，且当 $x\to1$ 时，$h(x)\to1$，∴ $0<h(x)<1$，作出函数 $h(x)$ 的图像如图，则要使 $a=\frac{f(x)}{x-1}$ 没有根，则 $a\geqslant1$ 或 $-1\leqslant a\leqslant0$，即实数 a 的取值范围是 $[-1,0]\cup[1,+\infty)$，故选 A.



20. $(-1,0)$ [解析] ①当 $a<-1$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像如图(1)所示，当 $-1<b<1$ 时，方程 $f(x)=b$ 有三个不等实数根，与方程 $f(x)=b$ 至多有两个不等实数根矛盾，故不满足题意；

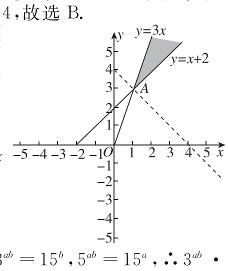


②当 $a=-1$ 时，显然有当 $b=1$ 时，方程 $f(x)=b$ 有无穷个解，故不满足题意；
③当 $-1<a<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图像如图(2)所示，当方程 $f(x)=b$ 至多有两个不等实数根时，$b\in\mathbf{R}$. 综合①②③得，a 的取值范围为 $(-1,0)$.

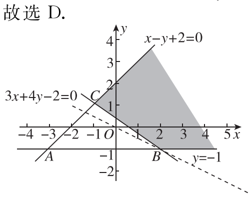
限时集训（三）

基础过关

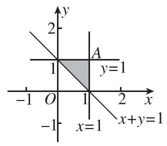
1. C [解析] 对于 A，当 $a=2,b=-1$ 时，不等式不成立；对于 B，当 $a=2,b=-1$ 时，不等式不成立；对于 D，由函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，知 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，则 D 不成立. 故选 C.
2. B [解析] 当 $a=9,b=3$ 时，$\log_a3<\log_b3$，故 A 错误；当 $a=2,b=1$ 时，$3^{ab+1}=3^{a+b}$，故 C 错误；当 $a=4,b=2$ 时，$a^b=b^a$，故 D 错误；因为 $a>b>0,ab>1$，所以 $3^a+3^b>2\sqrt{3^a3^b}=2\sqrt{3^{a+b}}>2\sqrt{3^{2\sqrt{ab}}}>6$，故选 B.
3. B [解析] $a+b=ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$，于是 $a+b\geqslant4$ 或 $a+b\leqslant0$(舍)，当且仅当 $a=b=2$ 时取等号，则 $a+b$ 的最小值为 4，故选 B.
4. C [解析] $x+2\leqslant y\leqslant3x$ 表示的平面区域如图中阴影部分所示，易得 $A(1,3)$，设 $x+y=z$，由图知当直线 $z=x+y$ 过点 $A(1,3)$ 时，z 最小，最小值为 4，故选 C.



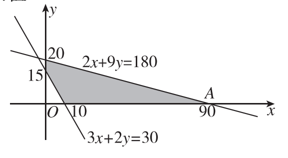
5. D [解析] 由 $3^a=5^b=15$，可得 $(3^a)^b=15^b$，$(5^b)^a=15^a$，∴ $3^{ab}=15^b$，$5^{ab}=15^a$，∴ $3^{ab}\cdot5^{ab}=15^b\cdot15^a$，即 $15^{ab}=15^{a+b}$，∴ $a+b=ab$，又 a,b 为不相等的正数，∴ $a+b>2\sqrt{ab}$，∴ $ab>2\sqrt{ab}$，即 $ab>4$，故选项 A，B 中不等式成立；$(a-1)^2+(b-1)^2>2$ 等价于 $a^2+b^2>2(a+b)$，又 $a^2+b^2>2ab$，且 $a+b=ab$，故 C 中不等式成立；∵ $a^2+b^2>2ab,ab>4$，∴ $a^2+b^2>8$，故 D 中不等式不成立. 故选 D.
6. C [解析] 不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示，目标函数 $z=x+2y$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，由图可知，当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 经过点 B 时，z 取得最小值，联立 $\begin{cases}3x+4y-2=0,\\y+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ 可得点 B 的坐标为 $(2,-1)$. 故选 C.



7. D [解析] 由 $\log_2(a-2)+\log_2(b-1)\geqslant1$，可得 $a-2>0,b-1>0$ 且 $(a-2)(b-1)\geqslant2$，所以 $2a+b=2(a-2)+(b-1)+5\geqslant2\sqrt{2(a-2)(b-1)}+5\geqslant2\sqrt{2\times2}+5=9$，当 $2(a-2)=b-1$ 且 $(a-2)(b-1)=2$ 时等号成立，解得 $a=b=3$，所以当 $2a+b$ 取到最小值时，$ab=3\times3=9$. 故选 D.
8. D [解析] 由 $f(x)<-m+4$，得 $m(x^2-x+1)<5$，∵ 当 $x\in[1,3]$ 时，$x^2-x+1\in[1,7]$，∴ 不等式 $f(x)<-m+4$ 等价于 $m<\frac{5}{x^2-x+1}$，∵ 当 $x=3$ 时，$\frac{5}{x^2-x+1}$ 的最小值为 $\frac{5}{7}$，∴ 若要使不等式 $m<\frac{5}{x^2-x+1}$ 恒成立，则 $m<\frac{5}{7}$，因此，实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{5}{7}\right)$. 故选 D.
9. $\sqrt{2}$ [解析] 作出不等式组对应的平面区域如图中阴影部分所示. 由图可知，可行域内点 A 到原点的距离最大，易得 $A(1,1)$，则 $|AO|=\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$.

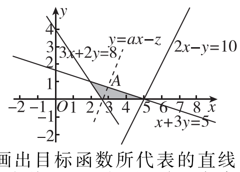


10. 16 [解析] ∵ $x>0,y>0$，且 $x+y=1$，∴ $\frac{1}{x}+\frac{9}{y}=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)=10+\frac{y}{x}+\frac{9x}{y}\geqslant10+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}=16$，当且仅当 $y=3x=\frac{3}{4}$ 时取等号. ∵ 不等式 $a\leqslant\frac{1}{x}+\frac{9}{y}$ 恒成立，∴ $\left(\frac{1}{x}+\frac{9}{y}\right)_{\min}\geqslant a$，∴ $a\in(-\infty,16]$，即实数 a 的最大值为 16.
11. $4\sqrt{5}$ [解析] 由不等式的解集知 $a<0$，由根与系数的关系知 $\begin{cases}-\frac{b}{a}=3+4=7,\\\frac{c}{a}=3\times4=12,\end{cases}$ ∴ $b=-7a,c=12a$，则 $\frac{c^2+5}{a+b}=\frac{144a^2+5}{-6a}=-24a+\frac{5}{-6a}\geqslant2\sqrt{(-24a)\cdot\frac{5}{-6a}}=4\sqrt{5}$，当且仅当 $-24a=\frac{5}{-6a}$，即 $a=-\frac{\sqrt{5}}{12}$ 时取等号.
12. 9000 [解析] 设回收废纸 x 吨，回收废铅蓄电池 y 吨，可节约用水 z 吨，则 $z=100x+120y$，由已知条件可得 $\begin{cases}0.2x+0.9y\leqslant18,\\1.2x+0.8y\geqslant12,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+9y\leqslant180,\\3x+2y\geqslant30,\\x\geqslant0,\\y\geqslant0,\end{cases}$ 作出不等式组表示的可行域，如图中阴影部分所示，由 $z=100x+120y$，得 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{120}$，平移直线 $y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{120}$，可得当直线过点 A 时，在 y 轴上的截距最大，即 z 最大，由图可得点 $A(90,0)$，此时 z 取得最大值 9000.

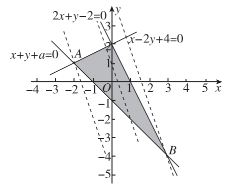


能力提升

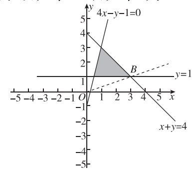
13. B [解析] 画出不等式组 $\begin{cases}2x-y\leqslant10,\\x+3y\leqslant5,\\3x+2y\geqslant8\end{cases}$ 表示的可行域如图中阴影部分所示，因为 $a>0$，可画出目标函数所代表的直线 $y=ax-z$，如图中虚线所示，由图可知，当直线经过点 A 时，目标函数取得最小值，由 $\begin{cases}x+3y=5,\\3x+2y=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 即 $A(2,1)$，代入目标函数 $z=ax-y$，得 $2a-1=9$，得 $a=5$.



14. D [解析] 画出 x,y 满足的可行域如图中阴影部分所示. $z=3x+y$ 变形为 $y=-3x+z$，其中 z 表示直线的纵截距，由图可知，在直线 $x-2y+4=0$ 与直线 $x+y+a=0$ 的交点 A 处，使目标函数 $z=3x+y$ 取得最小值 -5，当直线 $y=-3x+z$ 过点 B 时，目标函数 $z=3x+y$ 取得最大值. 由 $\begin{cases}3x+y=-5,\\x-2y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1,\end{cases}$ 代入 $x+y+a=0$ 得 $a=1$，由 $\begin{cases}x+y+1=0,\\2x+y-2=0,\end{cases}$ 得 $B(3,-4)$，当直线 $y=-3x+z$ 过点 $B(3,-4)$ 时，目标函数 $z=3x+y$ 取得最大值，最大值为 5.



15. $-\ln 3$ [解析] 作出约束条件 $\begin{cases}4x-y-1\geqslant0,\\y\geqslant1,\\x+y\leqslant4\end{cases}$ 对应的可行域如图中阴影部分所示，联立 $\begin{cases}x+y=4,\\y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 即 $B(3,1)$，目标函数 $z=\ln y-\ln x=\ln\frac{y}{x}$，而 $\frac{y}{x}$ 的最小值为 $k_{OB}=\frac{1}{3}$，∴ $z=\ln y-\ln x$ 的最小值是 $-\ln 3$.



16. $\sqrt{2}$ [解析] 由题意，$a^2+b^2=\frac{(a^2+b^2)+(a^2+b^2)}{2}\geqslant\frac{a^2+b^2+2ab}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，所以 $a^2+b^2+\frac{1}{(a+b)^2}\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{1}{(a+b)^2}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{(a+b)^2}$ 时取等号，所以当 $a=b=2^{-\frac{3}{4}}$ 时，$a^2+b^2+\frac{1}{(a+b)^2}$ 取得最小值 $\sqrt{2}$.

限时集训（四）

基础过关

1. D [解析] ∵ $f'(x)=4e^{4x}-1$，∴ $f'(0)=3$，又∵ $f(0)=-1$，∴ 所求切线方程为 $y+1=3x$，即 $3x-y-1=0$，故选 D.
2. D [解析] 由题得 $y'=\frac{nx^{n-1}e^x-x^ne^x}{(e^x)^2}=\frac{nx^{n-1}-x^n}{e^x}$，∴ $y'\big|_{x=1}=\frac{n-1}{e}=\frac{4}{e}$，∴ $n=5$. 故选 D.
3. B [解析] 由函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+(2-a)x^2+x-4$，可得 $f'(x)=x^2+2(2-a)x+1$，由 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上为增函数，得 $x^2+2(2-a)x+1\geqslant0$，$x\in(0,2]$，即 $2(a-2)\leqslant x+\frac{1}{x}$，$x\in(0,2]$，易知 $x+\frac{1}{x}\geqslant2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，∴ $2(a-2)\leqslant2$，解得 $a\leqslant3$，故选 B.
4. B [解析] 由题意得，$f'(x)=\frac{2}{x}+2ax-3$，∴ $f'(2)=4a-2=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，∴ $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}x^2-3x$，$f'(x)=\frac{2}{x}+x-3=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$，∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，∴ $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$. 故选 B.
5. B [解析] 由 $f(x)=0$ 得 $x^2+tx=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-t$，即函数 $f(x)$ 有两个零点，排除 A，C；易知 $f'(x)=(2x+t)e^x+(x^2+tx)e^x=[x^2+(t+2)x+t]e^x$，当 $x\to-\infty$ 时，$f'(x)\to0$，曲线 $y=f(x)$ 越来越平缓，排除 D，故选 B.
6. C [解析] 由题意得，$\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)=e^x(-\sin x+\cos x-a)\leqslant0$ 恒成立，即 $a\geqslant\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 恒成立. 当

$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\therefore\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-\frac{\sqrt2}{2},1\right]$，$\therefore\sqrt2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-1,\sqrt2\right]$，∴实数 a 的取值范围是 $[\sqrt2,+\infty)$.

7. A [解析] 令函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $F'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，∵$f'(x)>f(x)$，∴$F'(x)>0$，故函数 $F(x)$ 是定义在 **R** 上的增函数，∴$F(1)>F(0)$，即 $\frac{f(1)}{e}>\frac{f(0)}{e^0}$，故有 $f(1)>ef(0)$. 又 $f(1)=e$，∴$f(0)<1$，故选 A.

8. A [解析] 易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}$，令 $h(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$，则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$. 当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}<0$，$h(x)$ 单调递减，故 $h(x)>h(0)=0$，故 $f'(x)=\frac{h(x)}{[\ln(x+1)]^2}>0$，即函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上为增函数. 故选 A.

