2020

CANPOINT

全品高考

第二轮专题

主编：肖德好

数学（理科）听课手册

本册主编：李子忠

副 主 编：樊木华

编　　者：李子忠　甘志国　庞志全　杨　帆

韩凤亭　许忠华　刘二龙　刘小峰

特约主审：吕　跃　侯曙明

黄河出版传媒集团

阳光出版社

图书在版编目（CIP）数据

全品高考第二轮专题：新课标．数学．理科 / 肖德好主编．—银川：阳光出版社，2014.9(2019.9 重印)

ISBN 978-7-5525-1443-8

Ⅰ．①全… Ⅱ．①肖… Ⅲ．①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 198394 号

全品高考第二轮专题 数学(理科) 新课标 肖德好 主编

责任编辑 胡 鹏
封面设计 唐思羽

黄河出版传媒集团 阳光出版社 出版发行

出 版 人 薛文斌
地 址 宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)
网 址 http://www.ygchbs.com
网上书店 http://shop129132959.taobao.com
电子信箱 yangguangchubanshe@163.com
邮购电话 0951—5014139
经 销 全国新华书店
印刷装订 河北远涛彩色印刷有限公司

开 本 880mm×1230mm 1/16
印 张 16.5
字 数 578 千字
版 次 2014 年 9 月第 1 版
印 次 2019 年 9 月第 6 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5525-1443-8

定 价 60.80 元

简约不简单 数学

二、三轮复习是高考前的冲刺阶段，也是考生提升成绩的最后一个突破点。要做出一本高效的二、三轮复习用书，关键要找到一种对应一线的高效的二、三轮备考模式。

什么是高效的模式？即确定二、三轮备考到底要解决什么，也即发现学生高考时出现的失分点有哪些。

通过研究历年教育部发行的《试题分析》，并结合大量的一线调研，我们将问题整理如下：

01 怕陌生。每年的高考试卷，总有几道题，难度不大，但试题背景陌生。无论是在心态上，还是在解题的思路上，它们都成了考生的拦路虎。

02 速度慢。在高考时，有相当一部分考生，由于时间分配不合理，或是做题习惯不好，亦或是方法采用不当，最终都没有做完试卷而影响了最后的分数。

03 思维疏。绝大多数中档层次学生，虽然平时做的题很多，但不注意归纳总结，当高考出现同类型有变化的试题时，他们往往在关键步骤上思路不清晰，答题就出现“会而不全”的情况。

04 失误多。每年高考后估分，总会出现拍脑瓜当时没想起来、漏了或看错了条件、计算错误等“会而不对”的情况；

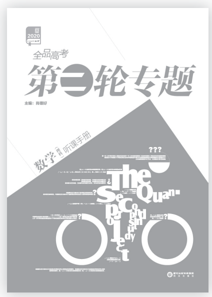
05 没思路。这类试题，有一个特点，即切入点隐蔽，融合的思想与方法多，需要分析的条件错综复杂（目前全国卷压轴题综合性明显降低）。如果二、三轮没有进行专门的训练，在高考有限的时间里，很难有所突破。

2020版《全品高考第二轮专题》
用心做产品，用心为您！

聚焦高考，将一类类必考问题讲透练透

聚焦区分度，将一项项易失分角度逐步攻克

聚焦答卷，将速度、准确度、思维度全面提升



一本对接高考——“专题大本”

一本拆分考卷——“特色专项”

二轮产品部分特点如下：

X 高分特训
20分压轴小题天天练

第一组

1. 已知函数 $f(x)=x^2-\cos x$，则 $f\left(\frac{3}{5}\right)$，$f(0)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$的大小关系是　（　　）

A. $f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)<f\left(-\frac{1}{2}\right)$　　C. $f\left(\frac{3}{5}\right)<f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(0)$

B. $f(0)<f\left(-\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{3}{5}\right)$　　D. $f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)$

碎片式，专攻心态

K 考点考法探究　　核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题1　函数的概念与表示

例1 (1)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{x^2+1}{x}, x<0,\\ 2^{x+1}, x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=x^2-x-2$，设 b 为实数，若存在实数 a，使得 $g(b)+f(a)=2$ 成立，则 b 的取值范围为　（　　）

A. $[-1,2]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

C. $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$　　D. $\left(-\frac{3}{2},4\right]$

$f(x_1)>g(x_2)$，则转化为 $f(x)_{max}>g(x)_{min}$；若对任意 x_1，$x_2\in D$，$f(x_1)>g(x_2)$恒成立，则转化为 $f(x)_{min}>g(x)_{max}$.

【自我检测】

1. 若函数 $f(x)=\log_2(x-1)+\sqrt{2-x}$，则函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$的定义域为　（　　）

A. $(1,2]$　B. $(2,4]$　C. $[1,2)$　D. $[2,4)$

2. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+6(x\leqslant 0),\\ -x+6(x>0),\end{cases}$ 则不等式 $f(x)<f(-1)$的解集是　（　　）

题组式，专攻题型与失误

思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程的根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

示例	解法关键
2019·全国卷Ⅰ　关于函数 $f(x)=\sin\|x\|+\|\sin x\|$有下述四个结论： ① $f(x)$是偶函数；② $f(x)$在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递增； ③ $f(x)$在 $[-\pi,\pi]$有4个零点；④ $f(x)$的最大值为2. 其中所有正确结论的编号是　（　　） A. ①②④　B. ②④　C. ①④　D. ①③	易知函数 $f(x)$为偶函数，所以只需画出 $f(x)$在区间 $[0,\pi]$上的图像，根据图像判断正误.选C

案例式，专攻技法

解答1　“17题～19题”+“二选一”46分练

（时间：45分钟　分值：46分）

解答题（本大题共4小题，共46分.第22，23题为选考题.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. 在△ABC中，内角 A,B,C的对边分别为 a,b,c，$\sin A,\sin B,\sin C$成等差数列，且 $\cos C=\frac{1}{3}$.

(1)求 $\frac{b}{a}$的值；

(2)若 $c=11$，求△ABC的面积.

限时式，专攻速度与规范

目录

contents

全品高考第二轮专题（听课手册）

第Ⅰ篇 高考专题讲练

高考七大模块题型解法攻略

01 模块一 函数与导数

02 模块二 三角函数与平面向量

03 模块三 数列

04 模块四 立体几何

05 模块五 解析几何

方法篇
选填题的特殊解法

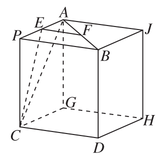
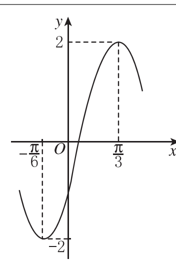
方法一　特值（例）法

特值（例）法是根据题设和各选项的具体情况和特点，选取满足条件的特殊的数值、特殊的点、特殊的例子、特殊的图形、特殊的位置、特殊的函数、特殊的方程、特殊的数列等，针对各选项进行代入对照，从而得到正确答案的方法.

（1）使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊情况也一定成立.

（2）使用技巧：找到满足条件的合适的特殊例子，有时甚至需要两个或两个以上的特殊例子才可以确定结论.

（3）常见问题：求范围，比较大小，含字母求值或区间，恒成立问题，任意性问题等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅲ] 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1\neq 0, a_2=3a_1$，则 $\frac{S_{10}}{S_5}=$________.	由条件 $a_2=3a_1$ 不能确定此数列，所以不妨取 $a_1=1$，则 $a_2=3$，求出 S_{10}, S_5 即可. 答案：4
[2019·全国卷Ⅰ] 已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E,F 分别是 PA,AB 的中点，$\angle CEF=90°$，则球 O 的体积为（　　） A. $8\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$　　D. $\sqrt{6}\pi$	如图所示，构造边长为 $\sqrt{2}$ 的正方体 $PBJA\text{-}CDHG$，显然满足题设的一切条件，则球 O 就是该正方体的外接球，从而体积为 $\sqrt{6}\pi$. 选 D  图 F1-1
[2017·全国卷Ⅰ] 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$________.	结合三角函数的定义，取角 α 终边上的特殊点 $(1,2)$，求出 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，代入计算. 答案：$\frac{3\sqrt{10}}{10}$
[2017·山东卷] 若 $a>b>0$，且 $ab=1$，则下列不等式成立的是（　　） A. $a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)$　　B. $\frac{b}{2^a}<\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}$ C. $a+\frac{1}{b}<\log_2(a+b)<\frac{b}{2^a}$　　D. $\log_2(a+b)<a+\frac{1}{b}<\frac{b}{2^a}$	根据条件不妨对 a,b 选取特殊值验证，如 $a=2, b=\frac{1}{2}$ 时，选项 A，C，D 对应的不等式不成立. 选 B
[2016·全国卷Ⅱ] 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图 F1-2 所示，则（　　） A. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ B. $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ C. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ D. $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$  图 F1-2	结合图像，分别取 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{3}$ 验证. 选 A

自测题

1. 已知 $a>b>0$，$x=a+be^b$，$y=b+ae^a$，$z=b+ae^b$，则（　　）
   A. $x<z<y$　　B. $z<x<y$
   C. $z<y<x$　　D. $y<z<x$

2. 设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\beta=\tan\alpha(1+\sin\beta)$，则（　　）
   A. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$　　B. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$
   C. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

3. 已知直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 相切于点 P，l 与双曲线的两条渐近线分别交于点 M,N，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 的值为（　　）
   A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 0

4. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则下列等式中一定成立的是（　　）
   A. $S_n+S_{2n}=S_{3n}$　　B. $S_{2n}^2=S_nS_{3n}$
   C. $S_{2n}^2=S_n+S_{2n}-S_{3n}$　　D. $S_n^2+S_{2n}^2=S_n(S_{2n}+S_{3n})$

5. 如图 F1-3，在 $\triangle ABC$ 中，点 M 是 BC 的中点，过点 M 的直线与直线 AB,AC 分别交于不同的两点 P,Q，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=$________.

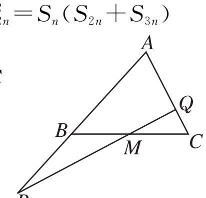


图 F1-3

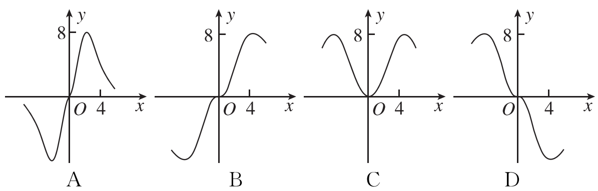
方法二　排除法

数学选择题的解题本质就是去伪存真，舍弃不符合题目要求的选项，找到符合题意的正确选项．排除法就是通过观察分析或推理运算题目提供的信息或通过特例，对错误的选项逐一剔除，从而获得正确选项的方法．

（1）使用前提：四个选项中有且只有一个正确答案，适用于定性型或不易直接求解的选择题．

（2）使用技巧：当题目中的条件多于一个时，先根据某些条件在选项中找出明显与之矛盾的，予以否定，再根据另一些条件在缩小选项的范围内找出矛盾，这样逐步筛选．它与特值（例）法、验证法等常结合使用．

（3）常见问题：函数图像的判别，不等式，空间线面位置关系等不宜直接求解的问题．

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅲ] 函数 $y=\frac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在$[-6,6]$的图像大致为 (　　)  图 F2-1	由函数解析式易知函数为奇函数，故可排除 C，再取特殊值 $x=4$，可排除 D，取特殊值 $x=6$，可排除 A．选 B
[2019·全国卷Ⅱ] 若 $a>b$，则 (　　) A．$\ln(a-b)>0$　B．$3^a<3^b$ C．$a^3-b^3>0$　D．$\|a\|>\|b\|$	选择满足 $a>b$ 的一组数据逐一排除错误答案，比如 $a=0$，$b=-1$．选 C
[2019·全国卷Ⅱ] 下列函数中，以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增的是 (　　) A．$f(x)=\|\cos 2x\|$　B．$f(x)=\|\sin 2x\|$ C．$f(x)=\cos\|x\|$　D．$f(x)=\sin\|x\|$	分析各选项中函数的周期性与单调性，逐一排除．$f(x)=\sin\|x\|$ 为偶函数，不是周期函数，可排除 D；$f(x)=\cos\|x\|=\cos x$ 的最小正周期为 2π，可排除 C；$f(x)=\|\sin 2x\|$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取得最大值，所以不可能在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，可排除 B．选 A

自测题

1．函数 $f(x)=x^2+x\sin x$ 的图像大致为 (　　)

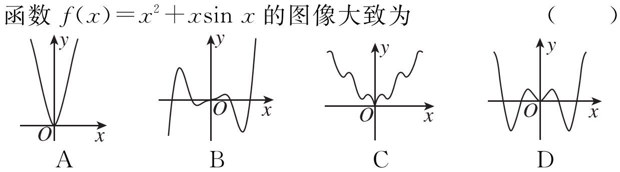


图 F2-2

2．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b}=1(b>0)$，直线 $l:y=mx+1$，若对任意的 $m\in\mathbf{R}$，直线 l 与椭圆 C 恒有公共点，则实数 b 的取值范围是 (　　)

A．$[1,4)$　B．$[1,+\infty)$

C．$[1,4)\cup(4,+\infty)$　D．$(4,+\infty)$

3．已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，则 ω 的取值范围是 (　　)

A．$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$　B．$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

C．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　D．$(0,2]$

4．若直线 $x-my+m=0$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 有两个交点，且两个交点分别位于坐标平面上两个不同的象限内，则 m 的取值范围是 (　　)