9. B [解析] 设直线 l 与曲线 $C_1:y=e^x$ 相切于点 (x_1,e^{x_1})，与曲线 $C_2:y=\frac14e^2x^2$ 相切于点 $\left(x_2,\frac14e^2x_2^2\right)$，由 $y=e^x$，得 $y'|_{x=x_1}=e^{x_1}$，由 $y=\frac14e^2x^2$，得 $y'|_{x=x_2}=\frac12e^2x_2$，∴直线 l 的方程为 $y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$ 或 $y-\frac14e^2x_2^2=\frac12e^2x_2(x-x_2)$，则 $\begin{cases}e^{x_1}=\frac12e^2x_2,\\ e^{x_1}-x_1e^{x_1}=\frac14e^2x_2^2-\frac12e^2x_2^2,\end{cases}$ 解得 $x_1=x_2=2$，∴直线 l 的方程为 $y-e^2=e^2(x-2)$，令 $y=0$，可得 $x=1$，∴直线 l 在 x 轴上的截距为 1. 故选 B.

10. C [解析] 由题意得 $f'(x)=6e^x+6xe^x-6ax^2-6ax=6(x+1)(e^x-ax)$，可知 $x=-1$ 为 $f'(x)$ 的一个零点，若 $f(x)$ 存在三个极值点，则只需 $e^x-ax=0$ 有两个不等实根，且两实根均不等于 -1，即 $g(x)=e^x$ 与 $h(x)=ax$ 的图像有两个横坐标不等于 -1 的交点，当 $h(x)$ 与 $g(x)$ 的图像相切时，设切点坐标为 (x_0,e^{x_0})，则 $g'(x_0)=e^{x_0}=h'(x_0)=a$，又 $\frac{e^{x_0}}{x_0}=a$，∴$x_0=1$，$a=e$. 作图(图略)可知，当 $a\in(e,+\infty)$ 时，$e^x-ax=0$ 有两个不等实根，且两实根均不等于 -1，∴若 $f(x)$ 存在三个极值点，则 $a\in(e,+\infty)$.

11. B [解析] 由题意，$f'(-x)=-f'(x)$，得函数 $y=f'(x)$ 为奇函数，其图像关于原点对称，由导数的几何意义可知，函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$. 因为当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减.

方法一：$f(\ln3)=f(\ln3-2)=f\left(\ln\frac{3}{e^2}\right)=f\left(\ln\frac{e^2}{3}\right)$，$f\left(2\ln\frac12\right)=f\left(\ln\frac14+2\right)=f\left(\ln\frac{e^2}{4}\right)$. 因为 $-1<\ln\frac{3}{e^2}<\ln\frac12<0$，所以 $f\left(\ln\frac12\right)>f(\ln3)$，所以 A 错；因为 $0<\ln\frac{e^2}{4}<\ln\frac{e^2}{3}<1$，所以 $f\left(2\ln\frac12\right)>f(\ln3)$，所以 B 对；因为 $f\left(\ln\frac12\right)$，$f\left(2\ln\frac12\right)$，$f(\ln3)$ 无法确定正负，所以 C,D 错. 故选 B.

方法二：由条件可得 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2)$ 上单调递增，且 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称. $f\left(\ln\frac12\right)=f(-\ln2)=f(\ln2)$，$f\left(2\ln\frac12\right)=f\left(\ln\frac14\right)=f(-\ln4)=f(\ln4)$，因为 $0<\ln2<1<\ln3<\ln4<2$，且 $\ln3-1<1-\ln2$，所以 $f(\ln3)<f(\ln4)$，即 $f\left(2\ln\frac12\right)-f(\ln3)>0$，$f(\ln3)<f(\ln2)$，即 $f\left(\ln\frac12\right)-f(\ln3)>0$，所以 A 错，B 对，又 $f\left(\ln\frac12\right)$，$f\left(2\ln\frac12\right)$，$f(\ln3)$ 无法确定正负，所以 C,D 错. 故选 B.

12. $e-\frac13$ [解析] 依题意 $\int_0^1(e^x+\sqrt x)dx=\left(e^x+\frac23x^{\frac32}\right)\Big|_0^1=e+\frac23-1=e-\frac13$.

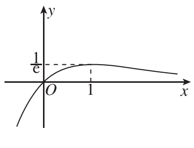
13. 2 [解析] ∵$y=x^2-2\ln x$，∴$y'=2x-\frac2x=3$，化简得 $2x^2-3x-2=0$，解得 $x=-\frac12$(舍去)或 $x=2$，∴切点的横坐标为 2.

14. 1 [解析] ∵$f(x)=x^2-2\ln x+a$，∴$f'(x)=2x-\frac2x=\frac{2(x^2-1)}{x}$，∴当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，∴$f(x)_{min}=f(1)=1+a=2$，∴$a=1$.

能力提升

15. B [解析] 令 $g(x)=e^xf(x)$，则当 $x<0$ 时，$g'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]>0$，又 $g(-x)=e^{-x}f(-x)=e^xf(x)=g(x)$，∴$g(x)$ 为偶函数，从而 $e^af(2a+1)\geqslant f(a+1)$ 等价于 $e^{2a+1}f(2a+1)\geqslant e^{a+1}f(a+1)$，即 $g(2a+1)\geqslant g(a+1)$，因此 $g(-|2a+1|)\geqslant g(-|a+1|)$，∴$-|2a+1|\geqslant-|a+1|$，∴$3a^2+2a\leqslant0$，∴$-\frac23\leqslant a\leqslant0$. 故选 B.

16. D [解析] 设 $f(x)$ 的导数为 $f'(x)$，因为函数 $f(x)=\frac{x+1}{e^x}-ax$ 有两个极值点，所以方程 $f'(x)=-\frac{x}{e^x}-a=0$ 有两个不等实根，令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 的图像与直线 $y=-a$ 有两个不同交点，又 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，由 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}=0$ 得 $x=1$，所以当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，即 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 单调递减. 所以 $g(x)_{max}=g(1)=\frac1e$，又 $g(0)=0$，当 $x>0$ 时，$g(x)=\frac{x}{e^x}>0$，所以作出函数 $g(x)$ 的简图如图所示，因为 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 的图像与直线 $y=-a$ 有两个不同交点，所以 $0<-a<\frac1e$，即 $-\frac1e<a<0$. 故选 D.



17. D [解析] 令 $g(x)=e^x-e^{-x}-mx$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x+e^{-x}-m$，$x\in(0,+\infty)$，易得 $y=e^x+e^{-x}>2$ 对于 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，故当 $m\leqslant2$ 时，$g'(x)>0$ 对于 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又当 $x\to0$ 时，$g(x)\to0$，故 $g(x)>0$，即 $f(x)>mx$ 恒成立；当 $m>2$ 时，∵$g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to0$ 时，$g'(x)\to2-m$，且 $2-m<0$，∴存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $g'(x_0)=0$，故 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，又当 $x\to0$ 时，$g(x)\to0$，∴$g(x_0)<0$，这与 $g(x)>0$ 恒成立矛盾. 故 $m\leqslant2$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$. 故选 D.

18. C [解析] 当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac2\pi-\frac1x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac\pi2$，易知函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac\pi2\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac\pi2,+\infty\right)$ 上单调递增，当 $x=\frac\pi2$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f\left(\frac\pi2\right)=1$，此时 $g\left(\frac\pi2\right)=f\left(\frac\pi2\right)-\sin\frac\pi2=1-1=0$，根据 $f(x)$ 的单调性和 $|\sin x|\leqslant1$ 可知，当 $x>0$ 时，$x=\frac\pi2$ 是 $g(x)$ 的唯一零点. 由于 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，故 $g(0)=f(0)-\sin0=0$，所以 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的零点. 根据奇函数图像的对称性可知，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac\pi2\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac\pi2,0\right)$ 上单调递减，当 $x=-\frac\pi2$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上取得最大值 $f\left(-\frac\pi2\right)=-f\left(\frac\pi2\right)=-1$，此时 $g\left(-\frac\pi2\right)=f\left(-\frac\pi2\right)-\sin\left(-\frac\pi2\right)=0$，根据 $f(x)$ 的单调性和 $\sin x\geqslant-1$ 知 $x=-\frac\pi2$ 是 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上的唯一零点. 综上所述，$g(x)$ 的零点个数是 3，故选 C.

19. A [解析] ∵函数 $f(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，∴$f'(x)=(e^x)'(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)'=-2e^x\sin x$. ∵当 $x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)(k\in\mathbf Z)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf Z)$ 时，$f'(x)<0$，∴当 $x\in(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)(k\in\mathbf Z)$ 时，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\mathbf Z)$ 时，$f(x)$ 单调递减，∴当 $x=2k\pi+\pi(k\in\mathbf Z)$ 时，$f(x)$ 取得极小值，当 $x=2k\pi(k\in\mathbf Z)$ 时，$f(x)$ 取得极大值，则 $f(x)$ 的所有极大值点与所有极小值点在 $\sin x=0$，$x\in(0,10\pi)$ 时取得，易知 $f(x)$ 的所有极大值点为 $x=2\pi,4\pi,6\pi,8\pi$，$f(x)$ 的所有极小值点为 $x=\pi,3\pi,5\pi,7\pi,9\pi$，故 $(2\pi+4\pi+6\pi+8\pi)-(\pi+3\pi+5\pi+7\pi+9\pi)=-5\pi$，故选 A.

20. 1 [解析] 由题意，对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $\frac{e^x+3}{x}\geqslant e^a$ 恒成立，则当 $x=1$ 时，不等式 $\frac{e^x+3}{x}\geqslant e^a$ 也成立，代入 $x=1$，得 $e+3\geqslant e^a$，则 $a\leqslant1$，这是满足题意的一个必要条件. 又 a 为整数，∴只需验证当 $a=1$ 时，对任意的 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $\frac{e^x+3}{x}\geqslant e^a$ 恒成立，即证 $\frac{e^x+3}{x}\geqslant e$，等价于 $e^x+3\geqslant ex$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. 令 $g(x)=e^x-ex+3$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=e^x-e$，易知当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，∴$g(x)\geqslant g(1)=3>0$，∴$e^x+3\geqslant ex$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，故 $a=1$ 满足题意. 故答案为 1.

限时集训(五)

基础过关

1. **解**：(1) $f'(x)=e^x-ae^{-x}$，当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增.
当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln\sqrt a$，
当 $x\in(-\infty,\ln\sqrt a)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(\ln\sqrt a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，∴当 $x=\ln\sqrt a$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值 $f(\ln\sqrt a)=2\sqrt a$，无极大值.
(2) 令 $F(x)=f(x)-mx=e^x-e^{-x}-mx$，$x\geqslant0$，则 $F(0)=0$，
$F'(x)=e^x+e^{-x}-m$，$F'(0)=2-m$.
令 $H(x)=e^x+e^{-x}-m$，
则 $H'(x)=e^x-e^{-x}\geqslant0$，
∴函数 $H(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，
∴$F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.
若 $m\leqslant2$，则 $F'(x)\geqslant2-m\geqslant0$，得 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，有 $F(x)\geqslant F(0)=0$，符合题意；若 $m>2$，令 $F'(x)<0$，解得 $0\leqslant x<\ln\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$，
∴$F(x)$ 在 $\left[0,\ln\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)$ 上单调递减，
有 $F(x)\leqslant F(0)=0$，不符合题意，舍去.
∴实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

2. **解**：(1) 由题意知，$f'(x)=\frac1x-(e^x+xe^x)+a=\frac1x-(x+1)e^x+a\leqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成

立，所以 $a\leqslant(x+1)e^x-\frac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立．令 $g(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=(x+2)e^x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2e-1$，
所以 $a\leqslant 2e-1$．
故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2e-1]$．
(2)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-xe^x+x(x>0)$，
则 $f'(x)=\frac{1}{x}-(x+1)e^x+1=(x+1)\left(\frac{1}{x}-e^x\right)$．
令 $m(x)=\frac{1}{x}-e^x$，则 $m'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0$，
所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．
又 $m\left(\frac{1}{2}\right)>0$，$m(1)<0$，所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 满足 $m(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$．
当 $x\in(0,x_0)$ 时，$m(x)>0$，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$m(x)<0$，$f'(x)<0$．
所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减．
所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=\ln x_0-x_0e^{x_0}+x_0$，
因为 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$，所以 $f(x_0)=-x_0-1+x_0=-1$，所以 $f(x)_{\max}=-1$．

3. 解：(1)依题意得，$f'(x)=-\frac{e}{e^x}+\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=0$，
又 $f(1)=1$，所以所求切线方程为 $y-1=0$．
(2)依题意得 $f'(x)=-\frac{a}{e^x}+\frac{1}{x}=\frac{e^x-ax}{xe^x}=\frac{1}{e^x}\left(\frac{e^x}{x}-a\right)$．令 $m(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $m'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$．
当 $0<x<1$ 时，$m'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$m'(x)>0$，∴函数 $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，∴$m(x)_{\min}=m(1)=e$．
当 $a\leqslant e$ 时，$m(x)\geqslant a$ 恒成立，∴$f'(x)\geqslant 0$，
故函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 无极值点．
当 $a>e$ 时，$m(x)_{\min}=m(1)=e<a$，
故存在 $x_1\in(0,1)$ 和 $x_2\in(1,+\infty)$，使得 $m(x_1)=m(x_2)=a$，当 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，
当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，
当 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，∴函数 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递减，在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，∴x_1 为函数 $f(x)$ 的极大值点，x_2 为函数 $f(x)$ 的极小值点．
综上所述，当 $a\leqslant e$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $a>e$ 时，$f(x)$ 有 2 个极值点．

4. 解：(1)证明：$f'(x)=\cos x+x\sin x-1$，设 $h(x)=f'(x)$，则 $h(x)=\cos x+x\sin x-1$，$h'(x)=x\cos x$．
当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减．
又 $h(0)=0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0$，$h(\pi)=-2$，
所以 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一零点．
所以 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一零点．
(2)设 $y=f(x_1)$，$z=g(x_2)$，则原问题可转化为 $y_{\min}>z_{\min}$．易知 $g(x)=x^2-2x+a(a\in\mathbf{R})$ 图像的对称轴为直线 $x=1\in[1,2]$，所以 $z_{\min}=g(1)=a-1$．
由(1)知，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上只有一个零点，设为 x_0，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减．又 $f(0)=0$，$f(\pi)=0$，所以当 $x\in[0,\pi]$ 时，$y_{\min}=0$．所以 $0>a-1$，即 $a<1$，因此，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$．

能力提升

5. 解：(1)$f'(x)=e^x+(x-a)e^x=(x-a+1)e^x$．
令 $f'(x)=0$，得 $x=a-1$，则当 $x<a-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>a-1$ 时，$f'(x)>0$，∴当 $x=a-1$ 时，$f(x)$ 取得极小值同时也是最小值，$f(a-1)=-e^{a-1}+1$．
若函数 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(a-1)=-e^{a-1}+1<0$，即 $e^{a-1}>1$，则 $a-1>0$，即 $a>1$，
故实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$．
(2)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-1)e^x+1$．
设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(x)=(x-1)e^x+1-x^3$，∴$h'(x)=e^x+(x-1)e^x-3x^2=xe^x-3x^2=x(e^x-3x)$．
设 $\varphi(x)=e^x-3x$，则 $\varphi'(x)=e^x-3$，
∵$x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$，∴$\varphi'(x)=e^x-3<\varphi'(1)=e-3<0$，∴$\varphi(x)$ 为减函数，
又 $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{e}-1>0$，$\varphi(1)=e-3<0$，
∴$\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 上存在唯一的零点，设为 x_0，则当 $\frac{1}{3}<x<x_0$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为增函数，当 $x_0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数，又 $h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{26}{27}-\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{26^3}-\sqrt[3]{18^3e}}{27}>0$，$h(1)=0$，∴当 $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ 时，$h(x)>0$，即 $f(x)>g(x)$．

6. 解：(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．
设 $g(x)=a\ln x-x^2+x$，则 $f(x)=xg(x)$，$f(x)\leqslant 0$ 等价于 $g(x)\leqslant 0$．
因为 $g(1)=0$，$g(x)\leqslant 0$，所以 $g'(1)=0$．
而 $g'(x)=\frac{a}{x}-2x+1$，$g'(1)=a-1$，令 $g'(1)=0$，得 $a=1$．若 $a=1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-(x-1)(2x+1)}{x}$．
当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；
当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减．
所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极大值点，故 $g(x)\leqslant g(1)=0$ 成立．故实数 a 的值为 1．
(2)证明：由(1)知 $f(x)=x(\ln x-x^2+x)$，$f'(x)=\ln x-3x^2+2x+1$．
设 $h(x)=\ln x-3x^2+2x+1$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-6x+2$，设 $m(x)=h'(x)$，则 $m'(x)=-\frac{1}{x^2}-6<0$，令 $h'(x)=0$，得 $x=\frac{1+\sqrt{7}}{6}$．
当 $x\in\left(0,\frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac{1+\sqrt{7}}{6},+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减．
又因为 $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\subsetneqq\left(0,\frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)$，$h\left(\frac{1}{4}\right)=-2\ln 2-\frac{3}{16}+\frac{1}{2}+1\approx-0.0675<0$，$h\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-\frac{3}{4}+1+1\approx 0.56>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)$ 上有唯一零点 x_0，且 $x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，又 $h(1)=0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{6},+\infty\right)$ 上有唯一零点 1．
于是当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$．因为 $f'(x)=h(x)$，所以 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值点．
由 $f'(x_0)=0$，得 $\ln x_0=3x_0^2-2x_0-1$，
故 $f(x_0)=2x_0^3-x_0^2-x_0$，$x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$．
令 $\varphi(t)=2t^3-t^2-t$，$t\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，则 $\varphi'(t)=6t^2-2t-1=6\left(t-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{7}{6}$，当 $t\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 时，$\varphi'(t)<0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，$\varphi(t)>\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$．
所以 $f(x_0)>-\frac{1}{2}$，命题得证．

7. 解：$f(x)=\frac{e^x}{x}+a(x-\ln x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，
$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+a\frac{x-1}{x}=\frac{(x-1)(e^x+ax)}{x^2}$．
(1)当 $a=-e$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)(e^x-ex)}{x^2}$，由于 $e^x\geqslant ex$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，且当 $x=1$ 时，$e^x=ex$，
因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)_{\min}=f(1)=0$．
(2)当 $a=-e$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=a+e=0$，$f(x)$ 只有一个零点．
当 $a>-e$ 时，$ax>-ex$，故 $e^x+ax>e^x-ex\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，
故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=a+e>0$，
故当 $a>-e$ 时，$f(x)$ 没有零点．
当 $a<-e$ 时，令 $e^x+ax=0$，得 $\frac{e^x}{x}=-a$，令 $\varphi(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，
易知 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=e$，
$\varphi(x)=-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个根 x_1,x_2，则不妨设 $0<x_1<1<x_2$，当 $x\in(0,x_1)\cup(1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_1,1)\cup(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,1)$ 上单调递增，在 $(1,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，$f(1)=a+e<0$，又当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，此时 $f(x)$ 有两个零点．
综上，若 $f(x)$ 有两个零点，则 $a<-e$．

8. 解：(1)由 $f(x)=e^x-ax^2$，得 $f'(x)=e^x-2ax$．
因为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+(e-2)y=0$ 垂直，
所以 $f'(1)=e-2a=e-2$，所以 $a=1$，即 $f(x)=e^x-x^2$，$f'(x)=e^x-2x$．
令 $g(x)=e^x-2x$，则 $g'(x)=e^x-2$．易知当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；
当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增．所以 $g(x)_{\min}=g(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间．
(2)证明：由(1)知 $f(x)=e^x-x^2$，$f(1)=e-1$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-(e-1)=(e-2)(x-1)$，
即 $y=(e-2)x+1$．
令 $h(x)=e^x-x^2-(e-2)x-1(x>0)$，则 $h'(x)=e^x-2x-(e-2)=e^x-e-2(x-1)$，
且 $h'(1)=0$，令 $s(x)=h'(x)$，则 $s'(x)=e^x-2$，
当 $x\in(0,\ln 2)$ 时，$s'(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减；
当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$s'(x)>0$，$h'(x)$ 单调递增．因为 $h'(1)=0$，所以 $h'(x)_{\min}=h'(\ln 2)=4-e-2\ln 2<0$，又因为 $h'(0)=3-e>0$，所以存在 $x_0\in(0,\ln 2)$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；
当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增．
又 $h(0)=h(1)=0$，所以当 $x>0$ 时，$h(x)\geqslant 0$，
即 $e^x-x^2-(e-2)x-1\geqslant 0$，
所以 $e^x-(e-2)x-1\geqslant x^2$．
令 $\varphi(x)=\ln x-x$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$．
所以当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增；
当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减．
所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi(1)=-1$，即 $\ln x+1\leqslant x$，
又因为 $x>0$，所以 $x(\ln x+1)\leqslant x^2$，
所以当 $x>0$ 时，$e^x-(e-2)x-1\geqslant x(\ln x+1)$，即当 $x>0$ 时，$e^x-ex-1\geqslant x(\ln x-1)$．

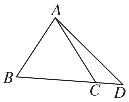
限时集训（六）

基础过关

1. B ［解析］$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(2,4)$．故选 B．
2. D ［解析］$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$，故选 D．
3. B ［解析］由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $2m+2-3m=0$，解得 $m=2$，∴$\boldsymbol{b}=(3,6)$，即 $|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$．故选 B．
4. A ［解析］由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，得 $-1\times(m-4)-3\times m=0$，解得 $m=1$，∴$\boldsymbol{b}=(1,-3)$，$\boldsymbol{c}=(2,3)$，故 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times 2+(-3)\times 3=-7$．故选 A．
5. A ［解析］∵$\triangle ABC$ 内一点 O 满足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，∴$\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，令 $\overrightarrow{OE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}$，则 $\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\mathbf{0}$，∴$B,C,E$ 三点共线，A,O,E 三点共线，又直线 AO 交 BC 于点 D，∴D,E 重合，∴$\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$，∴$2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OD}+$

$3\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}-5\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$. 故选 A.

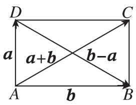
6. A [解析] 由$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$可知，$B,C,D$三点在同一直线上，如图所示. 根据题意及图形，可得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$，∴$\lambda=-\frac{1}{3}$，$\mu=\frac{4}{3}$，∴$\lambda-\mu=-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}$. 故选 A.



7. B [解析] 根据向量加法运算法则可得$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}$，因为$G$为$\triangle ABC$的重心，且$\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{AM}$，所以$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{GM}=-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$，故选 B.

8. B [解析] 方法一：因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，即$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=4|\boldsymbol{a}|^2$，故$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4|\boldsymbol{a}|^2$，即$|\boldsymbol{b}|^2=3|\boldsymbol{a}|^2$，所以$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$. 设向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$. 故选 B.

方法二：由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$可知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，作矩形$ABCD$，如图，记$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，又$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，所以$AC=2AD$，所以$\angle CAB=\frac{\pi}{6}$，所以向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$的夹角，即$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DB}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$.

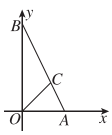


9. B [解析] 以A为坐标原点，以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$的方向分别为x轴、y轴的正方向建立平面直角坐标系(图略)，则$B(2,0)$，$C(0,4)$，$D(1,2)$，设$P(x,2x)$，所以$\overrightarrow{AP}=(x,2x)$，$\overrightarrow{PD}=(1-x,2-2x)$，$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{AP}\cdot(2\overrightarrow{PD})=2[x(1-x)+2x(2-2x)]=-10(x^2-x)$，易知当$x=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$取得最大值$\frac{5}{2}$. 故选 B.

10. 2 [解析] ∵$\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},-\sqrt{6})$，∴$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，又∵$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的方向相同，且$|\boldsymbol{b}|=2$，∴$\boldsymbol{a}=\sqrt{2}\boldsymbol{b}$，∴$|\sqrt{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|=2$.

11. $4+2\sqrt{3}$ [解析] $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot[m\boldsymbol{a}+(1-m)\boldsymbol{b}]=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(1-m)\boldsymbol{b}^2=m|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 30^\circ+(1-m)|\boldsymbol{b}|^2=\frac{\sqrt{3}}{2}m+1-m=0$，解得$m=4+2\sqrt{3}$.

12. $\frac{2}{3}$ [解析] 在直角三角形AOB中，$\angle AOB=90^\circ$，建立如图所示的平面直角坐标系. 由$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，OC平分$\angle AOB$且与AB相交于C，可得$A(1,0)$，$B(0,2)$，直线AB的方程为$2x+y=2$，则$C\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，则$\overrightarrow{OC}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{OA}=(1,0)$，故$\overrightarrow{OC}$在$\overrightarrow{OA}$方向上的投影为$\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{2}{3}$.

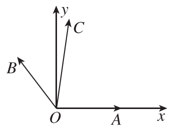


能力提升

13. C [解析] 由$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda\in\mathbf{R})$，可知点$P$在直线$BC$上，设$BC$的中点为$D$，则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$，又$|\overrightarrow{AB}|=2$，∴$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3}$，∴$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=2|\overrightarrow{AD}|^2=2\times(\sqrt{3})^2=6$，故选 C.

14. C [解析] ∵在平行四边形$ABCD$中，$AB=3$，$AD=2$，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，∴$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}=-\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DQ}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. ∵$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=12$，∴$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CQ}=\left(-\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times3^2+\frac{1}{2}\times2^2+\frac{4}{3}\times3\times2\times\cos\angle BAD=12$，得$\cos\angle BAD=\frac{1}{2}$，∴$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，∴$\angle ADC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，故选 C.

15. A [解析] 以O为原点，以OA所在的直线为x轴，以过O且与OA垂直的直线为y轴，建立平面直角坐标系如图所示. ∵$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，且$\tan\angle AOB=-\frac{4}{3}$，∴$\cos\angle AOB=-\frac{3}{5}$，$\sin\angle AOB=\frac{4}{5}$，∴$A(1,0)$，$B\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$. 令$\angle AOC=\theta$，则$\theta=\angle AOB-\angle BOC$，∴$\tan\theta=\frac{-\frac{4}{3}-1}{1-\frac{4}{3}}=7$，由图可知$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，∴$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\sin\theta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，又$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$，∴$C\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)$. ∵$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in\mathbf{R})$，∴$\left(\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right)=(m,0)+\left(-\frac{3}{5}n,\frac{4}{5}n\right)=\left(m-\frac{3}{5}n,\frac{4}{5}n\right)$，即$\frac{1}{5}=m-\frac{3}{5}n$，$\frac{7}{5}=\frac{4}{5}n$，解得$n=\frac{7}{4}$，$m=\frac{5}{4}$，∴$\frac{m}{n}=\frac{5}{7}$，故选 A.



16. $\sqrt{3}$ [解析] 因为$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，即$AB\cdot AC=8$，因此$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{3}=4$. 因为$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$，所以$m+\frac{3}{4}=1$，解得$m=\frac{1}{4}$，因此$|\overrightarrow{AP}|^2=\left|\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{16}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+1\geqslant2\times\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|+1=3$，当且仅当$|\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AB}|=4$时取等号，所以$|\overrightarrow{AP}|\geqslant\sqrt{3}$，故$|\overrightarrow{AP}|$的最小值为$\sqrt{3}$.