A．$(0,1)$　B．$(0,2)$

C．$(-1,0)$　D．$(-2,0)$

方法三　验证法

验证法是把选项代入题干中进行检验，或反过来从题干中找合适的验证条件，代入各选项中进行检验，从而可否定错误选项，得到正确选项的方法．

（1）使用前提：选项中存在唯一正确的答案．

（2）使用技巧：可以结合特值（例）法、排除法等先否定一些明显错误的选项，再选择直觉认为最有可能的选项进行验证，这样可以快速获取答案．

（3）常见问题：题干信息不全，选项是数值或范围，正面求解或计算繁琐的问题等．

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅰ] 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和．已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则 (　　) A．$a_n=2n-5$　B．$a_n=3n-10$ C．$S_n=2n^2-8n$　D．$S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$	由已知 $S_4=0$，$a_5=5$ 可知 $S_5=5$，验证选项 C，D 可知 C，D 错误；再由 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ 验证选项 A，B，可知 B 错误．选 A

（续表）

示例	解法关键
[2018·北京卷] 设集合 $A=\{(x,y)\mid x-y\geqslant 1,ax+y>4,x-ay\leqslant 2\}$，则 (　　) A. 对任意实数 a，$(2,1)\in A$　　B. 对任意实数 a，$(2,1)\notin A$ C. 当且仅当 $a<0$ 时，$(2,1)\notin A$　　D. 当且仅当 $a\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$(2,1)\notin A$	对 a 取特殊值进行验证. 当 $a=0$ 时，A 错误；当 $a=2$ 时，B 错误；当 $a=1$ 时，C 错误. 选 D
[2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$，则 (　　) A. $f(x)$的最小正周期为 π，最大值为 3　B. $f(x)$的最小正周期为 π，最大值为 4 C. $f(x)$的最小正周期为 2π，最大值为 3　D. $f(x)$的最小正周期为 2π，最大值为 4	当 $x=0$ 时，$\sin x=0$，$\cos x=1$，函数值为 4，所以 A，C 错误；验证可得 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 D 错误. 选 B
[2018·全国卷Ⅲ] 下列函数中，其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是 (　　) A. $y=\ln(1-x)$　B. $y=\ln(2-x)$　C. $y=\ln(1+x)$　D. $y=\ln(2+x)$	函数 $y=\ln x$ 的图像过点$(1,0)$，而点$(1,0)$关于直线 $x=1$ 对称的点是$(1,0)$，经验证只有 B 符合题意. 选 B
[2017·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递减，且为奇函数. 若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 (　　) A. $[-2,2]$　B. $[-1,1]$　C. $[0,4]$　D. $[1,3]$	当 $x=4$ 时，$f(x-2)=f(2)<f(1)=-1$，不符合题意，当 $x=3$ 时，$f(x-2)=f(1)=-1$，符合题意. 选 D

自测题

1. 设下列函数的定义域为$(0,+\infty)$，则值域为$(0,+\infty)$的函数是 (　　)
   A. $y=e^x-x$　　B. $y=e^x+\ln x$
   C. $y=x-\sqrt{x}$　　D. $y=\ln(x+1)$
2. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$图像的一条对称轴的方程为 $x=\frac{\pi}{12}$，则 ω 的最小值为 (　　)
   A. 2　B. 4　C. 10　D. 16
3. 已知 π 为圆周率，e 为自然对数的底数，则 (　　)
   A. $\pi^e<3^e$　　B. $\pi 3^{e-2}<3\pi^{e-2}$
   C. $\log_\pi e>\log_3 e$　　D. $\pi\log_3 e>3\log_\pi e$
4. 已知函数 $f(x)=-x^3-7x+\sin x$，若 $f(a^2)+f(a-2)>0$，则实数 a 的取值范围是 (　　)
   A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,3)$
   C. $(-1,2)$　　D. $(-2,1)$

方法四　估算法

因为选择题提供了唯一正确的答案，解答又不需提供过程，所以可以通过猜测、合情推理、估算而获得答案，这样往往可以减少运算量，但同时加强了思维的层次. 估算省去了很多推导过程和复杂的计算，节省了时间，从而显得更加快捷.

(1) 使用前提：针对一些复杂的、不易准确求值的与计算有关的问题. 常与特值（例）法结合起来使用.

(2) 使用技巧：对于数值计算常采用放缩估算、整体估算、近似估算、特值估算等，对于几何体问题，常进行分割、拼凑、位置估算.

(3) 常见问题：求几何体的表面积、体积，三角函数的求值，求离心率，求参数的范围等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅰ] 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\right.$，称为黄金分割比例$\left.\right)$，著名的“断臂维纳斯”便是如此. 此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105 cm，头顶至脖子下端的长度为 26 cm，则其身高可能是 (　　)  图 F4-1 A. 165 cm　B. 175 cm　C. 185 cm　D. 190 cm	头顶至脖子下端的长度为 26 cm，可得咽喉至肚脐的长度小于 42 cm，肚脐至足底的长度小于 110 cm，则该人的身高小于 178 cm. 又由肚脐至足底的长度大于 105 cm，可得头顶至肚脐的长度大于 65 cm，则该人的身高大于 170 cm. 选 B
[2019·浙江卷] 设 $a,b\in\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a$，$a_{n+1}=a_n^2+b$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 (　　) A. 当 $b=\frac{1}{2}$ 时，$a_{10}>10$　　B. 当 $b=\frac{1}{4}$ 时，$a_{10}>10$ C. 当 $b=-2$ 时，$a_{10}>10$　　D. 当 $b=-4$ 时，$a_{10}>10$	分析可知当 b 越大时，a_{10} 越大. 四个选项中 A 中的 b 最大，当 $b=\frac{1}{2}$ 时，$a_2\geqslant\frac{1}{2}$，$a_3\geqslant\frac{3}{4}$，$a_4\geqslant\frac{17}{16}$，$a_5\geqslant\frac{417}{256}$，$a_6>\frac{11}{4}$，$a_7>\frac{129}{16}$，$a_8>64$，所以 $a_{10}>a_9>a_8>10$. 选 A
[2018·全国卷Ⅲ] 设 A,B,C,D 是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 D-ABC 体积的最大值为 (　　) A. $12\sqrt{3}$　B. $18\sqrt{3}$　C. $24\sqrt{3}$　D. $54\sqrt{3}$	等边三角形 ABC 的面积为 $9\sqrt{3}$，显然球心不是此三角形的中心，所以三棱锥的体积最大时，三棱锥的高 h 应满足 $h\in(4,8)$，所以 $\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 4<V_{三棱锥D\text{-}ABC}<\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 8$，即 $12\sqrt{3}<V_{三棱锥D\text{-}ABC}<24\sqrt{3}$. 选 B

（续表）

示例	解法关键
[2019·天津卷] 已知 $a=\log_5 2,b=\log_{0.5}0.2,c=0.5^{0.2}$,则 a,b,c 的大小关系为 （　　） A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$ C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$	因为 $a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$, $b=\log_{0.5}0.2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}=\log_2 5>1$, $c=0.5^{0.2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\geqslant\frac{1}{2}$,且 $c=0.5^{0.2}<0.5^{0}=1$,所以 $b>c>a$.选 A
[2017·全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 （　　） A. $\frac{6}{5}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$	当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时,函数值大于 1.选 A

自测题

1. 设 $a=\sqrt{2}$, $b=\mathrm{e}^{-\pi}$, $c=\log_2 3$,则 （　　）
   A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$
   C. $b<c<a$　　D. $c<b<a$
2. 已知 x_1 是方程 $x+2^x=4$ 的一个根,x_2 是方程 $x+\log_2 x=4$ 的一个根,则 x_1+x_2 所在的区间是 （　　）
   A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$　　C. $(3,5)$　　D. $(5,+\infty)$
3. 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$, $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin\beta+\cos\beta=b$,则 （　　）
   A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<1$　　D. $ab>2$
4. 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,A,B,C 为该抛物线上的三点,若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|$ 等于 （　　）
   A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 3

方法五　构造法

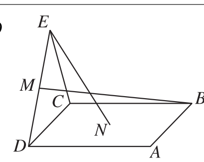
构造法是一种创造性的解题方法，它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想.利用已知条件和结论的特殊性构造函数、数列、方程或几何图形等，从而简化推理与计算过程，使较复杂的或不易求解的数学问题得到简捷解答.

构造法来源于对基础知识和基本方法的积累，需要从一般的方法原理中进行提炼概括，积极联想，横向类比，从曾经类似的问题中找到构造的灵感.

（1）使用前提：所构造的函数、方程、图形等要合理，不能超越原题的条件限制.

（2）使用技巧：对于不等式、方程、函数问题常构造出新函数，对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

（3）常见问题：比较大小，函数与导数问题，不规则的几何体问题等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅲ] 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,且在 $(0,+\infty)$ 单调递减,则 （　　） A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$　　B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$ C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$　　D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$	根据题意可构造函数 $f(x)=-\|x\|$ (或构造函数 $f(x)=-x^2$ 等都可以),代入比较即可.选 C
[2019·全国卷Ⅲ] 如图 F5-1,点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心,$\triangle ECD$ 为正三角形,平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$,M 是线段 ED 的中点,则 （　　） A. $BM=EN$,且直线 BM,EN 是相交直线 B. $BM\neq EN$,且直线 BM,EN 是相交直线 C. $BM=EN$,且直线 BM,EN 是异面直线 D. $BM\neq EN$,且直线 BM,EN 是异面直线  图 F5-1	连接 BE,BD,则在 $\triangle BDE$ 中,BM,EN 为此三角形的两条中线,相交且不相等.选 B
[2018·全国卷Ⅱ] 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC=1$,$AA_1=\sqrt{3}$,则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 （　　） A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$	在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面 ABB_1A_1 的一侧再补填一个完全一样的长方体 $ABC_2D_2-A_1B_1B_2A_2$,研究 $\triangle AB_2D_1$ 即可.选 C
[2015·全国卷Ⅱ] 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数,$f(-1)=0$,当 $x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 （　　） A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$	根据题意构造新函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$,求导研究函数 $g(x)$ 的性质,进而得到答案.选 A

自测题

1. 已知 $0<b<a<1$,则在 a^b,b^a,a^a,b^b 中最大的是 （　　）
   A. b^a　　B. a^a　　C. a^b　　D. b^b
2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,$f(x)+2>f'(x)$,$f(0)=1$,则不等式 $\ln[f(x)+2]-\ln 3>x$ 的解集为 （　　）
   A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$
   C. $(-\infty,1)$　　D. $(1,+\infty)$
3. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$, $\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60°$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 （　　）
   A. 2　　B. $\sqrt{3}$
   C. $\sqrt{2}$　　D. 1
4. 已知正四面体 $ABCD$ 的外接球的体积为 $8\sqrt{6}\pi$,则这个正四面体的表面积为________.

思想篇
数学思想方法应用

思想一 函数与方程思想

函数思想是指用函数的观点、方法去分析问题、转化问题和解决问题.如求数列中的项或最值、不等式中的参量、解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，都可利用函数思想，转化为函数问题.

方程思想是从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为方程或方程组去分析问题和解决问题.如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式中的系数等问题.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅲ] 已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前4项和为15,且$a_5=3a_3+4a_1$,则$a_3=$ ( ) A. 16 B. 8 C. 4 D. 2	建立关于首项a_1与公比q的方程组,解得a_1和q后,再求a_3.选C
[2017·全国卷Ⅲ] 已知函数$f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$有唯一零点,则$a=$ ( ) A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1	函数$f(x)$有唯一零点,则方程$x^2-2x=-a(e^{x-1}+e^{-x+1})$有唯一实数解,构建函数$g(x)=e^{x-1}+e^{-x+1}$,$h(x)=x^2-2x$,则曲线$y=h(x)$与曲线$y=-ag(x)$有一个交点,进而求$a$的值.选C
[2018·天津卷] 已知$a>0$,函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a,x\leqslant 0,\\-x^2+2ax-2a,x>0.\end{cases}$若关于$x$的方程$f(x)=ax$恰有2个互异的实数解,则$a$的取值范围是________.	就x的取值范围分段处理方程$f(x)=ax$,得到两个含有参数a的关于x的方程,通过方程根的情况得出a的取值范围.答案:(4,8)
[2019·全国卷Ⅱ] $\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c.若$b=6,a=2c,B=\frac{\pi}{3}$,则$\triangle ABC$的面积为________.	利用余弦定理建立关于c的方程,求出c,再求面积.答案:$6\sqrt{3}$
[2016·全国卷Ⅲ] 已知$a=2^{\frac{4}{3}}$,$b=4^{\frac{2}{5}}$,$c=25^{\frac{1}{3}}$,则 ( ) A. $b<a<c$ B. $a<b<c$ C. $b<c<a$ D. $c<a<b$	构造幂函数$y=x^{\frac{2}{3}}$,利用函数的单调性判断.选A

自测题

1. 若$e^a+\pi^b\geqslant e^{-b}+\pi^{-a}$,e为自然对数的底数,则有 ( )
   A. $a+b\leqslant 0$ B. $a-b\geqslant 0$
   C. $a-b\leqslant 0$ D. $a+b\geqslant 0$
2. 已知数列$\{a_n\}$满足$tS_n=n^2-12n$,其中S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,若$a_1+a_3+a_5=42$,$a_2+a_4=28$,则当S_n取得最大值时,$n=$ ( )
   A. 7 B. 6 C. 5 D. 4
3. 已知点P是圆$C:x^2+(y-2)^2=1$上的动点,点Q是椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$上的动点,则$|PQ|$的最大值为 ( )
   A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}+1$ B. $\sqrt{13}+1$
   C. $2\sqrt{3}+1$ D. 4
4. 已知函数$f(x)=\frac{x\ln x+a}{x+1}$只有一个零点,则$a$的取值范围为 ( )
   A. $\left(-\frac{1}{e},0\right)$ B. $\left[-\frac{1}{e},0\right]$
   C. $(-\infty,0]\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$ D. $(-\infty,0)\cup\left\{\frac{1}{e}\right\}$

思想二 数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程的根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅰ] 关于函数$f(x)=\sin\|x\|+\|\sin x\|$有下述四个结论: ①$f(x)$是偶函数; ②$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递增; ③$f(x)$在$[-\pi,\pi]$有4个零点; ④$f(x)$的最大值为2. 其中所有正确结论的编号是 ( ) A. ①②④ B. ②④ C. ①④ D. ①③	易知函数$f(x)$为偶函数,所以只需画出$f(x)$在区间$[0,\pi]$上的图像,根据图像判断正误.选C