限时集训（七）

基础过关

1. D [解析] 由已知得$\sin\alpha=-\frac{2}{3}$，则$\sin(\alpha-3\pi)=-\sin\alpha=\frac{2}{3}$. 故选 D.

2. D [解析] 方法一：∵$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，∴$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{3}{5}$，两边平方，得$\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{25}$，即$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{25}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{50}$，则$\sin 2\alpha=-\frac{7}{25}$.

方法二：$\sin 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=-\frac{7}{25}$. 故选 D.

3. D [解析] 由复合函数的单调性可知$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，故 A 错；函数$f(x)$的周期为 1，故 B 错；$f(-x)=|\sin(-\pi x)|=|\sin\pi x|=f(x)$，$f(x)$为偶函数，故 C 错，D 对. 故选 D.

4. D [解析] 因为函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图像的两个相邻的对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，所以$f(x)$的最小正周期$T=\pi$，因此$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$，因此，为了得到函数$g(x)=\sin 2x$的图像，需将$f(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$的图像向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度. 故选 D.

5. A [解析] $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2x-1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，令$2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，当$k=0$时，$x=\frac{\pi}{8}$，故选 A.

6. A [解析] 函数$f(x)$的图像向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后所得图像对应的解析式为$g(x)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，其图像关于原点对称，则$\varphi-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$\varphi=k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，∴$|\varphi|$的最小值为$\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

7. A [解析] $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{5}$，故选 A.

8. A [解析] 由图像可知，$A=2$，$\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，∴$T=2\pi$，则$\omega=1$，∴$f(x)=2\cos(x+\varphi)$. ∵$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，且$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，则$f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. 令$h(x)=f(x)+1=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1=0$，可得$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，则$x-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$或$x-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}+2k_2\pi$，$k_2\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{5\pi}{6}+2k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$或$x=\frac{3\pi}{2}+2k_2\pi$，$k_2\in\mathbf{Z}$，则$|x_1-x_2|$的最小值为$\frac{2\pi}{3}$，故选 A.

9. B [解析] 由题意，函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$在区间$\left(\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)$上单调，则$\frac{2\pi}{3}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\leqslant\frac{T}{2}$，得$T\geqslant\frac{\pi}{6}$，所以$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{6}$，即$\omega\leqslant12$. 由$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$，得$\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{T}{4}+\frac{k}{2}T$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\frac{\pi}{2}=\frac{2k+1}{4}T=\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$\omega=2k+1$，$k\in\mathbf{Z}$. 当$k=5$时，$\omega=11$，则$f(x)=\sin(11x+\varphi)$，由$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{4}+\varphi\right)=1$，得$\varphi=-\frac{\pi}{4}+2m\pi$，$m\in\mathbf{Z}$，不妨取$\varphi=-\frac{\pi}{4}$，则$f(x)=\sin\left(11x-\frac{\pi}{4}\right)$，此时函数$f(x)$在区间$\left(\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)$上不单调，不满足题意. 当$k=4$时，$\omega=9$，则$f(x)=\sin(9x+\varphi)$，由$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\varphi\right)=1$，得$\varphi=\frac{\pi}{4}+2n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，不妨取$\varphi=\frac{\pi}{4}$，

则 $f(x)=\sin\left(9x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，此时函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 上是单调函数，满足题意，所以 ω 的最大值为 9，故选 B.

10. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ［解析］由 $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

11. $-\dfrac{1}{4}$ ［解析］对任意实数 x，恒有 $f(\alpha_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\alpha_2)$，则 $f(\alpha_1)$ 为最小值，$f(\alpha_2)$ 为最大值. 因为 $f(x)=\cos 2x+\sin x=1-2\sin^2 x+\sin x=-2\left(\sin x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$，而 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以当 $\sin x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最小值；当 $\sin x=\dfrac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最大值. 所以 $\sin\alpha_1=-1$，$\sin\alpha_2=\dfrac{1}{4}$，所以 $\cos\alpha_1=0$，所以 $\cos\alpha_1-\sin\alpha_2=-\dfrac{1}{4}$.

12. $\left[\dfrac{6-3\sqrt{3}}{8},3\right]$ ［解析］由题意，可得 $f(x)=\sin^3 x+3\cos^2 x=\sin^3 x-3\sin^2 x+3$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$，令 $t=\sin x$，$t\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则 $g(t)=t^3-3t^2+3$，$t\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则 $g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$. 当 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant t<0$ 时，$g'(t)>0$，当 $0<t\leqslant1$ 时，$g'(t)<0$，即 $g(t)$ 在 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 上为增函数，在 $(0,1]$ 上为减函数，又 $g\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{8}$，$g(0)=3$，$g(1)=1$，所以函数 $g(x)$ 的值域为 $\left[\dfrac{6-3\sqrt{3}}{8},3\right]$，即函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\dfrac{6-3\sqrt{3}}{8},3\right]$.

能力提升

13. A ［解析］∵ $\sin 2\alpha\cos\beta=2\cos^2\alpha(1+\sin\beta)$，∴ $2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta=2\cos^2\alpha(1+\sin\beta)$，∵ $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴ $\cos\alpha\neq0$，∴ $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha$，即 $\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha$，∵ $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴ $\alpha-\beta+\alpha=2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$. 故选 A.

14. A ［解析］$f(x)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 恒成立，说明函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处取得最大值. 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$\omega x+\varphi\in\left(\varphi,\varphi+\dfrac{\pi}{4}\omega\right)$. 设 $t=\omega x+\varphi$，$g(t)=\sin t$，易得 $g(t)$ 在 $\left(\varphi,\varphi+\dfrac{\pi}{4}\omega\right)$ 上的两个零点为 π，2π，又因为当 $x=\dfrac{\pi}{4}$，即 $t=\varphi+\dfrac{\pi}{4}\omega$ 时，$g(t)$ 取得最大值，所以 $\varphi+\dfrac{\pi}{4}\omega=\dfrac{5}{2}\pi$，即 $\varphi=\dfrac{5}{2}\pi-\dfrac{\pi}{4}\omega\in(0,\pi)$，解得 $\omega\in(6,10)$.

15. D ［解析］∵ $f(x)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图像和 $g(x)=3\cos(2x+\varphi)+1\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像的对称轴完全相同，∴ $f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期相同，∴ $\omega=2$，∴ $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$. 令 $2x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $2x=k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，由 $2x+\varphi=m\pi$，$m\in\mathbf{Z}$，得 $2x=m\pi-\varphi$，$m\in\mathbf{Z}$，∵ $f(x)$ 的图像与 $g(x)$ 的图像的对称轴相同，∴ $k\pi+\dfrac{2\pi}{3}=m\pi-\varphi$，$k$，$m\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，∴ $g(x)=3\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，∴ $g(x)$ 的最大值为 4，故 A 错误；当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{12}\right)$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right)$，此时 $g(x)$ 不是单调函数，故 B 错误；∵点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 不在 $g(x)$ 的图像上，∴点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 不是 $g(x)$ 图像的对称中心，故 C 错误；∵ $g\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=4$，∴直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 是 $g(x)$ 图像的对称轴，故 D 正确. 故选 D.

16. A ［解析］∵ $0<x<\pi$，∴ $2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$，又∵ x_1，x_2 是 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$ 的两个根，∴ $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{5\pi}{12}$，∴ $x_2=\dfrac{5\pi}{6}-x_1$，∴ $\sin(x_1-x_2)=\sin\left(2x_1-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(2x_1-\dfrac{\pi}{3}\right)$. ∵ $x_1<x_2$，$x_2=\dfrac{5\pi}{6}-x_1$，∴ $0<x_1<\dfrac{5\pi}{12}$，则 $2x_1-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $\cos\left(2x_1-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，∴ $\sin(x_1-x_2)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

限时集训（八）

基础过关

1. A ［解析］由 $2\cos B=\dfrac{a}{c}$ 及余弦定理得 $2\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{ac}=\dfrac{a}{c}$，整理得 $c^2=b^2$，∴ $b=c$，∴△ABC 一定为等腰三角形. 故选 A.

2. B ［解析］在△ABC 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\dfrac{x}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$，可得 $\sin A=\dfrac{1}{2}x$，由题意得当 $A\in(45^\circ,90^\circ)\cup(90^\circ,135^\circ)$ 时，满足条件的△ABC 有两个，所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{1}{2}x<1$，解得 $\sqrt{2}<x<2$. 故选 B.

3. A ［解析］∵ $a\cos B=(4c-b)\cos A$，∴ $\sin A\cos B=4\sin C\cos A-\sin B\cos A$，即 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=4\cos A\sin C$，∴ $\sin C=4\cos A\sin C$，∵ $0<C<\pi$，∴ $\sin C\neq0$，∴ $1=4\cos A$，即 $\cos A=\dfrac{1}{4}$，则 $\cos 2A=2\cos^2 A-1=-\dfrac{7}{8}$. 故选 A.

4. C ［解析］在△ABC 中，∵ $A=2B$，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$b=3$，∴ $\dfrac{a}{2\sin B\cos B}=\dfrac{3}{\sin B}$，整理得 $a=6\cos B$，由余弦定理可得 $a=6\times\dfrac{a^2+1-9}{2a}$，∴ $a=2\sqrt{3}$. 故选 C.

5. A ［解析］由正弦定理得 $b+2c\cos A=0$，由余弦定理得 $b+2c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，即 $2b^2=a^2-c^2$，∴ $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+c^2-\dfrac{a^2-c^2}{2}}{2ac}=\dfrac{a^2+3c^2}{4ac}\geqslant\dfrac{2\sqrt{3}ac}{4ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $c^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$b^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$a^2=4\sqrt{3}$ 时取等号，∴ $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，∴ $\sin B\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B\leqslant\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{1}{2}=1$，∴△$ABC$ 面积的最大值为 1. 故选 A.

6. D ［解析］∵ $\sqrt{3}\sin A\cos C+(\sqrt{3}\sin C+b)\cos A=0$，∴ $\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos A=-b\cos A$，∴ $\sqrt{3}\sin(A+C)=\sqrt{3}\sin B=-b\cos A$，∵ $a=1$，∴ $\sqrt{3}a\sin B=-b\cos A$，由正弦定理可得 $\sqrt{3}\sin A\sin B=-\sin B\cos A$，∵ $\sin B\neq0$，∴ $\sqrt{3}\sin A=-\cos A$，即 $\tan A=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，∵ $A\in(0,\pi)$，∴ $A=\dfrac{5\pi}{6}$. 故选 D.

7. D ［解析］由△ABC 是直角三角形，$AB=20$ m，$AC=10$ m，可得 $CB=10\sqrt{3}$ m，设 $\angle CED=\theta$，$DE=x$，则易知 $\angle BFE=\dfrac{\pi}{6}+\theta$，$CE=x\cos\theta$. 在△$BFE$ 中，由正弦定理，可得 $\dfrac{x}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{10\sqrt{3}-x\cos\theta}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)}$，得 $x=\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\theta+2\cos\theta}=\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)}$，其中 $\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，∴ $x\geqslant\dfrac{10\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，则△$DEF$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}x^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}\geqslant\dfrac{75\sqrt{3}}{7}$. 故选 D.

8. 3 ［解析］∵ $\cos C=-\dfrac{1}{8}$，$C\in(0,\pi)$，∴ $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，∵ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，∴ $ab=4$，由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-\dfrac{7}{4}ab$，又∵ $a+b+c=7$，∴ $c^2=(7-c)^2-7$，解得 $c=3$.

9. $\left[\dfrac{3\sqrt{93}}{31},1\right]$ ［解析］∵ $C=\dfrac{\pi}{3}$，$a=6$，∴由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-ab=36+b^2-6b=(b-3)^2+27$，∵ $1\leqslant b\leqslant4$，∴ $c^2=(b-3)^2+27\in[27,31]$，∴ $c\in[3\sqrt{3},\sqrt{31}]$，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $\sin A=\dfrac{a\cdot\sin C}{c}=\dfrac{6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{c}=\dfrac{3\sqrt{3}}{c}\in\left[\dfrac{3\sqrt{93}}{31},1\right]$.

能力提升

10. C ［解析］∵向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影为 -2，∴ $|\overrightarrow{AB}|\cos A=-2$ ①. ∵ $S_{\triangle ABC}=3$，∴ $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\dfrac{3}{2}|\overrightarrow{AB}|\sin A=3$，∴ $|\overrightarrow{AB}|\sin A=2$ ②. 由①②得 $\tan A=-1$，∵ A 为△ABC 的内角，∴ $A=\dfrac{3\pi}{4}$，∴ $|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{2}{\sin\dfrac{3\pi}{4}}=2\sqrt{2}$. 在△$ABC$ 中，由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\dfrac{3\pi}{4}=(2\sqrt{2})^2+3^2-2\times2\sqrt{2}\times3\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=29$，∴ $BC=\sqrt{29}$. 故选 C.

11. $\sqrt{2}$ ［解析］∵ BC 边上的高为 $\dfrac{a}{2}$，∴ $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{2}\times a=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，即 $a^2=2bc\sin A$，∴ $\dfrac{b}{2c}+\dfrac{c}{2b}=\dfrac{b^2+c^2}{2bc}=\dfrac{a^2+2bc\cos A}{2bc}=\dfrac{2bc\sin A+2bc\cos A}{2bc}=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，故 $\dfrac{b}{2c}+\dfrac{c}{2b}$ 的最大值是 $\sqrt{2}$.

12. $(2,1+\sqrt{6}]$ ［解析］由题可知 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}a\tan A=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，故 $bc\cos A=1$，即 $bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-1}{2}=1$，即 $b^2+c^2=3$. 又 $\dfrac{b^2+c^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2$（当且仅当 $b=c$ 时等号成立），∴ $b+c\leqslant\sqrt{6}$，又 $b+c>a=1$，∴ $2<a+b+c\leqslant\sqrt{6}+1$，∴△$ABC$ 的周长的取值范围为 $(2,1+\sqrt{6}]$.

13. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ [解析] ∵$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,其中$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$,∴动点$P$的轨迹为以$OA$,$OB$为邻边的平行四边形的内部(含边界),∴点$P$的轨迹所覆盖的面积$S=AB\times r$,其中$r$为$\triangle ABC$的内切圆的半径.在$\triangle ABC$中,由余弦定理可得$\cos A=\frac{36+AB^2-49}{12AB}=\frac{1}{5}$,∴$5AB^2-12AB-65=0$,∴$AB=5$,又$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$,∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A=6\sqrt{6}$.∵$O$是$\triangle ABC$的内心,∴$O$到$\triangle ABC$各边的距离均为$r$,∴$\frac{1}{2}\times(6+5+7)\times r=6\sqrt{6}$,∴$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,∴$S=AB\times r=5\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$.

限时集训(九)

基础过关

1. 解:(1)由余弦定理可得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,即$-\frac{1}{3}=\frac{9+c^2-12}{6c}$,整理得$c^2+2c-3=0$,解得$c=1$或$c=-3$(舍去),所以$c=1$.

(2)由$\cos B=-\frac{1}{3}$,可得$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

在$\triangle ABD$中,由正弦定理知$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,可得$\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为$\cos B=-\frac{1}{3}<0$,所以$\frac{\pi}{2}<B<\pi$,

所以$0<\angle ADB<\frac{\pi}{2}$,所以$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$.

2. 解:(1)由已知及正弦定理可得$2\sin C=\sqrt{3}\sin A+2\sin B\cos A$,所以$2(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sqrt{3}\sin A+2\sin B\cos A$,即$2\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin A$,因为$\sin A\neq 0$,所以$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又$0<B<\pi$,所以$B=\frac{\pi}{6}$.

(2)在$\triangle ABC$中,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,可得$a\sin B=b\sin A=\sqrt{3}$,由(1)知$B=\frac{\pi}{6}$,所以$a=2\sqrt{3}$.由余弦定理可得,$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=19$,所以$b=\sqrt{19}$.

3. 解:(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,可得$a\sin C=c\sin A$,∵$a\sin C=5$,∴$c\sin A=5$,∴$\sin A=\frac{5}{c}$,又∵$c\cos A=4$,∴$\cos A=\frac{4}{c}$,

∵$\sin^2 A+\cos^2 A=\frac{25}{c^2}+\frac{16}{c^2}=1$,∴$c=\sqrt{41}$.

(2)∵$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=20$,$a\sin C=5$,∴$b=8$,

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=64+41-2\times 8\times\sqrt{41}\times\frac{4}{\sqrt{41}}=41$,∴$a=\sqrt{41}$,

∴$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=\sqrt{41}+8+\sqrt{41}=8+2\sqrt{41}$.

4. 解:(1)由正弦定理可得$\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$,即$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin B\cos C+\sin C\sin B$,

∵$\sin C\neq 0$,∴$\cos B=\sin B$,

又$B\in(0,\pi)$,∴$B=\frac{\pi}{4}$.

(2)由余弦定理可得$4=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{4}$,又$a^2+c^2\geqslant 2ac$,

∴$ac\leqslant 4+2\sqrt{2}$,当且仅当$a=c$时,等号成立,

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac\leqslant\sqrt{2}+1$,

∴$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{2}+1$.

能力提升

5. 解:(1)在$\triangle ABD$中,由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$,在$\triangle ADC$中,由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$,因为$AB=AC$,$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$,$BD=1$,$\sin\angle CAD=3\sin\angle BAD$,所以$DC=3BD=3$.

(2)在$\triangle ABD$中,由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\times BD\times\cos\angle ADB$,

在$\triangle ADC$中,由余弦定理得$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\times DC\times\cos\angle ADC$,

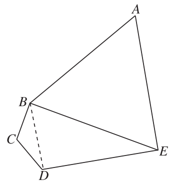
因为$AB=AC$,$AD=2$,$BD=1$,$DC=3$,$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$,

所以$4+1+2\times 2\times 1\times\cos\angle ADC=4+9-2\times 2\times 3\times\cos\angle ADC$,

解得$\cos\angle ADC=\frac{1}{2}$,所以$\angle ADC=60°$,

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(BD+CD)\times AD\times\sin\angle ADC=\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\sin 60°=2\sqrt{3}$.

6. 解:(1)如图所示,连接BD,在$\triangle BCD$中,由余弦定理可得$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD=27$,所以$BD=3\sqrt{3}$.因为$BC=CD=3$,所以$\angle CDB=\angle CBD=\frac{\pi}{6}$,又$\angle CDE=\frac{2\pi}{3}$,所以$\angle BDE=\frac{\pi}{2}$,



所以在直角三角形BDE中,$BE=\sqrt{DE^2+BD^2}=\sqrt{9^2+(3\sqrt{3})^2}=6\sqrt{3}$.

(2)设$\angle ABE=\alpha$,因为$\angle BAE=\frac{\pi}{3}$,所以$\angle AEB=\frac{2\pi}{3}-\alpha$.

在$\triangle ABE$中,由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin\angle AEB}=\frac{AE}{\sin\angle ABE}=\frac{BE}{\sin\angle BAE}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=12$,

所以$AB=12\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$,$AE=12\sin\alpha$,

所以$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot AE\sin\frac{\pi}{3}=72\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{3}=36\sqrt{3}\times\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\right]\leqslant 36\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=27\sqrt{3}$,当且仅当$2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$\alpha=\frac{\pi}{3}$时,$S_{\triangle ABE}$取得最大值$27\sqrt{3}$,即$\triangle ABE$面积的最大值为$27\sqrt{3}$.

限时集训(十)

基础过关

1. D [解析] 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则$a_1^2q^2=a_1q^3=4$,所以$a_1=q$,$q^2=2$,则$a_6=a_1^2q^2=8$,故选D.

2. B [解析] 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,因为$a_1+a_3=6$,$S_{10}=100$,所以$\begin{cases}2a_1+2d=6,\\10a_1+45d=100,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$所以$a_5=a_1+4d=9$.

3. A [解析] ∵$a_2+S_3=a_2+(a_1+a_2+a_3)=0$,∴$a_1+2a_2+a_3=a_1(1+2q+q^2)=a_1(1+q)^2=0$,又$a_1\neq 0$,∴$q=-1$.

4. C [解析] 当a_1,a_2,a_3分别为$2,-1,-4$时,满足$a_1+a_2>0$,但$a_2+a_3<0$,故A不一定正确;当a_1,a_2,a_3分别为$-4,-1,2$时,满足$a_1+a_3<0$,但$a_2+a_3=1>0$,故B不一定正确;∵$\{a_n\}$是等差数列,∴当$0<a_1<a_2$时,$2a_2=a_1+a_3>2\sqrt{a_1a_3}$,∴$a_2>\sqrt{a_1a_3}$,故C一定正确;当数列$\{a_n\}$的公差为0时,$(a_2-a_1)(a_2-a_3)=0$,故D不一定正确.故选C.

5. B [解析] ∵等差数列$\{a_n\}$是递增数列,∴公差$d>0$,∵$a_1+a_{10}=4$,∴$a_1+a_1+9d=4$,即$a_1=2-\frac{9}{2}d$,∴$a_8=a_1+7d=2-\frac{9}{2}d+7d=2+\frac{5}{2}d>2$.故选B.

6. B [解析] 因为a_5是a_2与a_6的等比中项,且$\{a_n\}$的公差为2,所以$a_5^2=(a_5+2)(a_5-6)$,得$a_5=-3$,则$a_6=-1$,$a_7=1$,所以易知S_6最小,故选B.

7. A [解析] 从冬至起,十二个节气的日影长依次记为$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{12}$,由题意,有$a_1+a_4+a_7=37.5$,根据等差数列的性质,得$a_4=12.5$,而$a_{12}=4.5$,设公差为$d$,则$\begin{cases}a_1+3d=12.5,\\a_1+11d=4.5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=15.5,\\d=-1,\end{cases}$所以冬至的日影长为15.5尺.故选A.

8. C [解析] 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,由$T_2=T_9$得$a_6^7=1$,故$a_6=1$,即$a_1q^5=1$.又$a_1a_2=a_1^2q=512$,所以$q^9=\frac{1}{512}$,故$q=\frac{1}{2}$,所以$T_8=T_3=a_2^3=\left(\frac{a_6}{q^4}\right)^3=2^{12}=4096$.故选C.

9. C [解析] ∵$ma_6\cdot a_7=a_8^2-2a_4\cdot a_9$,∴$ma_1^2q^{11}=a_1^2q^{14}-2a_1^2q^{11}$,∴$m=q^3-2$,∵$q\in(\sqrt[3]{5},2)$,∴$q^3\in(5,8)$,∴$m\in(3,6)$.故选C.

10. C [解析] ∵$a_{n+1}=a_n+\log_3\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)=a_n+\log_3\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)=a_n+\log_3(2n-1)-\log_3(2n+1)$,∴$a_{n+1}-a_n=\log_3(2n-1)-\log_3(2n+1)$,则$a_{41}-a_{40}=\log_3 79-\log_3 81$,$a_{40}-a_{39}=\log_3 77-\log_3 79$,…,$a_3-a_2=\log_3 3-\log_3 5$,$a_2-a_1=\log_3 1-\log_3 3$,将以上各式相加得$a_{41}-a_1=\log_3 1-\log_3 81$,又$a_1=1$,∴$a_{41}=\log_3 1-\log_3 81+1=-3$.故选C.

11. D [解析] 设$\{a_n\}$的公差为d,$\{b_n\}$的公比为q.因为$b_1=1$,$b_3=b_2+2$,$\{b_n\}$是正项等比数列,所以$b_1q^2=b_1q+2$,即$q^2=q+2$,即$(q-2)(q+1)=0$,得$q=2$($q=-1$舍去),所以$b_n=2^{n-1}$.因为数列$\{a_n\}$是等差数列,$b_4=a_3+a_5$,$b_5=a_4+2a_6$,所以$a_3+a_5=2a_4=2^3$,$a_4+2a_6=2^4$,所以$a_4=4$,$a_6=6$,所以$d=1$,又$a_6=a_1+5d$,所以$a_1=1$,所以$a_n=n$,所以$a_{2019}+b_9=2019+2^8=2275$.故选D.

12. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)$ [解析] 设以2为边长的等边三角形的面积为a_1,根据题意,设第n个等边三角形的面积为a_n,则$\{a_n\}$是以$a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$为首项,以$q=\frac{1}{4}$为公比的等比数列,∵公比$q\neq 1$,∴这10个三角形的面积和$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{\sqrt{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)$.

13. 1023 [解析] 因为$T_{n+1}\cdot T_{n-1}=2T_n^2$,所以$\frac{\frac{T_{n+1}}{T_n}}{\frac{T_n}{T_{n-1}}}=2$即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\geqslant 2)$,而$\frac{a_2}{a_1}=2$,所以$\{a_n\}$为等比数列,且$a_n=2^{n-1}$,所以数列$\{a_n\}$的前10项和为$\frac{1\times(1-2^{10})}{1-2}=1023$.

14. $\frac{1}{7}$ [解析] 设公差为d,由$S_4=10$,$S_8=36$,得$\begin{cases}4a_1+\frac{4\times 3}{2}d=10,\\8a_1+\frac{8\times 7}{2}d=36,\end{cases}$解得$a_1=d=1$,所以$a_n=n$,$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,则$\frac{a_n}{S_{n+3}}=\frac{n}{\frac{(n+3)(n+4)}{2}}=\frac{2n}{n^2+7n+12}=\frac{2}{n+\frac{12}{n}+7}$,当$n+\frac{12}{n}$取得最小值时,$\frac{a_n}{S_{n+3}}$取得最大值,结合函数$f(x)=x+\frac{12}{x}(x>0)$的单调性及$n\in\mathbf{N}^*$,可得当$n=3$或$n=4$时,$\left(\frac{a_n}{S_{n+3}}\right)_{\max}=\frac{1}{7}$.

15. $2-\frac{1}{2^{n-1}}$ [解析] 当$n=1$时,$2a_1=2$,∴$a_1=1$.由$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$得$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=2(n-1)(n\geqslant 2$且$n\in\mathbf{N}^*)$,两式作差可得$2^na_n=2$,即$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(n\geqslant 2$且$n\in\mathbf{N}^*)$,又$a_1=1$满足上式,∴$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.∵$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{1}{2}$,∴数列$\{a_n\}$是以1为首项,以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,则$S_n=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

◉ 能力提升

16. C [解析] ∵$a_1+b_1=5$，$a_1,b_1\in\mathbf{N}^*$，$a_1>b_1$，∴a_1,b_1 分别为3，2或 a_1,b_1 分别为4，1. 当 $a_1=4,b_1=1$ 时，$a_n=n+3$，$b_n=n$，∴$c_n=a_{b_n}=a_n=n+3$，则$\{c_n\}$的前100项和为 $4+5+\cdots+102+103=5350$；当 $a_1=3,b_1=2$ 时，$a_n=n+2$，$b_n=n+1$，∴$c_n=a_{b_n}=a_{n+1}=n+3$，则$\{c_n\}$的前100项和为 $4+5+\cdots+102+103=5350$. 故数列$\{c_n\}$的前100项和等于5350，故选C.