（续表）

示例	解法关键
[2018·全国卷Ⅰ] 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$,O 为坐标原点,F 为 C 的右焦点,过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M,N. 若△OMN 为直角三角形,则 $\|MN\|=$　　(　　) A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4	不妨设∠$OMF=90°$,由渐近线方程及图形可知,$\|OM\|=\|OF\|\cdot\cos 30°$,$\|MN\|=\|OM\|\cdot\tan 60°$. 选 B
[2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\leqslant 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点,则 a 的取值范围是　　(　　) A. $[-1,0)$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$	$g(x)$ 有 2 个零点等价于 $f(x)$ 的图像与直线 $y=-x-a$ 有 2 个不同的交点,作图求解. 选 C
[2017·全国卷Ⅱ] 已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形,P 为平面 ABC 内一点,则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是　　(　　) A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. -1	建立平面直角坐标系,将各点、各向量用坐标表示出来,通过向量的坐标运算求最小值. 选 B

自测题

1. 已知△ABC 为直角三角形,$AC=BC=2$,点 D 为斜边 AB 的中点,点 P 是线段 CD 上的动点,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为　　(　　)

A. -2　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 0

2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是减函数,且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,则不等式 $f(\log_4 x)>1$ 的解集为　　(　　)

A. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(\sqrt{2},+\infty)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\geqslant a,\\ -x,x<a,\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 存在零点,则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2,若双曲线右支上存在一点 M,使 $(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{F_2M}=0$($O$ 为坐标原点),且 $\|\overrightarrow{F_1M}\|=t\|\overrightarrow{F_2M}\|$,则实数 t 的值为　　(　　)

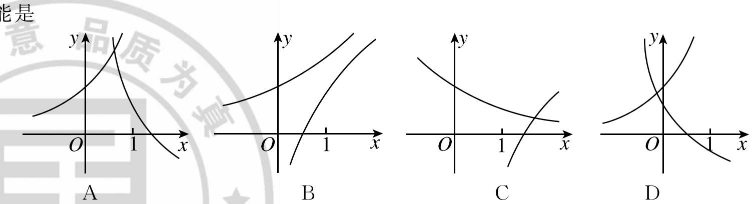
A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. 3　　D. $\sqrt{3}$

思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略. 使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，不重不漏，分类标准统一；三是明确分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种：1. 由概念引起的分类讨论；2. 由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；3. 由数学运算引起的分类讨论；4. 由图形的不确定性引起的分类讨论；5. 由参数的变化引起的分类讨论.

示例	解法关键
[2018·全国卷Ⅰ] 从 2 位女生、4 位男生中选 3 人参加科技比赛,且至少有 1 位女生入选,则不同的选法共有________种.(用数字填写答案)	分两类求解:3 人中 1 女 2 男;3 人中 2 女 1 男. 答案:16
[2019·浙江卷] 在同一直角坐标系中,函数 $y=\frac{1}{a^x}$,$y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$($a>0$,且 $a\neq 1$)的图像可能是　　(　　)  图 S3-1	分 $a>1$ 和 $0<a<1$ 两种情况进行讨论. 选 D
[2017·全国卷Ⅰ] 设 A,B 是椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点. 若 C 上存在点 M 满足∠$AMB=120°$,则 m 的取值范围是　　(　　) A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　　B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$ C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$	分焦点在 x 轴上和焦点在 y 轴上两种情况讨论. 选 A

（续表）

示例	解法关键
[2019·天津卷] 已知 $a\in\mathbf{R}$,设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a,x\leqslant 1,\\x-a\ln x,x>1.\end{cases}$若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则 a 的取值范围为 (　　) A. $[0,1]$　B. $[0,2]$　C. $[0,e]$　D. $[1,e]$	由选项可知 $a\geqslant 0$,所以可分 $0\leqslant a\leqslant 1$ 和 $a>1$ 两种情况讨论.选 C
[2016·全国卷Ⅲ] 在封闭的直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球.若 $AB\perp BC$,$AB=6$,$BC=8$,$AA_1=3$,则 V 的最大值是 (　　) A. 4π　B. $\frac{9\pi}{2}$　C. 6π　D. $\frac{32\pi}{3}$	分球与三棱柱的三个侧面相切和球与三棱柱的上、下两个底面相切进行讨论.选 B

自测题

1. 已知双曲线 E 的渐近线方程是 $y=\pm 2x$,则 E 的离心率为 (　　)

A. $\sqrt{2}$或 2　B. $\sqrt{5}$或$\frac{\sqrt{5}}{2}$　C. $\sqrt{5}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. 有 7 名大学生(4 男 3 女)分成两组进行夜跑,到达终点再会合,若要求女生不能单独成组,且每组最少 2 人,则不同的分组方法共有 (　　)

A. 52 种　B. 55 种　C. 104 种　D. 110 种

3. 若 $a>0$ 且 $a\neq 1$,则"$a^x>a^y$"是"$\log_a|x|>\log_a|y|$"的 (　　)

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1,x<1,\\x-2,x\geqslant 1,\end{cases}$若 $f(5a-2)>f(2a^2)$,则实数 a 的取值范围为________.

思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时,采用某种手段将问题转化,使问题得以解决的一种思维策略,其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题,将较难的问题化归为较简单的问题,将未能解决的问题化归为已经解决的问题.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在:将抽象函数问题转化为具体函数问题,立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题,"至少"或"是否存在"等正向思维受阻问题转化为逆向思维问题,空间与平面的转化,相等问题与不等问题的转化等.

示例	解法关键
[2019·全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在$[0,2\pi]$的零点个数为 (　　) A. 2　B. 3　C. 4　D. 5	函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在$[0,2\pi]$上的零点个数问题转化为函数 $h(x)=2\sin x$ 与 $g(x)=\sin 2x$ 在$[0,2\pi]$上的图像的交点个数问题.选 B
[2018·北京卷] 在平面直角坐标系中,记 d 为点$P(\cos\theta,\sin\theta)$到直线 $x-my-2=0$ 的距离.当 θ,m 变化时,d 的最大值为 (　　) A. 1　B. 2　C. 3　D. 4	P 为单位圆上一点,转化为圆心(定点)到动直线的距离,而动直线过定点,这样进一步转化为圆心与动直线所过定点间的距离问题.选 C
[2017·全国卷Ⅰ] 设 A,B 是椭圆 C:$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点.若 C 上存在点 M 满足$\angle AMB=120°$,则 m 的取值范围是 (　　) A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$ C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$	将椭圆上的点 M 取为短轴的一个端点去处理.选 A
[2016·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$的最大值为 (　　) A. 4　B. 5　C. 6　D. 7	将 $f(x)$转化为关于 $\sin x$ 的二次函数求最值.选 B

自测题

1. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(x+4)=f(x)$,当 $x\in(0,2)$时,$f(x)=x^2+\ln x$,则 $f(2019)=$ (　　)

A. -1　B. 0

C. 1　D. 2

2. 过原点 O 的直线 l 与椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于 M,N 两点,P 是椭圆 C 上异于 M,N 的任一点.若直线 PM,PN 的斜率之积为$-\frac{1}{3}$,则椭圆 C 的离心率为 (　　)

A. $\frac{2}{3}$　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　D. $\frac{1}{2}$

3. 已知正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AB=\sqrt{3}$,$AA_1=4$,若点 P 从点 A 出发,沿着正三棱柱的表面,经过棱 A_1B_1 运动到点 C_1,则点 P 运动的最短路程为________.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|,x>0,\\2-x^2,x\leqslant 0,\end{cases}$若函数 $g(x)=f(x)-kx$ 有 4 个零点,则实数 k 的取值范围是________.

自习篇
集合与常用逻辑用语、复数、算法框图与推理证明

自习一　集合

1. ［2019·全国卷Ⅰ］已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$，$N=\{x|x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$ (　　)
A. $\{x|-4<x<3\}$　　B. $\{x|-4<x<-2\}$
C. $\{x|-2<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$
2. 已知集合 $A=\{x|x^2<4\}$，$B=\{x|x<2-x\}$，则 $A\cup B=$ (　　)
A. $\{x|-2<x<2\}$　　B. $\{x|x<2\}$
C. $\{x|x>-1\}$　　D. $\{x|x>-2\}$
3. 设集合 $A=\{y|y=2^x-1\}$，$B=\{x|x\geqslant 1\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ (　　)
A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,1)$
C. $(-1,1)$　　D. $[1,+\infty)$
4. 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{(x,y)|y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则集合 $A\cap B$ 的子集个数为 (　　)
A. 1　　B. 2
C. 3　　D. 4
5. 已知集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|ax=1\}$，若 $B\subseteq A$，则由实数 a 的所有可能取值组成的集合为 (　　)
A. $\left\{1,\frac{1}{2}\right\}$　　B. $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$
C. $\left\{0,1,\frac{1}{2}\right\}$　　D. $\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$
6. 已知集合 $A=\{1,2\}$，集合 $B=\{0,2\}$，设集合 $C=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$，则下列结论中正确的是 (　　)
A. $A\cap C=\varnothing$　　B. $A\cup C=C$
C. $B\cap C=B$　　D. $A\cup B=C$

【考场点拨】

解决集合问题时要注意以下几点：(1)集合中元素的互异性；(2)不能忽略空集；(3)注意端点的取值；(4)理解代表元素的意义，如题 4 为点集，其他各题均为数集；(5)若 $A\subseteq B$，则 $A=B$ 也成立.

自习二　常用逻辑用语

1. 命题“$\forall x\in[0,+\infty)$，$e^x\geqslant 1+\sin x$”的否定是 (　　)
A. $\forall x\in[0,+\infty)$，$e^x<1+\sin x$
B. $\forall x\notin[0,+\infty)$，$e^x\geqslant 1+\sin x$
C. $\exists x_0\in[0,+\infty)$，$e^{x_0}<1+\sin x_0$
D. $\exists x_0\notin[0,+\infty)$，$e^{x_0}<1+\sin x_0$
2. 设 a,b 都是不等于 1 的正数，则“$\log_a 2<\log_b 2$”是“$2^a>2^b>2$”的 (　　)
A. 充要条件　　B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件
3. ［2019·北京卷］设函数 $f(x)=\cos x+b\sin x$(b 为常数)，则“$b=0$”是“$f(x)$为偶函数”的 (　　)
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件
4. ［2019·全国卷Ⅲ］记不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 6,\\2x-y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 命题 p：$\exists(x,y)\in D$，$2x+y\geqslant 9$；命题 q：$\forall(x,y)\in D$，$2x+y\leqslant 12$. 下面给出了四个命题
①$p\vee q$　　②$\neg p\vee q$
③$p\wedge\neg q$　　④$\neg p\wedge\neg q$
这四个命题中，所有真命题的编号是 (　　)
A. ①③　　B. ①②　　C. ②③　　D. ③④
5. 下列说法中错误的是 (　　)
A. 若 $p\vee q$ 为假命题，则 p 与 q 均为假命题
B. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m+1)$，$\boldsymbol{b}=(m,2)$，则“$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$”是“$m=1$”的充分不必要条件
C. 命题“若 $x^2-3x+2=0$，则 $x=1$”的逆否命题是“若 $x\neq 1$，则 $x^2-3x+2\neq 0$”
D. 命题“$\forall x\in(0,+\infty)$，$x-\ln x>0$”的否定是“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$x_0-\ln x_0\leqslant 0$”

【考场点拨】

求解简易逻辑问题的易失分点：(1)“A 是 B 的充分条件”与“A 的充分条件是 B”是不同的概念；(2)命题的否定与否命题是有区别的，“命题的否定”即“非 p”，只是否定命题 p 的结论；(3)全称或特称命题的否定，要否定结论并改变量词；(4)复合命题的真假判断依赖真值表.

自习三　复数

1. ［2019·全国卷Ⅲ］若 $z(1+i)=2i$，则 $z=$ (　　)
A. $-1-i$　　B. $-1+i$
C. $1-i$　　D. $1+i$
2. 复数 z 满足 $i\cdot z=2+i$(i 为虚数单位)，则 z 的共轭复数是 (　　)
A. $-1+2i$　　B. $-1-2i$
C. $1-2i$　　D. $1+2i$
3. ［2019·全国卷Ⅰ］设复数 z 满足 $|z-i|=1$，z 在复平面内对应的点为(x,y)，则 (　　)
A. $(x+1)^2+y^2=1$　　B. $(x-1)^2+y^2=1$
C. $x^2+(y-1)^2=1$　　D. $x^2+(y+1)^2=1$
4. 若 $\frac{5-3i}{1+2i}=m+ni$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，则 $m-n=$ (　　)
A. $\frac{14}{5}$　　B. $\frac{12}{5}$　　C. $-\frac{12}{5}$　　D. $-\frac{14}{5}$
5. 已知复数 $z=\frac{1+ai}{1+2i}$($a\in\mathbf{R}$)为纯虚数，则 $a=$ (　　)
A. 2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$
6. 已知 $z=1-i^{2019}$，则 $|z+2i|=$ (　　)
A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【考场点拨】

(1)复数运算的重点是除法运算，其关键是进行分母实数化.

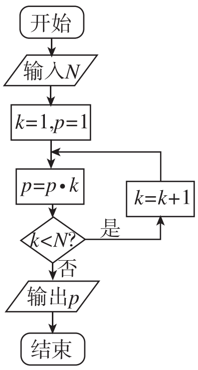
(2)对一些常见的运算,如$(1\pm i)^2=\pm 2i$,$\frac{1+i}{1-i}=i$,$\frac{1-i}{1+i}=-i$等要熟记.

(3)利用复数相等$a+bi=c+di$列方程时,注意$a,b,c,d\in\mathbf{R}$的前提条件.

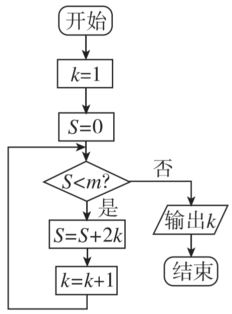
自习四　算法框图

1. 执行如图Z4-1所示的程序框图,若输入的N是7,则输出p的值是　(　　)

A. 720　B. 120　C. 5040　D. 1440



图Z4-1



图Z4-2

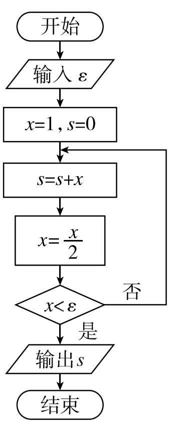
2. 执行如图Z4-2所示的程序框图,若输出的结果是7,则判断框内m的取值范围是　(　　)

A. (30,42)　B. (30,42]

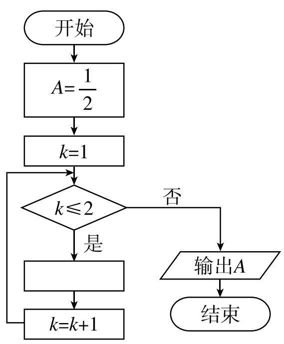
C. (42,56]　D. (42,56)

3. [2019·全国卷Ⅲ] 执行图Z4-3的程序框图,如果输入的ε为0.01,则输出s的值等于　(　　)

A. $2-\frac{1}{2^4}$　B. $2-\frac{1}{2^5}$　C. $2-\frac{1}{2^6}$　D. $2-\frac{1}{2^7}$



图Z4-3



图Z4-4

4. [2019·全国卷Ⅰ] 图Z4-4是求$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$的程序框图,图中空白框中应填入　(　　)

A. $A=\frac{1}{2+A}$　B. $A=2+\frac{1}{A}$

C. $A=\frac{1}{1+2A}$　D. $A=1+\frac{1}{2A}$

【考场点拨】

程序框图易失分点:(1)不明确循环结构程序框图的真正含义;(2)对于循环结构的程序框图,循环体执行的次数是这类题的易错之处,当循环次数不多时,可以逐次列举,当循环次数很多时,就要注意找规律;(3)不明确循环结构的终止条件.

自习五　推理证明

1. [2019·全国卷Ⅱ] 在“一带一路”知识测验后,甲、乙、丙三人对成绩进行预测.

甲:我的成绩比乙高.

乙:丙的成绩比我和甲的都高.

丙:我的成绩比乙高.

成绩公布后,三人成绩互不相同且只有一个人预测正确,那么三人按成绩由高到低的次序为　(　　)

A. 甲、乙、丙

B. 乙、甲、丙

C. 丙、乙、甲

D. 甲、丙、乙

2. [2017·全国卷Ⅱ] 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩.老师说:你们四人中有2位优秀,2位良好,我现在给甲看乙、丙的成绩,给乙看丙的成绩,给丁看甲的成绩.看后甲对大家说:我还是不知道我的成绩.根据以上信息,则　(　　)

A. 乙可以知道四人的成绩

B. 丁可以知道四人的成绩

C. 乙、丁可以知道对方的成绩

D. 乙、丁可以知道自己的成绩

3. 已知甲、乙、丙、丁四名学生中,仅有一人阅读了语文老师推荐的某篇文章.当他们被问到谁阅读了该篇文章时,甲说:“丙或丁阅读了”;乙说:“丙阅读了”;丙说:“甲和丁都没有阅读”;丁说:“乙阅读了”.假设这四名学生中只有两人说的是对的,那么读了该篇文章的学生是　(　　)

A. 甲　B. 乙

C. 丙　D. 丁

4. 将正奇数按如下所示的规律排列:

1

3　5　7

9　11　13　15　17

19　21　23　25　27　29　31

……

则数字2019的位置为第________行,从左向右第________个数.

【考场点拨】

(1)归纳推理是从特殊到一般的推理,所以应根据题中所给的现有图形、数据、结构等着手分析,尽可能多列举出来,从而找出一般性的规律或结论.

(2)演绎推理是从一般性的原理出发,推出某个特殊情况下的结论.对于较复杂的证明题常常要由几个三段论才能完成.

01 模块一

函数与导数

第 1 讲　函数的图像与性质

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. [2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在$[-\pi,\pi]$的图像大致为　(　　)

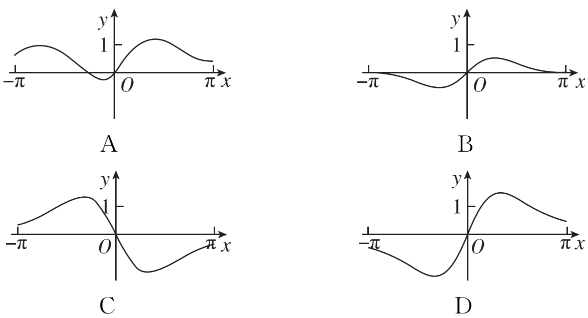


图 M1-1-1

[试做]

2. [2018·全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$是定义域为$(-\infty,+\infty)$的奇函数,满足 $f(1-x)=f(1+x)$.若$f(1)=2$,则$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$　(　　)

A. -50　　B. 0　　C. 2　　D. 50

[试做]

3. (1)[2016·全国卷Ⅱ] 已知函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数$y=\dfrac{x+1}{x}$与 $y=f(x)$图像的交点为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$　(　　)

A. 0　　B. m　　C. $2m$　　D. $4m$

(2)[2017·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$,则　(　　)

A. $f(x)$在$(0,2)$单调递增

B. $f(x)$在$(0,2)$单调递减

C. $y=f(x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$的图像关于点$(1,0)$对称

[试做]

方法　函数图像识图问题

1. 利用函数性质(奇偶性、周期性、对称性等)确定函数图像的对称轴或对称中心;

2. 利用特殊点排除一些错误选项;

3. 利用 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$,或 $x\to x_0$ 来观察函数值的变化规律,确定图像的局部特征.

注:利用导数也可以判断函数的单调性

结论　函数的周期性

1. 若函数满足 $f(x+T)=f(x)$,由函数周期性的定义可知 T 是函数 $f(x)$的一个周期;

2. 若函数满足 $f(x+a)=-f(x)$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期;

3. 若函数满足 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期;

4. 若函数满足 $f(x+a)=-\dfrac{1}{f(x)}$,则 $2a$ 是函数 $f(x)$的一个周期.

结论　函数图像的对称中心或对称轴

1. 若函数 $f(x)$满足关系式 $f(a+x)=2b-f(a-x)$,则函数 $y=f(x)$的图像关于点(a,b)对称;

2. 若函数 $f(x)$满足关系式 $f(a+x)+f(b-x)=c$,则函数 $y=f(x)$的图像关于点$\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$对称;

3. 若函数 $f(x)$满足关系式 $f(a+x)=f(a-x)$,则函数 $y=f(x)$的图像关于直线$x=a$ 对称;

4. 若函数 $f(x)$满足关系式 $f(a+x)=f(b-x)$,则函数 $y=f(x)$的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$对称.

4. (1)[2017·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$的单调递增区间是 ( )

A. $(-\infty,-2)$ B. $(-\infty,1)$ C. $(1,+\infty)$ D. $(4,+\infty)$

(2)[2019·全国卷Ⅲ] 设 $f(x)$是定义域为 **R** 的偶函数,且在$(0,+\infty)$单调递减,则 ( )

A. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)$ B. $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)$

C. $f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$ D. $f\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)>f\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$

(3)[2019·全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$是奇函数,且当 $x<0$ 时,$f(x)=-e^{ax}$. 若 $f(\ln 2)=8$,则 $a=$________.

[试做]

5. [2017·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递减,且为奇函数. 若 $f(1)=-1$,则满足$-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[-2,2]$ B. $[-1,1]$ C. $[0,4]$ D. $[1,3]$

[试做]

结论 函数的单调性与奇偶性

1. 增函数+增函数→增函数;
减函数+减函数→减函数;
增函数-减函数→增函数;
减函数-增函数→减函数.
2. 复合函数单调性判断:同增异减.
3. 两函数的积的奇偶性判断:
(1)两个奇函数的积是偶函数,两个偶函数的积是偶函数;
(2)一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数;
(3)一个奇函数或偶函数的绝对值是偶函数.

方法 抽象函数不等式

1. 解抽象函数不等式的依据是单调性的定义;
2. 应将抽象函数不等式变形为类似于 $f(x_1)>f(x_2)$的形式,结合单调性转化为常规不等式 $x_1>x_2$(或 $x_1<x_2$).

K 考点考法探究

核心考点全面提升 题型、考法、思维强化

小题 1 函数的概念与表示

例 1 (1)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2+1}{x},x<0,\\ 2^{x+1},x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=x^2-x-2$,设 b 为实数,若存在实数 a,使得 $g(b)+f(a)=2$ 成立,则 b 的取值范围为 ( )

A. $[-1,2]$ B. $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

C. $\left[-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right]$ D. $\left(-\frac{3}{2},4\right]$

(2)已知函数 $f(x)=\log_2 x$,$g(x)=2x+a$,若存在 $x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $[-5,0]$ B. $(-\infty,-5]\cup[0,+\infty)$

C. $(-5,0)$ D. $(-\infty,-5)\cup(0,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集,值域等于各段函数值域的并集.

(2)对于函数 $f(x)$,$g(x)$,若存在 $x_1,x_2\in D$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,则转化为在集合 D 上函数 $f(x)$,$g(x)$的值域 A,B 的交集非空,即 $A\cap B\neq\varnothing$;若存在 $x_1,x_2\in D$,使得 $f(x_1)>g(x_2)$,则转化为 $f(x)_{\max}>g(x)_{\min}$;若对任意 $x_1,x_2\in D$,$f(x_1)>g(x_2)$恒成立,则转化为 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$.

【自我检测】

1. 若函数 $f(x)=\log_2(x-1)+\sqrt{2-x}$,则函数 $f\left(\frac{x}{2}\right)$的定义域为 ( )

A. $(1,2]$ B. $(2,4]$ C. $[1,2)$ D. $[2,4)$

2. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+6(x\leqslant 0),\\ -x+6(x>0),\end{cases}$则不等式 $f(x)<f(-1)$的解集是 ( )

A. $(-3,-1)\cup(3,+\infty)$

B. $(-3,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(-1,3)$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x>0,\\ -x^2-2x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$若 $f[f(a)]=4$,则 $a=$________.

4. 已知函数 $f(x)$满足 $f(x-a)=x^3+1$,且对任意实数 x 都有 $f(x)+f(2-x)=2$,则 $f(0)$的值为________.

小题 2 函数的性质及应用

例 2 (1)已知定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,且 $f(1)=-1$,若 $f(2x-1)\geqslant -1$,则 x 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1]$ B. $[1,+\infty)$

C. $[0,1]$ D. $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

(2)已知函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+6)+f(x)=0$，$y=f(x-1)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，且 $f(-3)=4$，则 $f(2019)=$ （　　）

A. 0　　B. -4　　C. -8　　D. -16

［听课笔记］

【考场点拨】

高考常考函数几个性质的应用：

(1)奇偶性：具有奇偶性的函数在关于原点对称的区间上其图像、函数值、解析式和单调性联系密切，研究问题时可以转化到部分(一般为一半)区间上研究，注意偶函数常用结论 $f(x)=f(|x|)$，也需注意试题中奇函数的性质不是直接给出的情况；

(2)单调性：可以比较大小、求函数最值、解不等式、证明方程根的唯一性；

(3)周期性：利用周期性可以转化函数的解析式、图像和性质，把不在已知区间上的问题转化到已知区间上求解；

(4)对称性：常围绕对称中心设置试题背景，利用对称中心的性质简化所求问题.

【自我检测】

1. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}2^x, x>1,\\ 2x, 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $\dfrac{f(-2)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}=$ （　　）

A. 4　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. -4　　D. $-\dfrac{1}{4}$

2. 如果对任意的实数 x，函数 $f(x)$ 都满足 $f(x)=f(1-x)$，且当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=\log_2(3x-1)$，那么函数 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的最大值为 （　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+5)=f(x-3)$，如果当 $x\in[0,4)$ 时，$f(x)=\log_2(x+2)$，那么 $f(766)=$ （　　）

A. 3　　B. -3　　C. -2　　D. 2

4. 已知对任意实数 x，函数 $f(x)$ 都满足 $f(-x)=f(x)$，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x-\sin x$，若实数 a 满足 $f(\log_2 a)<f(1)$，则 a 的取值范围是________.

小题 3　函数的图像及应用

例 3 (1)［2019·全国卷Ⅲ］函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图像大致为 （　　）

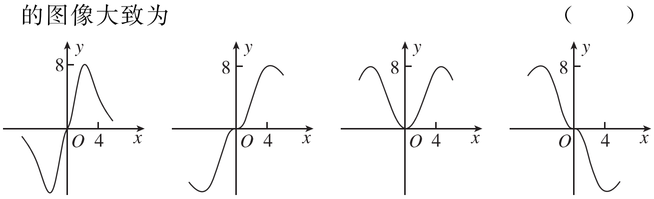


图 M1-1-2

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\leqslant 0,\\ -x^2-3x, x>0,\end{cases}$ 若不等式 $|f(x)|\geqslant mx-2$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 （　　）

A. $[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$

B. $[0,3-2\sqrt{2}]$

C. $(3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2})$

D. $[0,3+2\sqrt{2}]$

［听课笔记］

【考场点拨】

(1)确定函数图像的主要方法是利用函数的性质，如定义域、奇偶性、单调性等，特别是利用一些特征点排除不合要求的图像.(2)函数图像的应用主要体现为数形结合思想，借助于函数图像的特点和变化规律，求解有关不等式恒成立、最值、交点、方程的根等问题.求解两个函数图像在给定区间上的交点个数问题时，可以先画出已知函数完整的图像，再观察.