17. A [解析] ∵$a_1=a>0$，$a_{n+1}=-a_n^2+ta_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，存在实数 t 使$\{a_n\}$为递增数列，∴$-a_n^2+ta_n>a_n\geqslant a>0$，得 $0<a\leqslant a_n<t-1$，又由 $a_2>a_1$，可得 $-a^2+ta>a$，$-a^2+ta<t-1$，即 $a<t-1$，$(1-a)[a-(t-1)]<0$，解得 $a<1$，∴a 的取值范围是(0,1). 故选A.

18. A [解析] 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，当 $n=1$ 时，$a_1=pa_2+m$，则 $a_2=\frac{4-m}{p}$，∴$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{4-m}{4p}$，当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=pa_{n+1}+m$，$S_{n-1}=pa_n+m$，两式相减得 $(1+p)a_n=pa_{n+1}$，即 $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+p}{p}$，∴$\frac{1+p}{p}=\frac{4-m}{4p}$，解得 $m=-4p$. 又∵$p-\frac{1}{m}=p+\frac{1}{4p}\geqslant2\sqrt{p\cdot\frac{1}{4p}}=1$，当且仅当 $p=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，∴当 $p-\frac{1}{m}$ 取得最小值1时，$q=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=3$，此时 $a_n=a_1q^{n-1}=4\cdot3^{n-1}$.

19. $\begin{cases}4,n=1,\\3\cdot4^{n-1},n\geqslant2\end{cases}$ [解析] 当 $n\geqslant2$ 时，由 $4S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}$，得 $4S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_n$，∴$4S_n-4S_{n-1}=a_{n+1}$，即 $4a_n=a_{n+1}$，∴$\frac{a_{n+1}}{a_n}=4(n\geqslant2)$，又 $4S_1=4a_1=a_1+a_2$，$a_1=4$，∴$a_2=12$，∴当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=12\cdot4^{n-2}=3\cdot4^{n-1}$，又 $a_1=4$ 不满足上式，∴$a_n=\begin{cases}4,n=1,\\3\cdot4^{n-1},n\geqslant2.\end{cases}$

20. 27 [解析] 由 $a_n\cdot a_{n+2}=3a_{n+1}$ 知 $a_{n-1}\cdot a_{n+1}=3a_n(n\geqslant2)$，两式相除得 $a_{n-1}\cdot a_{n+2}=9$，∴$a_{n+2}\cdot a_{n+5}=9$，∴$a_{n-1}=a_{n+5}$，∴数列$\{a_n\}$的周期为6，又 $a_1a_4=9$，∴$a_4=9$，故 $a_5\cdot a_{2019}=a_5\cdot a_{6\times336+3}=a_5\cdot a_3=3a_4=27$.

21. $\frac{n(n+3)}{2}$ [解析] 由 $H_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n}{n}=2^n$，得 $a_1+2a_2+\cdots+2^{n-1}a_n=n\cdot2^n$①，当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+2a_2+\cdots+2^{n-2}a_{n-1}=(n-1)\cdot2^{n-1}$②，①－②得 $2^{n-1}a_n=n\cdot2^n-(n-1)\cdot2^{n-1}=(n+1)\cdot2^{n-1}$，即 $a_n=n+1(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也满足上式，所以 $a_n=n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $S_n=\frac{(2+n+1)n}{2}=\frac{n(n+3)}{2}$.

限时集训（十一）

◉ 基础过关

1. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_3=2$，$S_6=15$，可得 $a_1+2d=2$，$6a_1+15d=15$，解得 $a_1=0,d=1$，则 $a_n=n-1$.
(2)由题意知 $b_n=2^{n-1}-1$，∴$T_n=(1+2+4+\cdots+2^{n-1})-n=\frac{1-2^n}{1-2}-n=2^n-1-n$.

2. 解：(1)依题意可得 $2S_1=a_3-2$，$2S_2=a_4-2$，两式相减，得 $2a_2=a_4-a_3$，所以 $2a_2=a_2q^2-a_2q$. 因为 $a_n>0$，所以 $q^2-q-2=0$，且 $q>0$，所以 $q=2$.
(2)当 $n=1$ 时，$a_3=4$. 当 $n\geqslant2$ 时，$2S_n=a_{n+2}-2$，$2S_{n-1}=a_{n+1}-2$，所以 $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，则 $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$，即 $b_{n+1}=2b_n$. 又 $b_1=2$，$b_2=5$，所以数列$\{b_n\}$从第二项起是等比数列，所以 $b_n=\begin{cases}2,n=1,\\5\times2^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$

3. 解：(1)因为 $a_{n+1}-a_n=2$，且 $a_1=1$，所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列，所以 $a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$，即 $a_n=2n-1$.
因为 $b_1=3$，$b_2=7$，且 $a_1=1$，$a_2=3$，
所以 $c_1=b_1-a_1=2$，$c_2=b_2-a_2=4$，因为数列$\{c_n\}$是等比数列，所以数列$\{c_n\}$的公比 $q=\frac{c_2}{c_1}=2$，所以 $c_n=c_1\cdot q^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$，即 $c_n=2^n$.
(2)因为 $b_n-a_n=2^n$，$a_n=2n-1$，所以 $b_n=2^n+2n-1$，所以 $b_6=2^6+2\times6-1=75$，
因为 $b_6=a_m$，所以 $2m-1=75$，所以 $m=38$.

4. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $a_8=a_1+7d=15$①.
由 a_1,a_2,S_3 成等比数列知 $a_2^2=a_1S_3$，即 $(a_1+d)^2=a_1(3a_1+3d)=3a_1(a_1+d)$，
所以 $(d-2a_1)(a_1+d)=0$，又因为 $a_1+d=a_2\neq0$，所以 $d=2a_1$②. 由①②得 $a_1=1,d=2$，
所以 $a_n=2n-1$，$S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.
(2)证明：因为 $b_n=\frac{1}{S_n+2n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{4}$，所以原不等式成立.

◉ 能力提升

5. 解：(1)证明：∵$a_{n+1}=\frac{4}{4-a_n}$，∴$\frac{1}{a_{n+1}-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{\frac{4}{4-a_n}-2}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{4-a_n}{2a_n-4}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{2-a_n}{2a_n-4}=-\frac{1}{2}$，又∵$a_1=1$，∴$\frac{1}{a_1-2}=-1$，
∴数列$\left\{\frac{1}{a_n-2}\right\}$是以－1为首项，$-\frac{1}{2}$为公差的等差数列.
(2)由(1)知 $\frac{1}{a_n-2}=-1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{n+1}{2}$，∴$a_n=2-\frac{2}{n+1}=\frac{2n}{n+1}$，
∴$b_n=\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\frac{\frac{4n}{2n+1}}{\frac{2(2n-1)}{2n}}=\frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，∴$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=n+\frac{n}{2n+1}$.

6. 解：(1)证明：当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=2a_n-n$①，
$S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)$②，
①－②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$，所以 $a_n=2a_{n-1}+1$，所以 $\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=\frac{2a_{n-1}+1+1}{a_{n-1}+1}=\frac{2a_{n-1}+2}{a_{n-1}+1}=2$，所以$\{a_n+1\}$是首项为2，公比为2的等比数列，
所以 $a_n+1=2\cdot2^{n-1}$，所以 $a_n=2^n-1$.
(2)由(1)知，$a_2=3$，$a_3=7$，所以 $b_3=a_2=3$，$b_7=a_3=7$，设$\{b_n\}$的公差为 d，则 $b_7=b_3+(7-3)\cdot d$，所以 $d=1$，所以 $b_n=b_3+(n-3)\cdot d=n$，所以 $a_nb_n=n(2^n-1)=n\cdot2^n-n$.
设数列$\{n\cdot2^n\}$的前 n 项和为 K_n，数列$\{n\}$的前 n 项和为 H_n，
因为 $K_n=2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$③，
$2K_n=2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$④，
③－④得 $-K_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$，
所以 $K_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$.
又 $H_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，
所以 $K_n-H_n=(n-1)\cdot2^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}+2$.
所以$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}+2$.

限时集训（十二）

◉ 基础过关

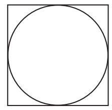
1. A [解析] 若 $l\subset\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，充分性成立；若 $l\subset\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则 $l\parallel\beta$ 或 $l\subset\beta$ 或 l 与 β 相交，必要性不成立. 故"$l\perp\beta$"是"$\alpha\perp\beta$"的充分不必要条件，故选A.

2. B [解析] 在 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1P$ 中，$AP^2=AA_1^2+A_1P^2$，当 AP 最短时，A_1P 最短，此时 $A_1P\perp B_1D_1$，又 $AA_1=AB=2$，$BC=3$，所以 A_1P 最短时点 P 靠近点 B_1，故选B.

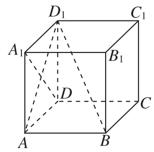
3. D [解析] 由三视图知，该几何体由一个直三棱柱和半个圆柱组合而成，所以该几何体的表面积 $S=3\times4+4\times\sqrt{3^2+4^2}+\frac{1}{2}\times3\times4\times2+\frac{1}{2}\times\pi\times2^2\times2+\frac{1}{2}\times\pi\times4\times4=44+12\pi$，故选D.

4. B [解析] 在A中，若 $l\parallel\alpha$ 且 $\alpha\perp\beta$，则 l 与 β 相交或平行或 $l\subset\beta$，故A中说法错误；在B中，若 $\gamma\parallel\alpha$ 且 $\gamma\parallel\beta$，由面面平行的性质可得 $\alpha\parallel\beta$，故B中说法正确；在C中，若 $l\parallel\alpha$ 且 $l\parallel\beta$，则 α 与 β 相交或平行，故C中说法错误；在D中，若 $\gamma\perp\alpha$ 且 $\gamma\perp\beta$，则 α 与 β 相交或平行，故D中说法错误. 故选B.

5. D [解析] 由题可知，该几何体的轴截面如图所示，即圆柱的底面半径与球的半径 r 相等，圆柱的高等于球的直径 $2r$，所以 $\frac{V_{圆柱}}{V_{球}}=\frac{\pi r^2\times2r}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3}{2}$. 故选D.



6. D [解析] 如图，连接 AD_1，因为四边形 AA_1D_1D 为正方形，所以 $A_1D\perp AD_1$，又 $A_1D\perp AB$，所以 $A_1D\perp$ 平面 ABD_1，所以 $A_1D\perp BD_1$，所以异面直线 A_1D 与 BD_1 所成角的正弦值为1. 故选D.



7. D [解析] 由三视图可知该几何体是底面为直角梯形，高为2的四棱锥，其体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(a+2a)\times b\times2=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=9$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号. 故选D.

8. B [解析] ①当较长的两条棱是四面体相对的棱时，如图1，不妨令 $AB=CD=3$，$BC=BD=AC=AD=2$，取 CD 的中点 E，连接 BE，AE，在等腰三角形 BCD 中，$BE\perp CD$，在等腰三角形 ACD 中，$AE\perp CD$，∴$CD\perp$ 平面 ABE，又 $AB\subset$ 平面 ABE，∴$AB\perp CD$，此时两条较长棱所在直线所成角的余弦值为 $\cos90°=0$. 检验：此时在 $\triangle ABE$ 中，$AE=BE=\frac{\sqrt{7}}{2}$，不满足 $AE+BE>AB$，故此种情况舍去.

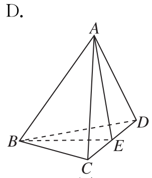


图1

②当较长的两条棱是四面体相邻的棱时，如图2，不妨令 $FG=FI=3$，$GH=FH=HI=GI=2$，设 GF 与 FI 所成的角为 θ，则 $\angle GFI=\theta$，在 $\triangle FGI$ 中，根据余弦定理得 $\cos\theta=\frac{FG^2+FI^2-GI^2}{2\cdot FG\cdot FI}=\frac{9+9-4}{2\times3\times3}=\frac{7}{9}$. 综上所述，所求余弦值为 $\frac{7}{9}$，故选B.

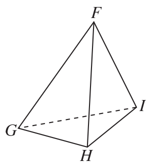
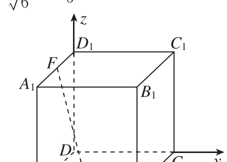


图2

9. C [解析] 方法一：连接 AF，易知 $\angle EFA$ 即为直线 EF 与平面 AA_1D_1D 所成的角，不妨设正方体的棱长为2，则 $AE=1$，$AF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{6}$，所以 $\sin\angle EFA=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选C.
方法二：以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系，如图，设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，则 $E(2,1,0)$，$F(1,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,2)$，



取平面 AA_1D_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，设直线 EF 与平面 AA_1D_1D 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以直线 EF 与平面 AA_1D_1D 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选C.

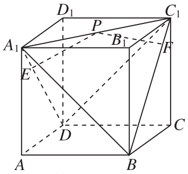
10. C [解析] 不妨设正方体的棱长为1，$DP=x$，则 $x\in[0,1]$，连接 AD_1，AP，由 $AD_1\parallel BC_1$ 可知，$\angle AD_1P$ 即为异面直线 D_1P 与 BC_1 所成的角. 在 $\triangle AD_1P$ 中，$AD_1=\sqrt{2}$，$AP=$

$D_1P=\sqrt{1+x^2}$，故 $\cos\angle AD_1P=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\sqrt{1+x^2}}$，

$\because x\in[0,1]$，$\therefore \cos\angle AD_1P=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\sqrt{1+x^2}}\in\left[\frac12,\frac{\sqrt2}{2}\right]$，又 $\because \angle AD_1P\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore \angle AD_1P\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$．故选 C.