【自我检测】

1. 函数 $y=\dfrac{\ln x^4}{x}$ 的图像大致是 （　　）

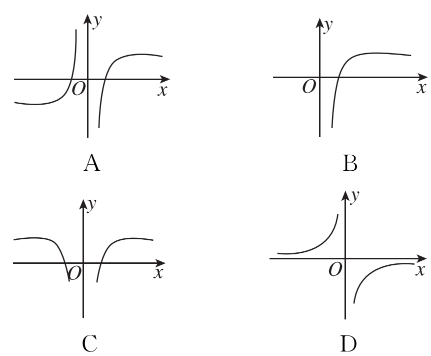


图 M1-1-3

2. 如图 M1-1-4 所示的函数图像对应的函数解析式可能是 （　　）

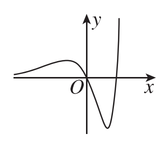


图 M1-1-4

A. $y=2^x-x^2-1$

B. $y=2x\sin x$

C. $y=\dfrac{x}{\ln x}$

D. $y=(x^2-2x)e^x$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x\leqslant 0,\\ |\log_2 x|, x>0,\end{cases}$ 若方程 $f(x)=a$ 有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_3(x_1+x_2)+\dfrac{1}{x_3^2x_4}$ 的取值范围为 （　　）

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-1,1]$

C. $(-\infty,1)$　　D. $[-1,1)$

请完成 限时集训(一)

第2讲　基本初等函数、函数与方程

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 已知 $a=\log_2 0.2, b=2^{0.2}, c=0.2^{0.3}$，则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

(2)[2019·全国卷Ⅱ] 若 $a>b$，则 (　　)

A. $\ln(a-b)>0$　　B. $3^a<3^b$

C. $a^3-b^3>0$　　D. $|a|>|b|$

(3)[2018·全国卷Ⅲ] 设 $a=\log_{0.2}0.3, b=\log_2 0.3$，则 (　　)

A. $a+b<ab<0$　　B. $ab<a+b<0$

C. $a+b<0<ab$　　D. $ab<0<a+b$

(4)[2017·全国卷Ⅰ] 设 x,y,z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则 (　　)

A. $2x<3y<5z$　　B. $5z<2x<3y$

C. $3y<5z<2x$　　D. $3y<2x<5z$

[试做]

方法　比较大小

1. 关键一：将待比较数或式化为同底数、同指数或同真数，再比较；

关键二：利用指数函数、对数函数和幂函数的单调性比较大小；

关键三：利用中间值0或1等进行比较.

2. 注意底数 $a(0<a<1, a>1)$ 取值不同，单调性不同.

2. (1)[2017·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a=$ (　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

(2)[2014·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)$　　D. $(-\infty,-1)$

[试做]

方法　含参函数有唯一零点的问题

1. 关键一：观察函数图像是否具有某种对称性；

关键二：求出 $f'(x)$，根据 $f(x)$ 的单调性画出函数 $f(x)$ 的大致图像；

关键三：分离参数，注意验证 $x=0$ 是否是零点；

关键四：数形结合法，对解析式进行变形，转化为两个函数的图像有一个交点.

2. 含参数的问题注意分类讨论.

3. [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\le 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$ 存在2个零点，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,0)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

[试做]

方法　根据函数零点（方程的根）求参

1. 直接法：直接根据题设条件构建关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围；

2. 分离参数法：先将参数分离，再转化成求函数值域问题加以解决；

3. 数形结合法：先对解析式变形，转化为两函数图像的交点问题，在同一平面直角坐标系中画出函数的图像，数形结合求解.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题1　基本初等函数的图像与性质

例1 (1)[2019·天津卷] 已知 $a=\log_5 2, b=\log_{0.5}0.2, c=0.5^{0.2}$，则 a,b,c 的大小关系为 (　　)

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

(2)设函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$，则使 $f(2x)>f(x+1)$ 成立的 x 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1)$

B. $(1,+\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$

D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

基本初等函数的图像与性质是解决所有函数问题的基础,并且要掌握由基本初等函数所构成的组合函数或复合函数的单调性、奇偶性等的一些判断方法.

【自我检测】

1. 已知 $a=2^{1.2}$,$b=2\log_5 2$,$c=\ln\frac{1}{3}$,则 ( )

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

2. 若函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的图像与函数 $y=g(x)$ 的图像关于原点对称,则 ( )

A. $g(x)=\log_2(1-x)$　　B. $g(x)=-\log_2(x+1)$

C. $g(x)=-\log_2(x-1)$　　D. $g(x)=-\log_2(1-x)$

3. 函数 $f(x)=\ln(x^2+2)-e^{x-1}$ 的大致图像可能是 ( )

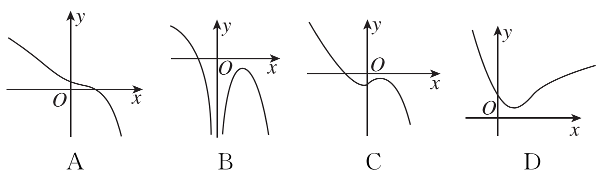


图 M1-2-1

4. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}-\sqrt[3]{x^2}$,若 $f(2a-1)>f(3)$,则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　B. $(-1,2)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2)$

小题 2　函数的零点

角度 1　涉及到函数性质的零点问题

例 2 (1)已知函数 $f(x)=\ln x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+a$ 有唯一的零点 x_0,且 $x_0\in(2,3)$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{1}{4}-\ln 3,\frac{1}{2}-\ln 2\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}-\ln 3,\frac{1}{4}-\ln 2\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}+\ln 2,\frac{1}{4}+\ln 3\right)$

D. $\left(\frac{1}{4}+\ln 2,\frac{1}{3}+\ln 3\right)$

(2)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(x+2)=f(-x)$.当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=2^x-1$,则函数 $g(x)=(x-2)f(x)-1$ 在区间 $[-3,6]$ 上的所有零点之和为 ( )

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

[听课笔记]

【考场点拨】

与函数性质有关的零点问题,一般有两种类型:一是函数在定义域内是单调函数,这样的函数最多只有一个零点,可以利用零点存在性定理求解;二是与单调性、周期性、奇偶性、对称性等性质相结合,一般采用数形结合法,即把函数的零点问题等价地转化为两个函数图像的交点问题,通过判断交点的个数得出函数零点的个数,或根据零点的个数求参数.

【自我检测】

1. 设方程 $\lg(x-1)+x-3=0$ 的根为 x_0,$[x_0]$ 表示不超过 x_0 的最大整数,则 $[x_0]=$ ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

2. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且 $f(x+\pi)=f(x)$,当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)=\sin x$,则函数 $y=f(x)-\lg|x|$ 的零点个数是 ( )

A. 12　　B. 10

C. 6　　D. 5

3. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)+f(3-x)=0$,且 $f(1)\neq 0$,若函数 $g(x)=-x^6+f(1)\cdot\cos 4x-3$ 有唯一的零点,则 $f(2019)=$ ( )

A. 1　　B. -1

C. -3　　D. 3

角度 2　复合函数或分段函数中的零点问题

例 3 (1)设函数 $f(x)=\begin{cases}1,x=2,\\ \log_a|x-2|+1,x\neq 2\end{cases}(a>1)$,若函数 $g(x)=[f(x)]^2+bf(x)+c$ 有三个不同的零点 x_1,x_2,x_3,则 $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=$ ( )

A. 12　　B. 11

C. 6　　D. 3

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,x\geqslant 0,\\ x+2,x<0,\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-a$ 有两个不同的零点,则实数 a 的取值范围是________.

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)已知分段函数的零点的个数求参数的取值范围或讨论零点性质时,要根据各段函数图像的特点进行判断;(2)有关复合函数 $g[f(x)]$ 的零点问题,内层函数 $f(x)$ 的值域是关键,一般用换元法设 $t=f(x)$ 转化为 $y=g(t)$ 进行求解.

【自我检测】

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1),x>1,\\ 2^{x-1}-1,x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的零点个数为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 若函数 $f(x)=2^{|x|}-k$ 存在零点,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $k<0$　　B. $k\geqslant 0$

C. $k<1$　　D. $k\geqslant 1$

3. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\ln(x+a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在零点,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left(-\infty,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　B. $(-\infty,\mathrm{e})$

C. $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right)$　　D. $\left(-\mathrm{e},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^x,x\leqslant 0,\\2-|x-1|,x>0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有两个不同的零点 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=$ (　　)

A. 2　　B. 2 或 $2+\frac{1}{\mathrm{e}}$

C. 2 或 3　　D. 2 或 3 或 $2+\frac{1}{\mathrm{e}}$

小题 3　函数建模与信息题

例 4 (1)对于函数 $f(x)$,若存在实数 m,使得 $g(x)=f(x+m)-f(m)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,则称 $f(x)$ 是位差值为 m 的"位差奇函数".给出下列三个函数:

①$f(x)=2x+1$;②$f(x)=x^2-2x+1$;③$f(x)=2^x$.

其中是"位差奇函数"的有 (　　)

A. 0 个　B. 1 个　C. 2 个　D. 3 个

(2)在一定的储存温度范围内,某食品的保鲜时间 y(单位:h)与储存温度 x(单位:℃)满足函数关系 $y=\mathrm{e}^{kx+b}$($\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$为自然对数的底数,$k,b$ 为常数),若该食品在 0 ℃时的保鲜时间为 120 h,在 30 ℃时的保鲜时间为15 h,则该食品在 20 ℃时的保鲜时间为 (　　)

A. 30 h　　B. 40 h

C. 50 h　　D. 80 h

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)构建函数模型解决实际问题的失分点:①不能选择相应变量得到函数模型;②构建的函数模型有误;③忽视函数模型中变量的实际意义.

(2)解决新概念信息题的关键是:①依据新概念进行分析;②有意识地运用转化思想,将新问题转化为我们所熟知的问题.

【自我检测】

1. 我国古代数学著作《孙子算经》中记载:"今有三人共车,二车空;二人共车,九人步.问:人与车各几何?"其大意是:"每车坐 3 人,有 2 辆车空出来;每车坐 2 人,多出 9 人步行.问人数和车辆数各是多少?"该问题中的车辆数为 (　　)

A. 12　　B. 14

C. 15　　D. 18

2. 已知 $M=\{\alpha|f(\alpha)=0\}$,$N=\{\beta|g(\beta)=0\}$,若存在 $\alpha\in M$,$\beta\in N$,使得 $|\alpha-\beta|<n$,则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为"n 度零点函数".若 $f(x)=3^{2-x}-1$ 与 $g(x)=x^2-a\mathrm{e}^x$ 互为"1 度零点函数",则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2},\frac{4}{\mathrm{e}}\right]$　　B. $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{4}{\mathrm{e}^2}\right]$

C. $\left[\frac{4}{\mathrm{e}^2},\frac{2}{\mathrm{e}}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^3},\frac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$

3. 某种物质在经过时间 t(单位:min)后的浓度为 M(单位:mg/L),M 与 t 满足函数关系 $M=ar^t+24$(a,r 为常数).当 $t=0$ min 和 $t=1$ min 时测得该物质的浓度分别为 124 mg/L和 64 mg/L,当 $t=4$ min 时,该物质的浓度为________mg/L;若该物质的浓度小于 24.001 mg/L,则最小的整数 t 的值为________.(参考数据:lg 2≈0.3)

请完成 **限时集训(二)**

第 3 讲　不等式

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·浙江卷] 设 $a>0,b>0$,则"$a+b\leqslant 4$"是"$ab\leqslant 4$"的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(2)[2019·天津卷] 设 $x>0,y>0,x+2y=5$,则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为________.

[试做]

方法　利用基本不等式求最值

1. 确定定值式(已知条件中是和为定值还是积为定值);

2. 将待求式变形,利用基本不等式求最值.

2. (1)[2018·全国卷Ⅱ] 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0,\\ x-2y+3\geqslant 0,\\ x-5\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为________.

(2)[2019·全国卷Ⅱ] 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-6\geqslant 0,\\ x+y-3\leqslant 0,\\ y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的最大值是________.

[试做]

方法　求线性目标函数的最值

1. 直线定界，特殊点定域；
2. 在目标函数 $z=ax+by$ 中，若 $b>0$，则截距 $\frac{z}{b}$ 取最大值，z 取最大值，若 $b<0$，则截距 $\frac{z}{b}$ 取最大值，z 取最小值；
3. 注意可行域是否包含边界，线性目标函数的最值一般在可行域的顶点或边界处取得.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　不等式的性质及解法

例 1　(1)若 $p>1,0<m<n<1$，则下列不等式正确的是（　　）

A. $\left(\frac{m}{n}\right)^p>1$　　B. $\frac{p-m}{p-n}<\frac{m}{n}$

C. $m^{-p}<n^{-p}$　　D. $\log_m p>\log_n p$

(2)已知 $f(x)=-2x^2+bx+c$，不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,3)$. 若对任意的 $x\in[-1,0]$，$f(x)+m\geqslant 4$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-\infty,4]$

C. $[2,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)判断不等式是否成立主要从以下几个方面着手：①利用不等式的性质直接判断；②构造函数，利用函数的单调性判断；③利用特殊值判断.

(2)求解含参不等式 $ax^2+bx+c<0$ 恒成立问题的易失分点：①对参数进行讨论时分类不完整；②不会通过转换把参数作为主元进行求解；③不考虑 a 的符号.

【自我检测】

1. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，给出下列条件：① $a^2>b^2$；② $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；③ $ac^2>bc^2$，则使得 $a>b$ 成立的充分不必要条件是（　　）

A. ①　　B. ②

C. ③　　D. ①②③

2. 已知 $0<a<1,0<c<b<1$，下列不等式成立的是（　　）

A. $a^b>a^c$　　B. $\frac{c}{b}>\frac{c+a}{b+a}$

C. $\log_b a<\log_c a$　　D. $\frac{b}{b+a}>\frac{c}{c+a}$

3. 若关于 x 的不等式 $(a^2-4)x^2+(a+2)x-1\geqslant 0$ 的解集不是空集，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(-2,\frac{6}{5}\right]$

B. $\left[-2,\frac{6}{5}\right]$

C. $(-\infty,-2)\cup\left[\frac{6}{5},+\infty\right)$

D. $(-\infty,-2]\cup\left[\frac{6}{5},+\infty\right)$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3\left(x<\frac{1}{2}\right),\\ \frac{1}{x}\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right),\end{cases}$ 则不等式 $x^2f(x)+x-2\leqslant 0$ 的解集是________.

小题 2　基本不等式及其应用

例 2　(1)若曲线 $y=x^3-2x^2+2$ 在点 A 处的切线方程为 $y=4x-6$，且点 A 在直线 $mx+ny-1=0$(其中 $m>0,n>0$)上，则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3+2\sqrt{2}$

C. $6+4\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{2}$

(2)已知 $a>2b(a,b\in\mathbf{R})$，函数 $f(x)=ax^2+x+2b$ 的值域为 $[0,+\infty)$，则 $\frac{a^2+4b^2}{a-2b}$ 的最小值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用基本不等式求最值时需注意：

(1)不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 成立的条件是 $a>0,b>0$，而不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 对任意实数 a,b 都成立，因此在使用时要注意其前提条件；

(2)多次使用基本不等式时，注意考虑等号是不是能同时取到；

(3)对于 $x+\frac{a}{x}(x>0,a>0)$ 型不等式，不能简单地利用 $x+\frac{a}{x}\geqslant 2\sqrt{a}$，而是要判断 x 的取值范围能否取到最小值 $2\sqrt{a}$，若不能，需要利用函数的单调性计算其最小值.

【自我检测】

1. 已知 $f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+1}(x>-1)$，则 $f(x)$ 的最小值是　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 若实数 x,y 满足 $2^x+2^y=1$，则 $x+y$ 的最大值是　(　　)

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

3. 设 $x>0,y>0,x+y=5$，则 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y+1}$ 的最小值为________.

小题 3　线性规划问题

例3 (1)若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y\geqslant 0,\\ x+2y-2\geqslant 0,\\ y-1\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=\frac{y}{x}$ 的最大值为　(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

(2)已知实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\ x+y\geqslant 2,\\ y\leqslant a,\end{cases}$ 若 $z=2x-y$ 的最大值为 5，则 $a=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)目标函数是非线性形式时，常考虑其几何意义.(2)含参数的线性规划问题，参数位置一般有两种形式：一是目标函数中含有参数，这时可以准确作出可行域，这类问题的一般特征是其最优解是可知的，因此解题时可充分利用目标函数的斜率特征加以转化；二是在约束条件中含参，可行域的边界线中有一条是动态的，所以要充分依据目标函数及最值等条件数形结合处理，有时还需分类讨论.

【自我检测】

1. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y\leqslant 1,\\ x+2y\leqslant 1,\\ 3x+y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x-y$ 的取值范围为　(　　)

A. $\left[-\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right]$　　B. $\left[-\frac{7}{5},-\frac{1}{5}\right]$

C. $\left[\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right]$　　D. $\left[\frac{1}{5},\frac{8}{5}\right]$

2. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-4\leqslant 0,\\ y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2^{-2x+y}$ 的最大值为　(　　)

A. $\frac{1}{32}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

3. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y\geqslant -1,\\ y\leqslant x-1,\\ x+y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x^2+y^2$ 的最小值是________.

请完成　限时集训(三)

第 4 讲　导数的简单应用及定积分

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·全国卷Ⅲ] 已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点 $(1,ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则　(　　)

A. $a=e,b=-1$　　B. $a=e,b=1$

C. $a=e^{-1},b=1$　　D. $a=e^{-1},b=-1$

(2)[2019·全国卷Ⅰ] 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(3)[2016·全国卷Ⅱ] 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$________.

[试做]

结论　导数的几何意义

1. 函数在某点的导数即曲线在该点处的切线的斜率；
2. 曲线在某点的切线与曲线过某点的切线不同；
3. 切点既在切线上，又在曲线上.

2. (1)[2016·全国卷Ⅰ] 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$单调递增，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

(2)[2017·全国卷Ⅱ] 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为 (　　)

A. -1　　B. $-2e^{-3}$　　C. $5e^{-3}$　　D. 1

(3)[2018·全国卷Ⅰ] 已知函数$f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$的最小值是________.

(4)[2018·江苏卷] 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$在$(0,+\infty)$内有且只有一个零点，则 $f(x)$在$[-1,1]$上的最大值与最小值的和为________.

[试做]

结论　导数与函数的单调性、极值、最值

1. 函数 $y=f(x)$在点 x_0 处取得极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 左侧与右侧 $f'(x)$的符号不同.

2. 若 $f(x)$在区间(a,b)内是单调函数，则 $f(x)$在区间(a,b)内一定没有极值.

3. 求 $y=f(x)$的最值步骤：

(1)求导；

(2)求 $f'(x)=0$ 的根；

(3)检查导数为 0 的点左右两侧的导数符号，求极值点；

(4)将极值点与区间端点代入求最值.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　导数的几何意义及应用

例 1　(1)已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点$(1,1)$处的切线与抛物线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 a 的值为 (　　)

A. 0　　B. 0 或 8

C. 8　　D. 1

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2,x\leqslant 1,\\ \ln x,x>1,\end{cases}$若方程 $f(x)=kx-\frac{1}{2}$恰有四个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是(　　)

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$　　B. $(2,e)$

C. $(\sqrt{e},2)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\sqrt{e}\right)$

[听课笔记]

【考场点拨】

应用导数的几何意义解题时应注意：(1)注意 $f'(x)$与 $f'(x_0)$的区别与联系，$f'(x_0)$表示导函数 $f'(x)$在 $x=x_0$ 处的函数值，是一个常数；(2)函数在某点处的导数值就是对应曲线在该点处切线的斜率；(3)切点既在原函数的图像上也在切线上.

【自我检测】

1. 若直线 $y=\frac{5}{2}x$ 与曲线 $y=mx-\ln(2x+1)$相切于点 $O(0,0)$，则 $m=$ (　　)

A. 0　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{9}{2}$

2. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x^3-2x-m$，则曲线 $y=f(x)$在点 $P(2,f(2))$处的切线斜率为 (　　)

A. 10　　B. -10

C. 4　　D. 与 m 的取值有关

3. 已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{2x}$. 若曲线 $y=f(x)$存在两条过$(1,0)$点的切线，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

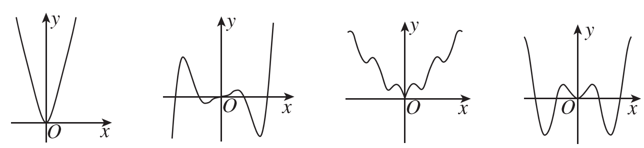
C. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

4. 设函数 $f(x)=-e^x-x$ 的图像上任意一点处的切线为 l_1，若函数 $g(x)=ax+\cos x$ 的图像上总存在一点，使得在该点处的切线 l_2 满足 $l_1\perp l_2$，则 a 的取值范围是________.

小题 2　与导数有关的函数图像问题

例 2　(1)函数 $f(x)=x^2+x\sin x$ 的图像大致为 (　　)



A　　B　　C　　D

图 M1-4-1

(2)已知某个函数的部分图像如图 M1-4-2 所示，则这个函数的解析式可能是 (　　)

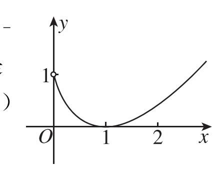


图 M1-4-2

A. $y=x\ln x+x-1$

B. $y=x\ln x-x+1$

C. $y=\frac{\ln x}{x}-x+1$

D. $y=-\frac{\ln x}{x}+x-1$

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数判断函数的图像，主要是在仅通过函数的定义域、值域、奇偶性等性质难以确定函数图像的情况下，通过对函数求导，分析函数的单调性、零点、极值等，充分展现函数图像的变化规律，达到判断函数图像的目的.

【自我检测】

1. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}$ 的大致图像为　　(　　)

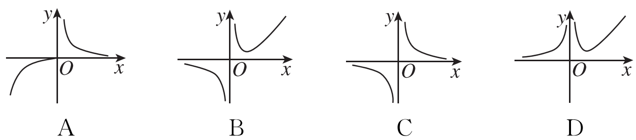


图 M1-4-3

2. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$，若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，则函数 $y=-xf'(x)$ 的图像可能是　　(　　)

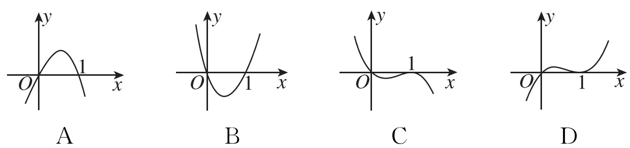


图 M1-4-4

小题 3　利用导数研究函数的单调性

例 3　(1)已知 $a=\ln\sqrt[3]{3}$，$b=e^{-1}$，$c=\dfrac{3\ln 2}{8}$，则 a,b,c 的大小关系为　　(　　)

A. $b<c<a$　　B. $b>c>a$

C. $a>b>c$　　D. $b>a>c$

(2)若函数 $f(x)=e^{2x}-ax^2+1$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left[\dfrac{e^4}{4},+\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{e^4}{4},+\infty\right)$

C. $\left[\dfrac{e^4}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{e^4}{2},+\infty\right)$

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数研究函数单调性的关键：(1)在利用导数讨论函数的单调区间时，首先要确定函数的定义域；(2)单调区间的划分要注意对导数等于零的点的确认；(3)已知函数单调性求参数范围，要注意导数等于零的情况.

【自我检测】

1. 若函数 $f(x)=2x^3-3mx^2+6x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数，则实数 m 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,2)$

2. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $f(x)+(x+1)f'(x)>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则下列判断一定正确的是　　(　　)

A. $f(0)<0<2f(1)$

B. $0<f(0)<2f(1)$

C. $0<2f(1)<f(0)$

D. $2f(1)<0<f(0)$

3. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$f(x)+x\ln xf'(x)>0$，则不等式 $\dfrac{\ln x}{f(x)}>0$ 的解集是　　(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $(0,1)$

4. 函数 $f(x)=(x+1)e^x$ 的单调递减区间是________.

小题 4　利用导数研究函数的极值、最值

例 4　(1)若函数 $f(x)=e^x-(m+1)\ln x+2(m+1)x-1$ 恰有两个极值点，则实数 m 的取值范围为　　(　　)

A. $(-e^2,-e)$　　B. $\left(-\infty,-\dfrac{e}{2}\right)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $(-\infty,-e-1)$

(2)已知函数 $f(x)=a^x+e^x-(1+\ln a)x(a>0,a\neq1)$，对任意 $x_1,x_2\in[0,1]$，不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant a\ln a+e-4$ 恒成立，则 a 的取值范围为　　(　　)

A. $\left[\dfrac{1}{2},e\right]$　　B. $[e,2]$

C. $[e,+\infty)$　　D. $(e,+\infty)$

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数研究函数的极值、最值应注意的问题：

(1)不能忽略函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) $f'(x_0)=0$ 是可导函数在 $x=x_0$ 处取得极值的必要不充分条件；

(3)函数的极小值不一定比极大值小；

(4)函数在区间 (a,b) 上有唯一极值点，则这个极值点也是最大(小)值点，此结论在导数的实际应用中经常用到.

【自我检测】

1. 已知函数 $f(x)=ax^3-bx+2$ 的极大值和极小值分别为 M,m，则 $M+m=$　　(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

2. 若 $x=\dfrac{1}{e}$ 是函数 $f(x)=\ln x-kx$ 的极值点，则函数 $f(x)=\ln x-kx$ 有　　(　　)

A. 极小值 -2　　B. 极大值 -2

C. 极小值 -1　　D. 极大值 -1

3. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2$,若 $f(x)$ 恰有两个不同的零点,则 a 的取值范围为 ( )

A. $\left(\frac{1}{2e},+\infty\right)$　B. $\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$

C. $\left(0,\frac{1}{2e}\right)$　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right)$

4. 记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b,\\b,a<b,\end{cases}$ 则函数 $f(x)=\max\left\{x\ln x,\frac{e^x}{x^2}\right\}$ 的最小值为 ( )

A. $-\frac{1}{e}$　B. 0

C. e　D. $\frac{e^2}{4}$

请完成 限时集训(四)

第 5 讲　导数的热点问题

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. [2019·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$,$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

[试做]

2. [2019·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2)是否存在 a,b,使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1? 若存在,求出 a,b 的所有值;若不存在,说明理由.

[试做]

3. [2019·全国卷Ⅱ] 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性,并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2)设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点,证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.

[试做]

方法　导数的综合问题

1. 导数法判断和证明函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的单调性的步骤:

(1)求 $f'(x)$;

(2)确定 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内的符号(如果含有参数,则依据参数的取值讨论符号);

(3)得出结论,$f'(x)>0$ 时函数 $f(x)$ 为增函数,$f'(x)<0$ 时函数 $f(x)$ 为减函数.

2. 利用导数证明不等式的一般思路为:若证明 $f(x)<g(x)$,$x\in(a,b)$,可以构造函数 $F(x)=f(x)-g(x)$,如果 $F'(x)<0$,则 $F(x)$ 在 (a,b) 上是减函数,同时若 $F(a)\leqslant 0$,则由减函数的定义可知,$x\in(a,b)$ 时,有 $F(x)<0$,即证明了 $f(x)<g(x)$.