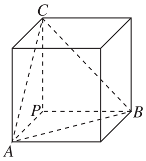
11. A ［解析］由三视图可知该几何体为三棱柱，该三棱柱的底面是边长为 2 的等边三角形，故其内切圆半径为 $\frac{\sqrt3}{3}$．因为 $\frac{\sqrt3}{3}<1$，所以当球与三棱柱的侧面相切时，得到的球的体积最大，此时球的半径 $R=\frac{\sqrt3}{3}$，球的体积 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt3}{27}\pi$．故选 A.

12. B ［解析］如图，连接 A_1B，C_1D，易知 $\triangle A_1DC_1$ 是边长为 2 的等边三角形，PE 的最小值为点 P 到 A_1D 的距离，故 $PE_{\min}=A_1P\sin 60°=\frac{\sqrt3}{2}$，同理，$\triangle A_1BC_1$ 也是边长为 2 的等边三角形，所以 $PF_{\min}=C_1P\sin 60°=\frac{\sqrt3}{2}$，所以 $PE+PF$ 的最小值为 $\sqrt3$．故选 B.



13. B ［解析］在 A 中，当 $CD=2AB$ 时，若 A,B,C,D 四点共面且 $AC\parallel BD$，则 M,N 两点能重合，故 A 中说法错误；在 B 中，若 M,N 可能重合，则 $AC\parallel BD$，故 $AC\parallel l$，此时直线 AC 与直线 l 不可能相交，故 B 中说法正确；在 C 中，当 AB 与 CD 相交，直线 $AC\parallel l$ 时，直线 BD 与 l 平行，故 C 中说法错误；在 D 中，当 AB 与 CD 是异面直线时，MN 不可能与 l 平行，故 D 中说法错误．故选 B.

14. $(3,\sqrt{41})$ ［解析］如图所示，问题转化为在长方体中，$PA=x$，$PB=y$，$PC=z$，且 $x^2+y^2=16$，$x^2+z^2=25$，求 $\sqrt{y^2+z^2}$ 的取值范围．由题可得，$x^2\in(0,16)$，则 $y^2+z^2=41-2x^2\in(9,41)$，据此可得 $\sqrt{y^2+z^2}\in(3,\sqrt{41})$，即 BC 的取值范围是 $(3,\sqrt{41})$．



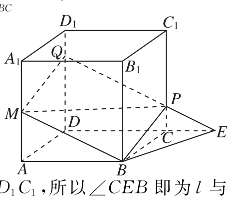
15. 34π ［解析］由题意可得 $AC=CD=\sqrt{5^2-4^2}=3$，故三棱锥 D-ABC 的外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{3^2+4^2+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$，则其表面积 $S=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2=34\pi$.

16. 4π ［解析］由题知 $OA'=OB=OD=OC$，易知三棱锥 A'-BCD 的外接球的球心为 O，外接球的半径 $R=\sqrt2$，$\therefore V=\frac43\pi R^3=\frac{8\sqrt2\pi}{3}$．点 A' 到底面 BCD 的距离为 $\sqrt2$，$\therefore V'=\frac13\times\frac12\times2\times2\times\sqrt2=\frac{2\sqrt2}{3}$，$\therefore \frac{V}{V'}=4\pi$.

能力提升

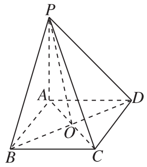
17. B ［解析］连接 CA,CE,DB，由题易知 $\lambda=\frac{V_{P\text{-}ABE}}{V_{C\text{-}ABE}}=\frac{V_{E\text{-}ABP}}{V_{E\text{-}ACB}}=\frac{\frac12V_{D\text{-}ABP}}{\frac12V_{P\text{-}ACB}}=\frac{V_{P\text{-}ABD}}{V_{P\text{-}ACB}}$，因为 $BC\parallel AD$，$AD=2BC$，所以 $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ABC}$，因此 $\lambda=\frac{V_{P\text{-}ABD}}{V_{P\text{-}ACB}}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=2$．故选 B.

18. B ［解析］如图，连接 PB,MB，易知 $QM\parallel PB$，延长 QP 交 DC 的延长线于点 E，连接 BE，易知 $CE=2$，且平面 MPQ 与平面 $ABCD$ 的交线为 BE，又 $DE\parallel D_1C_1$，所以 $\angle CEB$ 即为 l 与 C_1D_1 所成的角，所以 $\tan\angle CEB=\frac{BC}{CE}=\frac42=2$．故选 B.



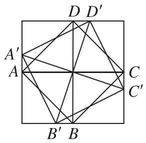
19. C ［解析］左上方的阴影部分旋转后形成的几何体的体积 V_1 等于半个球的体积减去一个三棱锥的体积，所以 $V_1=\frac43\pi r^3\times\frac12-\frac13\pi r^2\cdot r=\frac13\pi r^3$；右上方的阴影部分旋转后形成的几何体的体积 V_2 等于圆柱的体积减去半个球的体积，所以 $V_2=\pi r^2\cdot r-\frac12\times\frac43\pi r^3=\frac13\pi r^3$；右下方的阴影部分旋转后形成的几何体的体积 V_3 等于圆台的体积减去一个圆柱的体积，所以 $V_3=\frac13(\pi r^2+4\pi r^2+2\pi r^2)\cdot r-\pi r^2\cdot r=\frac43\pi r^3$．故阴影部分旋转后形成的几何体的体积 $V=V_1+V_2+V_3=\frac13\pi r^3+\frac13\pi r^3+\frac43\pi r^3=2\pi r^3$．故选 C.

20. A ［解析］如图，连接 BD，设 AC 交 BD 于点 O，因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $BD\perp AC$，$BD\perp PA$，因此 $BD\perp$ 平面 PAC，故 $BO\perp$ 平面 PAC．连接 OP，则 $\angle BPO$ 即是直线 PB 与平面 PAC 所成的角．因为 $PA=AB=2$，所以 $PB=2\sqrt2$，$BO=\sqrt2$，所以 $\sin\angle BPO=\frac{BO}{PB}=\frac12$，所以 $\angle BPO=\frac{\pi}{6}$．故选 A.



21. C ［解析］在 A 中，因为 E,F 分别为 $A'D$，BD 的中点，所以 $EF\parallel A'B$，又 $EF\not\subset$ 平面 $A'BC$，$A'B\subset$ 平面 $A'BC$，所以 $EF\parallel$ 平面 $A'BC$，故 A 中结论正确；在 B 中，因为平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，平面 $A'BD\cap$ 平面 $BCD=BD$，且 $CD\perp BD$，所以 $CD\perp$ 平面 $A'BD$，所以 $CD\perp A'B$，故 B 中结论正确；在 C 中，取 CD 的中点 M，连接 EM,FM，则 $EM\parallel A'C$，所以 $\angle FEM$ 为异面直线 EF 与 $A'C$ 所成的角，易知 $EF=1$，$EM=\sqrt2$，$FM=\sqrt3$，所以 $\angle FEM=90°$，故 C 中结论错误；在 D 中，连接 $A'F$，则 $A'F\perp BD$，因为平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，所以 $A'F\perp$ 平面 BCD，连接 FC，所以 $\angle A'CF$ 为直线 $A'C$ 与平面 BCD 所成的角，易知 $A'C=2\sqrt2$，$A'F=\sqrt2$，所以 $\sin\angle A'CF=\frac{A'F}{A'C}=\frac{\sqrt2}{2\sqrt2}=\frac12$，所以 $\angle A'CF=30°$，故 D 中结论正确．故选 C.

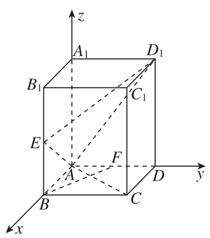
22. $\left[\frac16,\frac13\right]$ ［解析］由题意知四边形 $ABCD$ 为正方形，且几何体 K 中两个正四棱锥的高之和为 1，则几何体 K 的体积的取值范围由正方形 $ABCD$ 的面积来决定．连接 AC,BD，由底面 $ABCD$ 平行于正方体的下底面，可作平面 $ABCD$ 所在截面的平面图如下．$S_{正方形ABCD}=\frac12AC\cdot BD=\frac12AC^2$，当 A,B,C,D 分别为截面正方形四边的中点时，AC 取到最小值；当 A,B,C,D 分别为截面正方形的四个顶点时，AC 取到最大值．故 $AC_{\min}=1$，$AC_{\max}=\sqrt2$，$\therefore S_{正方形ABCD}\in\left[\frac12,1\right]$，$\therefore$ 几何体 K 的体积 $V=\frac13S_{正方形ABCD}\times1=\frac13S_{正方形ABCD}\in\left[\frac16,\frac13\right]$.



限时集训（十三）

基础过关

1. 解：(1)证明：如图，以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系．设 $AA_1=a$ $(a>0)$，则 $A(0,0,0)$，$D_1(0,1,a)$，$E\left(1,0,\frac a2\right)$，$B(1,0,0)$，$F\left(0,\frac12,0\right)$，故 $\overrightarrow{AD_1}=(0,1,a)$，$\overrightarrow{AE}=\left(1,0,\frac a2\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(-1,\frac12,0\right)$．



设平面 AED_1 的法向量为 $\boldsymbol n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol n\perp\overrightarrow{AD_1},\\ \boldsymbol n\perp\overrightarrow{AE},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+az=0,\\ x+\frac a2z=0,\end{cases}$

取 $z=1$，得 $y=-a$，$x=-\frac a2$，

则 $\boldsymbol n=\left(-\frac a2,-a,1\right)$，所以 $\boldsymbol n\cdot\overrightarrow{BF}=0$，

又 $BF\not\subset$ 平面 AED_1，所以 $BF\parallel$ 平面 AED_1．

(2)由 $C(1,1,0)$，得 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，由题知 $\sin 60°=\frac{\sqrt3}{2}=\frac{|\boldsymbol n\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol n|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\left|-\frac a2-a\right|}{\sqrt2\times\sqrt{1+\frac{a^2}{4}+a^2}}$，即 $\frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt2\times\sqrt{1+\frac{5a^2}{4}}}=\frac{\sqrt3}{2}$，

解得 $a=2$（舍去负值），即棱 AA_1 的长为 2.

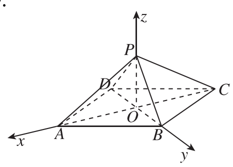
2. 解：(1)证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore O$ 为 AC,BD 的中点，

又 $PA=PC$，$PB=PD$，$\therefore PO\perp AC$，$PO\perp BD$，

$\because AC\cap BD=O$，且 $AC,BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$．

(2)设菱形 $ABCD$ 的边长为 $2t$ $(t>0)$，$\because \angle ABC=120°$，$\therefore \angle BAD=60°$，则 $OA=\sqrt3t$，$OB=t$．由(1)知 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA$ 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle PAO$，$\therefore \angle PAO=30°$，$\therefore PO=t$．以 O 为坐标原点，OA,OB,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图，则 $B(0,t,0)$，$C(-\sqrt3t,0,0)$，$P(0,0,t)$，$D(0,-t,0)$，故 $\overrightarrow{BP}=(0,-t,t)$，$\overrightarrow{CP}=(\sqrt3t,0,t)$，$\overrightarrow{CD}=(\sqrt3t,-t,0)$．



设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol m=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol m\cdot\overrightarrow{BP}=-ty_1+tz_1=0,\\ \boldsymbol m\cdot\overrightarrow{CP}=\sqrt3tx_1+tz_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，则 $\boldsymbol m=(1,-\sqrt3,-\sqrt3)$．

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol n=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol n\cdot\overrightarrow{CP}=\sqrt3tx_2+tz_2=0,\\ \boldsymbol n\cdot\overrightarrow{CD}=\sqrt3tx_2-ty_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=1$，则 $\boldsymbol n=(1,\sqrt3,-\sqrt3)$．

故 $\cos\langle\boldsymbol m,\boldsymbol n\rangle=\frac{\boldsymbol m\cdot\boldsymbol n}{|\boldsymbol m|\cdot|\boldsymbol n|}=\frac{1}{\sqrt7\times\sqrt7}=\frac17$．

设二面角 B-PC-D 的平面角为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac17\right)^2}=\frac{4\sqrt3}{7}$，

$\therefore$ 二面角 B-PC-D 的正弦值为 $\frac{4\sqrt3}{7}$.

3. 解：(1)证明：$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp CD$，

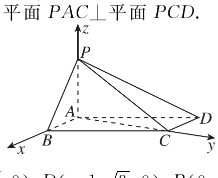
$\because AD=2$，$AC=\sqrt3$，$CD=AB=1$，

$\therefore AD^2=AC^2+CD^2$，$\therefore AC\perp CD$，

又 $AC\cap PA=A$，$\therefore CD\perp$ 平面 PAC，

$\because CD\subset$ 平面 PCD，$\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 PCD．

(2)由(1)知 $AB\perp AC$，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴，AP 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt3,0)$，$D(-1,\sqrt3,0)$，$P(0,0,1)$，故 $\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt3,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(-1,\sqrt3,-1)$．

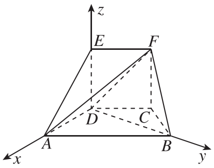
设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol n\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol n\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-z=0,\\ \sqrt3y-z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，则 $\boldsymbol n=(\sqrt3,1,\sqrt3)$，$\therefore \cos\langle\boldsymbol n,\overrightarrow{PD}\rangle=\frac{\boldsymbol n\cdot\overrightarrow{PD}}{|\boldsymbol n|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=-\frac{\sqrt{105}}{35}$，设直线 PD 与平面 PBC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{105}}{35}$.