3. 与函数零点个数有关的参数范围问题,往往利用导数研究函数的单调区间和极值点,并结合特殊点,得出函数的大致图像,从而讨论其图像与 x 轴的位置关系,进而确定参数的取值范围,或通过对方程等价变形转化为两个函数图像的交点问题来求参数的取值范围.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

解答1　单调性及其应用

例1　已知函数 $f(x)=e^x$，$g(x)=ax^2+x+1(a>0)$. 设 $F(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$，讨论函数 $F(x)$ 的单调性.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数研究函数的单调性是导数应用的基础，只有研究了函数的单调性，才能研究其函数图像的变化规律，进而确定其极值、最值和函数的零点等. 注意：若可导函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在区间 D 上恒成立，但反过来不一定成立.

【自我检测】

设函数 $f(x)=ax^2-\ln x(a\in\mathbf{R})$. 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

解答2　函数的极值、最值

例2　已知函数 $f(x)=x^2+2ax+2\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$ 是单调函数，求 a 的取值范围；

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_2\geqslant e$，求 $|f(x_1)-f(x_2)|$ 的最小值.

[听课笔记]

【考场点拨】

解决函数极值、最值问题的策略：(1)求极值、最值时，要求步骤规范，含参数时，要讨论参数的范围；(2)函数在给定闭区间上存在极值，一般要将极值与端点处的函数值进行比较才能确定最值.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值；

(2)若 $m>n>0$，且 $m^n=n^m$，求证：$mn>e^2$.

解答3 参数与分类讨论

例3 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a-1}{x}$，$g(x)=\dfrac{a(\sin x+1)-2}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极小值；

(2)求证：当 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f(x)>g(x)$.

［听课笔记］

【考场点拨】

函数与导数的综合问题中，分类讨论是常用策略，常见的分类讨论主要有两种情况：(1)含有参数且参数取值不同时，影响到结论，需对参数取值情况讨论；(2)在所给区间上求解或论证困难时，可以将所给区间分成若干子区间，再在每个子区间进行求解与论证.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$.

(1)当 $a=4$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2)当 $a>0$ 时，对于任意的 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $f(x)>1-a^2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解答4 存在性问题与恒成立问题

例4 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$，$g(x)=x^2$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值点；

(2)若 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

［听课笔记］

【考场点拨】

由不等式恒成立求参数的取值范围问题的策略：(1)求最值法，将恒成立问题转化为利用导数求函数的最值问题；(2)分离参数法，将变量分离出来，进而转化为 $a>f(x)_{\max}$ 或 $a<f(x)_{\min}$ 的形式，通过导数的应用求出 $f(x)$ 的最值，即得参数的范围.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=e^x(x+\sin x+a\cos x)(a\in\mathbf{R})$ 在点 $(0,f(0))$ 处切线的斜率为 1.

(1)求 a 的值；

(2)设 $g(x)=1-\sin x$，若对任意 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)+mg(x)\geqslant 0$，求实数 m 的取值范围.

例 5 已知函数 $f(x)=(a-x)e^x-1, x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间及极值；

(2)设 $g(x)=(x-t)^2+\left(\ln x-\frac{m}{t}\right)^2$，当 $a=1$ 时，存在 $x_1\in(-\infty,+\infty)$，$x_2\in(0,+\infty)$，使方程 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，求实数 m 的最小值.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用导数处理不等式在区间 D 上有解的常用结论：

不等式 $a<f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a<f(x)_{\max}$；

不等式 $a\leqslant f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\max}$；

不等式 $a>f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a>f(x)_{\min}$；

不等式 $a\geqslant f(x)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\min}$.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)^2$.

(1)若 $a>0$，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)证明：存在正实数 M，使得 $f(M)>0$.

解答 5　零点（方程的解）的判断

例 6 设函数 $g(x)=te^{2x}+(t+2)e^x-1$，其中 $t\in\mathbf{R}$.

(1)当 $t=-1$ 时，求 $g(x)$ 的单调区间与极值；

(2)若 t 是非负实数，且函数 $f(x)=g(x)-4e^x-x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一零点，求 t 的值.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用函数零点的情况求参数值或取值范围的三种常用方法：

(1)利用零点存在性定理构建不等式求解.

(2)分离参数后转化为函数的值域(或最值)问题求解.

(3)转化为两熟悉的函数图像的上、下关系问题，从而构建不等式求解.

【自我检测】

设函数 $f(x)=x^2-a\ln x(a\neq 0)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $a=2$，$g(x)=x-2\sqrt{x}$，求证：函数 $h(x)=f(x)-g(x)-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

解答6 极值点不可求与构造

例7 设函数 $f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a$，其中 $a>0$.

(1)设函数 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

(2)证明：存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(x)\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 内恒成立，且方程 $f(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 内有唯一解.

［听课笔记］

【考场点拨】

极值点不可求问题的求解策略：(1)虚设，设极值点为 x_0，得出关于极值点的等式 $g(x_0)=0$，再整体代换并结合已知求解；(2)对导函数进行二次求导，可以进一步弄清极值点的取值区间，确定函数在相应区间上的单调性，直至所需结论.

【自我检测】

设函数 $f(x)=x+\dfrac{a\ln x}{x}(x>0)$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $a>0$ 时，若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，证明：$f(x_0)>4e^{\frac{3}{2}}$.

解答7 不等式的证明

例8 ［2018·全国卷Ⅰ］已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

［听课笔记］

【考场点拨】

利用导数证明不等式的解题策略：一般先将待证不等式如 $f(x)\geqslant g(x)$ 的形式转化为 $f(x)-g(x)\geqslant 0$ 的形式，再设 $h(x)=f(x)-g(x)$，进而转化为研究函数 $h(x)$ 在指定区间上的最小值问题.不过由于不等式呈现形式多样化，具体求解时还得灵活多变.

【自我检测】

已知函数 $f(x)=ae^x(a\in\mathbf{R})$，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+1$.

(1)求函数 $g(x)$ 的极值；

(2)当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时，求证：$f(x)\geqslant g(x)$.

请完成 限时集训(五)

模块二 三角函数与平面向量

第6讲　平面向量

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2018·全国卷Ⅰ] 在△ABC中,AD为BC边上的中线,E为AD的中点,则$\overrightarrow{EB}=$ (　　)

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(2)[2018·全国卷Ⅲ] 已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,-2)$,$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$.若$\boldsymbol{c}/\!/(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则$\lambda=$________.

[试做]

结论　平面向量的线性运算

1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 若$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}+\mu\overrightarrow{OC}$($\lambda,\mu$为常数),则$A,B,C$三点共线的充要条件是$\lambda+\mu=1$.

3. 若A,B,C是平面内不共线的三点,则$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow P$为△$ABC$的重心.

2. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 已知非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$,且$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

(2)[2017·全国卷Ⅱ] 已知△ABC是边长为2的等边三角形,P为平面ABC内一点,则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$的最小值是 (　　)

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. -1

[试做]

应用　平面向量的数量积

已知两个非零向量$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则

(1)证明向量垂直:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(2)求向量的模:$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

(3)求向量的夹角:$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

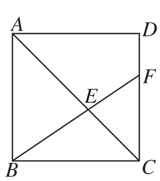
小题1　平面向量的线性运算

例1 (1)已知向量$\boldsymbol{a}=(4,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-5,2)$且$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,则$m=$ (　　)

A. 1　　B. -1

C. $\frac{7}{5}$　　D. $-\frac{7}{5}$

(2)如图M2-6-1,在正方形$ABCD$中,F是边CD上靠近D点的三等分点,连接BF交AC于点E,若$\overrightarrow{BE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$($m,n\in\mathbf{R}$),则$m+n$的值是 (　　)



图M2-6-1

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$

C. $-\frac{2}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

[听课笔记]

【考场点拨】

关于向量线性运算问题需注意两点:

(1)注意尽可能地将向量转化到同一个平行四边形或三角形中,选用从同一顶点出发的基本向量或首尾相接的向量,运用向量加、减法运算及数乘运算来求解;

(2)坐标运算中注意方程思想的运用及合理使用运算法则.

【自我检测】

1. 如图 M2-6-2,D 是$\triangle ABC$ 的边 AB 的中点,则向量$\overrightarrow{CD}$等于 (　　)

A. $-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　B. $-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$　　D. $\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

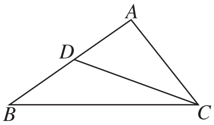


图 M2-6-2

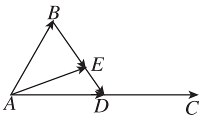


图 M2-6-3

2. 如图 M2-6-3 所示,在同一平面中,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{ED}$,若$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}(m,n\in\mathbf{R})$,则 $m+n=$ (　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{5}{6}$　　D. 1

3. 如图 M2-6-4,圆 O 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形 ABC 的内切圆,其与 BC 边相切于点 D,点 M 为圆上任意一点,$\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BD}(x,y\in\mathbf{R})$,则 $2x+y$ 的最大值为 (　　)

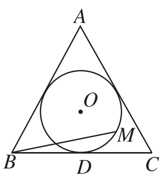


图 M2-6-4

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$,$\boldsymbol{c}=(1,2)$,若向量 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 共线,则实数 k 的值为________.

小题 2　平面向量的数量积

例 2 (1)已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=1$,$\boldsymbol{b}=(t,2-t)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

(2)如图 M2-6-5 所示,在$\triangle ABC$ 中,点 D 在边 AB 上,连接 CD,E 在 CD 上,$AB=3$,$AC=2$,$\angle BAC=60°$,$BD=2AD$,$CE=2ED$,则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AB}=$ (　　)

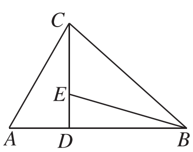


图 M2-6-5

A. 9　　B. 4

C. -3　　D. -6

[听课笔记]

【考场点拨】

计算平面向量数量积的方法有两种:一是利用数量积的定义和公式进行计算,解题的关键是求出向量的模和夹角;二是结合正方形、等腰三角形或者直角梯形等图形的特点建立平面直角坐标系,转化为平面向量的坐标运算.

【自我检测】

1. 已知 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$|\boldsymbol{e}_2|=1$,$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 30°,若$\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 互相垂直,则实数 λ 的值是 (　　)

A. $-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $3\sqrt{3}+4$　　D. $-3\sqrt{3}+4$

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,$\boldsymbol{b}=(-1,2)$,且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,3)$,则$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$等于 (　　)

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 如图 M2-6-6 所示,已知在 Rt$\triangle ABC$中,点 D 为斜边 BC 的中点,$|\overrightarrow{AB}|=6\sqrt{3}$,$|\overrightarrow{AC}|=6$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$,则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EB}$等于 (　　)

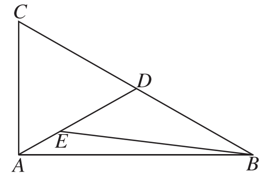


图 M2-6-6

A. -14　　B. -9　　C. 9　　D. 14

4. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 120°,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为________.

小题 3　平面向量数量积的应用

例 3 (1)若 P 为$\triangle ABC$ 所在平面内一点,且$|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}|$,则$\triangle ABC$ 的形状为 (　　)

A. 等边三角形　　B. 等腰三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

(2)已知 $\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$ 均为单位向量,且它们的夹角为 60°,设向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}_2|=\frac{1}{2}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2(m\in\mathbf{R})$,则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

平面向量数量积问题解题方法:(1)借"底"数字化,要先选取一组合适的基底,这是把平面向量"数化"的基础;(2)借"系"坐标化,数形结合建立合适的平面直角坐标系,将向量的数量积运算转化为坐标运算.

【自我检测】

1. 在$\triangle ABC$ 中,若$\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,则$\triangle ABC$ 是 (　　)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等边三角形

2. 如图 M2-6-7,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=2$,$BC=\sqrt{2}$,点 F 在边 CD 上,过点 F 作 $FE\perp AB$ 交 AB 于 E. 若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=3$,则$|\overrightarrow{BF}|$的值是________.

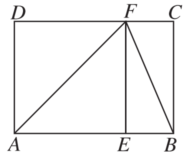


图 M2-6-7

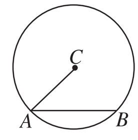


图 M2-6-8

3. 如图 M2-6-8,已知 AB 为圆 C 的一条弦,且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$,则$|\overrightarrow{AB}|=$________.

请完成 限时集训(六)

第7讲　三角函数与三角恒等变换

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2018·全国卷Ⅰ] 已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $|a-b|=$ (　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. 1

(2)[2019·全国卷Ⅱ] 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$ (　　)

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(3)[2019·全国卷Ⅰ] $\tan 255°=$ (　　)

A. $-2-\sqrt{3}$　　B. $-2+\sqrt{3}$

C. $2-\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

(4)[2019·江苏卷] 已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值是________.

[试做]

2. [2017·全国卷Ⅰ改编] 已知曲线 C_1：$y=\cos x$，C_2：$y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的______倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向________平移________个单位长度，得到曲线 C_2.

[试做]

3. (1)[2019·全国卷Ⅱ] 下列函数中，以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增的是 (　　)

A. $f(x)=|\cos 2x|$　　B. $f(x)=|\sin 2x|$

C. $f(x)=\cos|x|$　　D. $f(x)=\sin|x|$

(2)[2017·全国卷Ⅲ] 设函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，则下列结论错误的是 (　　)

A. $f(x)$ 的一个周期为 -2π　　B. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{8\pi}{3}$ 对称

C. $f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{6}$　　D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

(3)[2015·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图 M2-7-1 所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 (　　)

A. $\left(k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

B. $\left(2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $\left(k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D. $\left(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

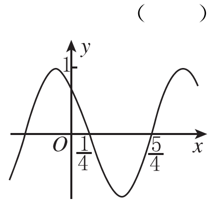


图 M2-7-1

结论　三角恒等变换

1. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

2. $1\pm\sin\alpha=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

3. $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

4. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$，其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

方法　三角函数的图像变换

关键一：化为同名函数；

关键二：两种途径，“先平移后伸缩”和“先伸缩后平移”；

关键三：$\omega x+\varphi=\omega\left(x+\frac{\varphi}{\omega}\right)$.