4. 解：(1)证明：$\because DC\parallel EF$，$EF\subset$ 平面 $ABFE$，$DC\not\subset$ 平面 $ABFE$，$\therefore DC\parallel$ 平面 $ABFE$，

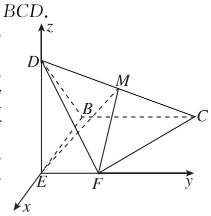
又平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABFE=AB$，

$\therefore AB\parallel CD$,又$\angle ADC=\angle DCB=120°$,
$\therefore$四边形$ABCD$是等腰梯形,$\therefore AD=DC=BC=1$,$\therefore \angle BDC=\angle DBC=30°$,
$\therefore \angle ADB=90°$,$\therefore AD\perp BD$.
$\because$四边形$EDCF$是正方形,$\angle ADE=90°$,
$\therefore DE\perp DC$,$DE\perp AD$,
$\therefore DE\perp$平面$ABCD$,$\therefore BD\perp DE$.
又$AD\cap DE=D$,$\therefore BD\perp$平面ADE,
$\because AE\subset$平面ADE,$\therefore AE\perp BD$.
(2)以D为原点,DA所在直线为x轴,DB所在直线为y轴,DE所在直线为z轴,建立空间直角坐标系,如图,则$A(1,0,0)$,$F\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$D(0,0,0)$,故$\overrightarrow{FA}=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{DB}=(0,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.



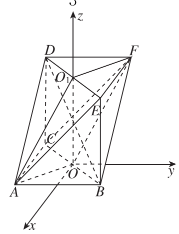
设平面BDF的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,
则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0,\end{cases}$令$x=2$,
则$\boldsymbol{m}=(2,0,1)$.
设直线AF与平面BDF所成的角为θ,
则$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{FA}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{FA}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\therefore$直线$AF$与平面$BDF$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

5. **解**:(1)证明:取DB的中点N,连接MN,EN(图略).$\because MN=\frac{1}{2}BC$且$MN\parallel BC$,$EF=\frac{1}{2}BC$且$EF\parallel BC$,$\therefore MN\underline{\parallel}EF$,
$\therefore$四边形$EFMN$是平行四边形.
$\because EF\perp BE$,$EF\perp DE$,$BE\cap DE=E$,
$\therefore EF\perp$平面BDE,$\because EN\subset$平面BDE,$\therefore EF\perp EN$,$\therefore MF\perp MN$.在$\triangle DFC$中,$DF=FC$,
$\because M$为CD的中点,$\therefore MF\perp CD$,$\because MN\cap CD=M$,$\therefore MF\perp$平面BCD.
(2)由题知$DE\perp BE$,$DE\perp EF$,$BE\perp EF$,以E为原点,BE,EF,ED所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,如图,



设$BC=2$,则$E(0,0,0)$,$F(0,1,0)$,$C(-2,2,0)$,$M(-1,1,1)$,
$\therefore \overrightarrow{EF}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{FM}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{CF}=(2,-1,0)$.
设平面EMF的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,
则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FM}=-x+z=0,\end{cases}$
取$x=1$,则$\boldsymbol{m}=(1,0,1)$.
设平面CMF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FM}=-x_1+z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=2x_1-y_1=0,\end{cases}$取$x_1=1$,则$\boldsymbol{n}=(1,2,1)$.$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
由图可知,二面角E-MF-C的平面角为钝角,
$\therefore$二面角E-MF-C的余弦值为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. **解**:(1)证明:如图,取BC,DE的中点分别为O,O_1,连接AO_1,O_1F,FO,OA.$\because DF=EF=2$,$DE=2\sqrt{2}$,$\therefore DF\perp EF$,$FO_1\perp DE$.
$\because CD=DF=2$,$CF=2\sqrt{2}$,$\therefore CD\perp DF$.
在矩形$BCDE$中,$CD\perp DE$,又$DE\cap DF=D$,$\therefore CD\perp$平面EDF,$\therefore$平面$BCDE\perp$平面EDF,$\therefore FO_1\perp$平面$BCDE$.

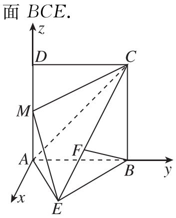


同理,$AO\perp$平面$BCDE$,$\therefore AO\parallel FO_1$,又$AO=FO_1=\sqrt{2}$,$\therefore$四边形$AOFO_1$为平行四边形,
$\therefore AO_1\parallel FO$.
又$AO_1\not\subset$平面BCF,$FO\subset$平面BCF,
$\therefore AO_1\parallel$平面BCF.
$\because DE\parallel BC$,$DE\not\subset$平面BCF,$BC\subset$平面BCF,
$\therefore DE\parallel$平面BCF.
又$AO_1\subset$平面ADE,$DE\subset$平面ADE,$AO_1\cap DE=O_1$,$\therefore$平面$ADE\parallel$平面BCF.

(2)连接OO_1,由(1)可得$OO_1\perp$平面ABC,以O为原点,过点O平行于AC的直线为x轴,过点O平行于AB的直线为y轴,OO_1所在直线为z轴,建立空间直角坐标系,如图,
则$B(1,1,0)$,$C(-1,-1,0)$,$D(-1,-1,2)$,$F(-1,1,2)$,$\therefore \overrightarrow{BD}=(-2,-2,2)$,$\overrightarrow{BC}=(-2,-2,0)$,$\overrightarrow{BF}=(-2,0,2)$.
设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面BCF的法向量,
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x-2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=-2x+2z=0,\end{cases}$
取$x=1$,则$\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.
设直线BD与平面BCF所成的角为θ,
则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{-2\times1-2\times(-1)+2\times1}{\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{3}$,故直线$BD$与平面$BCF$所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$.

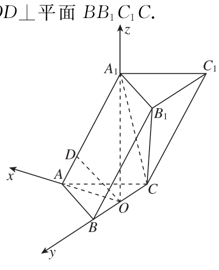
能力提升

7. **解**:(1)证明:$\because BF\perp$平面ACE,$AE\subset$平面ACE,$\therefore BF\perp AE$.
$\because$四边形$ABCD$是正方形,$\therefore BC\perp AB$.
又平面$ABCD\perp$平面ABE,平面$ABCD\cap$平面$ABE=AB$,$\therefore BC\perp$平面ABE.
$\because AE\subset$平面ABE,$\therefore BC\perp AE$.
$\because BF\cap BC=B$,$\therefore AE\perp$平面BCE.
(2)$\because AE\perp$平面BCE,$BE\subset$平面BCE,$\therefore AE\perp BE$,在$\mathrm{Rt}\triangle AEB$中,$AB=2$,$AE=1$,
$\therefore \angle ABE=30°$,$BE=\sqrt{3}$.
以A为原点,AB,AD所在直线分别为y,z轴,建立空间直角坐标系,如图所示.假设存在满足题意的点M.



设$AM=h(0\leqslant h\leqslant2)$,则$M(0,0,h)$,$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$B(0,2,0)$,$C(0,2,2)$,$\therefore \overrightarrow{ME}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-h\right)$,$\overrightarrow{CE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},-2\right)$.
设平面MCE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ME}=\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{1}{2}y-hz=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=\frac{\sqrt{3}x}{2}-\frac{3}{2}y-2z=0,\end{cases}$令$z=2$,则
$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2+3h),h-2,2\right)$.
易知平面ABE的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,
由$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{3}(2+3h)^2+(h-2)^2+4}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}$,解得$h=\sqrt{3}$(舍去负值).故当$AM=\sqrt{3}$时,平面$ABE$与平面$MCE$所成锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

8. **解**:(1)证明:连接AO.
$\because A_1O\perp$底面ABC,$\therefore AA_1$与底面ABC所成的角为$\angle A_1AO$,即$\angle A_1AO=\frac{\pi}{3}$.
在等边三角形ABC中,易求得$AO=\sqrt{3}$,
在$\triangle AOD$中,由余弦定理,得$OD=\sqrt{OA^2+AD^2-2OA\cdot AD\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{2}$,
$\therefore OD^2+AD^2=3=OA^2$,$\therefore OD\perp AA_1$.
又$AA_1\parallel BB_1$,$\therefore OD\perp BB_1$.
又$AO\perp BC$,$BC\perp A_1O$,$AO\cap A_1O=O$,
$\therefore BC\perp$平面AA_1O,
$\because OD\subset$平面AA_1O,$\therefore OD\perp BC$,
又$BC\cap BB_1=B$,$\therefore OD\perp$平面BB_1C_1C.
(2)以O为原点,OA,OB,OA_1所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系,如图所示.
由(1)可得$OA_1=3$,$AA_1=2\sqrt{3}$,
则$A(\sqrt{3},0,0)$,$C(0,-1,0)$,$A_1(0,0,3)$,$B(0,1,0)$,$\therefore \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{A_1C}=(0,-1,-3)$,

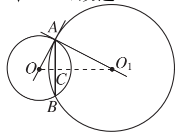


$\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{3},0,3)$,又$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}$,$\therefore$点$D$的坐标为$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},0,\frac{3}{4}\right)$,$\therefore$平面$BB_1C_1C$的一个法向量为$\overrightarrow{OD}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},0,\frac{3}{4}\right)$.
设平面A_1B_1C的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\ -y-3z=0,\end{cases}$
令$x=\sqrt{3}$,则$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},3,-1)$,
$\therefore |\cos\langle\overrightarrow{OD},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{OD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OD}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{13}}{13}$,
由图可知,二面角B-B_1C-A_1的平面角为钝角,
$\therefore$二面角B-B_1C-A_1的余弦值是$-\frac{\sqrt{13}}{13}$.

限时集训(十四)

基础过关

1. C [解析]由于直线$x-2y-2=0$的斜率为$\frac{1}{2}$,故所求直线的斜率为-2,故所求直线的方程为$y-0=-2(x-1)$,即$2x+y-2=0$,故选C.
2. D [解析]圆心到直线的距离$d=\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=1$,故$r>1$,故选D.
3. C [解析]由题意可知$\tan\alpha=2$,则$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2}{\tan^2\alpha+1}-1=-\frac{3}{5}$.故选C.
4. A [解析]由于两条直线平行,所以$m\times(-3m)-(-3)\times4=0$,解得$m=\pm2$.当$m=2$时,两直线方程都是$2x-3y+6=0$,故两直线重合,不符合题意.当$m=-2$时,$l_1:2x+3y-6=0$,$l_2:2x+3y+6=0$,故两平行直线间的距离为$\frac{|6-(-6)|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{12\sqrt{13}}{13}$.故选A.
5. D [解析]由圆$(x-2)^2+y^2=1$,可得圆心坐标为$(2,0)$,半径$r=1$,设圆心$(2,0)$到直线$y=\sqrt{3}x+b$的距离为d,则$d=\frac{|2\sqrt{3}+b|}{\sqrt{3+1}}$.因为圆$(x-2)^2+y^2=1$上的点到直线$y=\sqrt{3}x+b$的最短距离为$\sqrt{3}$,所以$d-r=\sqrt{3}$,即$\frac{|2\sqrt{3}+b|}{\sqrt{3+1}}-1=\sqrt{3}$,解得$b=2$或$b=-4\sqrt{3}-2$,故选D.
6. C [解析]依题意得$O(0,0)$,$\odot O$的半径为$\sqrt{5}$,$O_1(a,0)$,$\odot O_1$的半径为r.两圆在A点处的切线互相垂直,则由切线的性质定理知两切线必过两圆的圆心,如图,连接OO_1,与AB交于C,则$|OC|=\sqrt{|OA|^2-|AC|^2}=1$,$OA\perp O_1A$,$OO_1\perp AB$,由直角三角形射影定理得$|OA|^2=|OC|\times|OO_1|$,即$5=1\times|OO_1|$,所以$|OO_1|=5$,所以$r=|AO_1|=2\sqrt{5}$,又$\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2}=5$,得$a=5$,所以$\odot O_1$的方程为$(x-5)^2+y^2=20$,故选C.



7. A [解析]令$x=0$,代入$2x-y-\sqrt{3}=0$中,可得$P(0,-\sqrt{3})$,圆心坐标为$(-1,0)$,则P与圆心间的距离为$\sqrt{1+3}=2$,圆的半径为6,可知较长一段长为8,较短一段长为4,则较长一段与较短一段长度的比值为2.
8. B [解析]设点P的坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha+1)$,即$x=\cos\alpha$,$y=\sin\alpha+1$,则$x+y+c=\cos\alpha+\sin\alpha+1+c=\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right]+1+c=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+1+c\geqslant0$恒成立,即$c\geqslant-1-\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$恒成立.$\because -1\leqslant\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$,$\therefore -1-\sqrt{2}\leqslant-1-\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant-1+\sqrt{2}$,则$c\geqslant-1+\sqrt{2}$,故选B.
9. D [解析]画出$x^2+y^2\leqslant1$表示的平面区域W如图中阴影部分所示,再画出直线$y=2x-2$,如图所示.由图可知,$|OQ|$的最大值为1,此时$|PQ|=|OQ|=1$,对应$|OP|$