方法　三角函数的单调性

1. 将函数化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b$（或 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)+b$）的形式.

2. 把 $\omega x+\varphi(\omega>0)$ 看成整体，利用正弦函数、余弦函数的单调性求解.

结论　三角函数的周期性

1. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

2. 在三角函数中，奇函数一般可化为 $y=A\sin\omega x$ 或 $y=A\tan\omega x$ 的形式，而偶函数一般可化为 $y=A\cos\omega x+b$ 的形式.

(4)[2018·全国卷Ⅱ] 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数，则 a 的最大值是 ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

[试做]

4. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$ 的最小值为________.

(2)[2014·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x)=\sin(x+2\varphi)-2\sin\varphi\cos(x+\varphi)$ 的最大值为________.

[试做]

方法　三角函数的最值问题

1. 利用诱导公式、三角恒等变换，将函数化为关于 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的二次函数，采用配方法求最值.

2. 利用诱导公式、辅助角公式将函数化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b$（或 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)+b$）的形式，根据三角函数的有界性运用整体思想求最值.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　三角变换与求值

例 1 (1)已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\tan(\pi+\alpha)=$ ( )

A. $-\frac{15}{17}$　　B. $\frac{15}{17}$

C. $-\frac{8}{17}$　　D. $\frac{8}{17}$

(2)已知 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta=-\frac{3\sqrt{3}}{5}$，则 $\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=$ ( )

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$

C. $\frac{4}{5}$　　D. $-\frac{4}{5}$

(3)已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

三角恒等变换主要是利用两角和与差的公式及二倍角公式解决相关的三角函数问题.化简与求值要遵循“三看”原则：一看“角”，通过看角之间的差别与联系，把角进行合理拆分；二看“函数名称”，是需进行“切化弦”还是“弦化切”等，从而确定使用的公式；三看“结构特征”，了解变式或化简的方向.

【自我检测】

1. 已知 $\sin\theta=\frac{a-1}{1+a}$，$\cos\theta=-\frac{a}{1+a}$，若 θ 是第二象限角，则 $\tan\theta$ 的值为 ( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. -2

C. $-\frac{3}{4}$　　D. $-\frac{4}{3}$

2. 若 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-3$，则 $\sin 2\alpha-\cos^2\alpha=$ ( )

A. $\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$

C. -1　　D. 3

3. 若 $\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{4}{3}$，则 $\sin 2x=$ ( )

A. $-\frac{4}{9}$　　B. $-\frac{8}{9}$

C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{8}{9}$

4. 已知 $x\in(0,\pi)$，且 $\cos x=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

5. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$________.

小题 2　三角函数的图像及应用

例 2 (1)将函数 $y=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后与 $y=-\sin 2x$ 的图像重合，则 φ 的最小值为 ( )

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

(2)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图像如图 M2-7-2 所示，点 $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{7\pi}{3},0\right)$ 在图像上，若 $x_1,x_2\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$，$x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x_1+x_2)=$ ( )

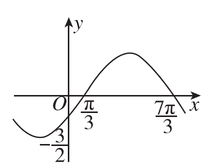


图 M2-7-2

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$

C. 0　　D. $-\frac{3}{2}$

[听课笔记]

【考场点拨】

三角函数图像平移变换中的误区：

(1)函数图像的平移法则是“左加右减、上加下减”，但是左右平移变换只是针对 x 进行的变换.

(2)函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像向左(右)平移 $k(k>0)$ 个单位长度后，其图像对应的函数解析式为 $f(x)=\sin[\omega(x+k)+\varphi]$ ($f(x)=\sin[\omega(x-k)+\varphi]$)，而不是 $f(x)=\sin(\omega x+k+\varphi)$ ($f(x)=\sin(\omega x-k+\varphi)$).

【自我检测】

1. 要得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像，需将 $y=\cos 2x$ 的图像　(　　)

A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

2. 将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后与原函数的图像重合，则实数 ω 的值可能是　(　　)

A. 6　B. 10　C. 12　D. 16

3. 把函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，再把所得的图像上每个点的横、纵坐标都伸长到原来的2倍，得到函数 $g(x)$ 的图像，并且 $g(x)$ 的图像如图M2-7-3所示，则 $f(x)$ 的解析式可以为　(　　)

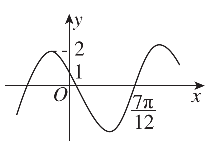


图 M2-7-3

A. $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$　B. $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$　D. $f(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$

4. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，若对任意的 $a\in(1,2)$，关于 x 的方程 $|f(x)|-a=0(0\leqslant x<m)$ 总有两个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为　(　　)

A. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　B. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$　D. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

小题3　三角函数的性质及应用

例3 (1)若函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$，则下列结论正确的是　(　　)

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+f(-x)=0$

C. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上是减函数

D. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称

(2)已知直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi\leqslant\pi)$ 的图像的两条对称轴，且函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减，则 φ 的值是　(　　)

A. $-\frac{\pi}{2}$　B. 0　C. $\frac{\pi}{2}$　D. π

[听课笔记]

【考场点拨】

三角函数的性质主要是指单调性、周期性、奇偶性和最值，解题时要注意以下两点：一是考查三角函数的性质时，首先要将函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，再对比 $y=\sin x$ 的性质，即把 $\omega x+\varphi$ 看成一个整体处理，但是一定要 $\omega>0$，否则易出错；二是一定要结合图像进行分析.

【自我检测】

1. 已知函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，若函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递减，则 a 的最大值是(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{5\pi}{6}$

2. 同时满足 $f(x+\pi)=f(x)$ 与 $f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ 的函数 $f(x)$ 的解析式可以是　(　　)

A. $f(x)=\cos 2x$　B. $f(x)=\tan x$

C. $f(x)=\sin x$　D. $f(x)=\sin 2x$

3. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π，且 $f(-x)=f(x)$，则　(　　)

A. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

C. $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

4. 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，若 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，则 ω 的最小正值是　(　　)

A. 1　B. $\frac{6}{5}$　C. 2　D. 6

小题 4　三角函数的值域与最值问题

例 4　(1)函数 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x-2\sin x\cos x\left(其中 x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$的值域是　(　　)

A. $[-1,1]$　　B. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

C. $[-\sqrt{2},1]$　　D. $[-1,\sqrt{2}]$

(2)已知 $f(x)=m\sin\omega x-\cos\omega x(m>0,\omega>0)$，$g(x)=2\tan x$，对 $\forall x_1\in\mathbf{R}$，$\exists x_2\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$成立，若 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的值域为$[-1,2]$，则实数 ω 的取值不可能是　(　　)

A. $\frac{4}{3}$　　B. 1

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

[听课笔记]

【考场点拨】

求三角函数的值域与最值问题的类型与求解策略：(1)形如 $y=a\sin x+b\cos x+c$ 的三角函数，要根据三角恒等变换把函数化为 $y=A\sin(x+\varphi)+c$ 的形式，再借助三角函数图像与性质确定值域与最值；(2)形如 $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ 的三角函数，转化为二次函数求解；(3)形如 $y=a\sin x\cos x+b(\sin x\pm\cos x)+c$ 的三角函数，可先设 $t=\sin x\pm\cos x$，再转化为关于 t 的二次函数求解.

【自我检测】

1. 若函数 $f(x)=m+\sin x-\cos x$ 的最大值为 0，则 $m=$　(　　)

A. $-\sqrt{2}$　　B. -2

C. -1　　D. $\sqrt{2}$

2. 已知函数 $f(x)=4\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$在同一周期内，当 $x=\frac{\pi}{6}$时取得最大值，当 $x=-\frac{\pi}{3}$时取得最小值，则 φ 的值可能为　(　　)

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{13\pi}{6}$　　D. $\frac{7\pi}{6}$

3. 函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 2x$ 的最大值为　(　　)

A. $\frac{9}{8}$　　B. 0

C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{17}{16}$

4. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$图像的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，将函数 $f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，得到函数 $g(x)$的图像. 若函数$g(x)$为偶函数，则函数 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上的值域是　(　　)

A. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$　　B. $(-2,1)$

C. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$　　D. $[-2,1]$

请完成 **限时集训(七)**

第 8 讲　正、余弦定理

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2018 · 全国卷Ⅱ] 在$\triangle ABC$中，$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$　(　　)

A. $4\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{30}$　　C. $\sqrt{29}$　　D. $2\sqrt{5}$

(2)[2019 · 全国卷Ⅱ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $b\sin A+a\cos B=0$，则$B=$________.

[试做]

知识　正、余弦定理

1. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 是$\triangle ABC$ 的外接圆的半径），$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

2. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

2. (1)[2018·全国卷Ⅲ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.若$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$,则$C=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

(2)[2018·全国卷Ⅰ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$,$b^2+c^2-a^2=8$,则$\triangle ABC$ 的面积为________.

[试做]

方法　与三角形面积有关的问题

1. 利用公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C$ 得到关于三角形的边和角的等式;

2. 利用正、余弦定理进行边角转化求解.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　利用正、余弦定理解三角形

角度 1　三角形中基本量的求解

例 1 (1)在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$a=3$,$c=2\sqrt{3}$,$b\sin A=a\cos\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$,则 $b=$ (　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

(2)在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若 $2\sin^2A+c(\sin C-\sin A)=2\sin^2B$,且$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{4}abc$,则 $B=$________.

[听课笔记]

【考场点拨】

利用正、余弦定理求解三角形中的基本量时应注意的问题:(1)已知两边及其中一边的对角求其余边或角时,要注意解的多样性与合理性;(2)三角形的面积主要是利用 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$求解;(3)有时可以直接利用余弦定理求出 ab 的整体值再求面积,而不必分别求出 a,b 的值.

【自我检测】

1. 在$\triangle ABC$ 中,若 $AB=3BC$,$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\cos B=$ (　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若$\triangle ABC$ 的面积和周长分别为 $10\sqrt{3}$ 和 20,$C=60°$,则 $c=$ (　　)

A. 7　　B. 8　　C. 5　　D. 6

3. 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $2(b\cos A+a\cos B)=c^2$,$b=3$,$3\cos A=1$,则 $a=$________.

4. 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若 $b\cos C+c\cos B=2a\cos B$,且 $a=2$,$b=3$,则$\triangle ABC$ 的面积是________.

角度 2　三角形中的综合问题

例 2 (1)在$\triangle ABC$ 中,a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边,若 $a+c=4$,$2\sin B=\sin A+\sin C$,则$\triangle ABC$ 的面积的最大值为 (　　)

A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

(2)设$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,则下列命题是真命题的是 (　　)

①若 $a^2+b^2<c^2$,则 $C>\frac{\pi}{2}$;

②若 $ab>c^2$,则 $C>\frac{\pi}{3}$;

③若 $a^3+b^3=c^3$,则 $0<C<\frac{\pi}{2}$;

④若 $2ab>(a+b)c$,则 $C>\frac{\pi}{2}$;

⑤若$(a^2+b^2)c^2<2a^2b^2$,则 $0<C<\frac{\pi}{3}$.

A. ①②③　　B. ①②⑤

C. ①③④　　D. ①③⑤

(3)已知在$\triangle ABC$ 中,$A=\frac{\pi}{3}$,M 为 BC 的中点,$AM=\sqrt{3}$,则 $2AB+AC$ 的取值范围为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

三角形中的最值与范围问题主要有两种解决方法:一是利用基本不等式求得最大值或最小值;二是将所求式转化为只含有三角形某一个角的三角函数形式,结合角的范围确定所求式的范围.

【自我检测】

1. 在△ABC中，$AC=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，则B的取值范围是 （　　）

A. $0<B\leqslant\frac{\pi}{4}$

B. $0<B\leqslant\frac{\pi}{6}$

C. $0<B\leqslant\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}\leqslant B<\pi$

D. $0<B\leqslant\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}\leqslant B<\pi$

2. △ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若△ABC的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，周长为6，则$b$的最小值是（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

3. 在△ABC中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，若$a=\sqrt{3}$，$\frac{\sqrt{3}+b}{c}=\frac{\sin C+\sin A}{\sin C+\sin A-\sin B}$，则$b+2c$的最大值等于________.

4. 在△ABC中，$\angle BAC=60°$，点D在边BC上，且$BC=3BD$，$AD=2$，则△ABC面积的最大值为________.

小题2　正、余弦定理的实际应用

例3　海洋蓝洞是地球罕见的自然地理现象，被誉为“地球留给人类保留宇宙秘密的最后遗产”，我国拥有世界上已知最深的海洋蓝洞. 现要测量如图M2-8-1所示的蓝洞的口径，即A,B两点间的距离，在珊瑚群岛上取两点C,D，测得$CD=80$，$\angle ADB=135°$，$\angle BDC=\angle ACD=15°$，$\angle ACB=120°$，则$A,B$两点间的距离为________.

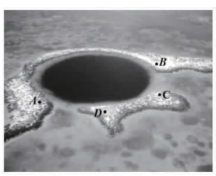


图 M2-8-1

[听课笔记]

【考场点拨】

解三角形的实际应用主要体现在解决一些实际问题中的测高和测距问题，这样就需要将实际问题中已知的角度、距离等，以及待求的角度、距离等融合到一个或几个三角形中，再结合正、余弦定理求解.

【自我检测】

1. 如图M2-8-2所示，一艘海轮从A处出发，测得灯塔在海轮的北偏东15°的方向，与海轮相距20海里的B处，海轮按北偏西60°的方向航行了30分钟后到达C处，又测得灯塔在海轮的北偏东75°的方向，则海轮的速度为________海里/分.

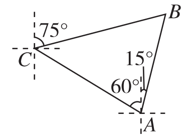


图 M2-8-2

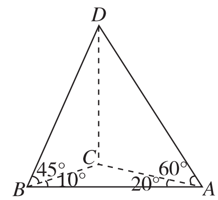


图 M2-8-3

2. 如图M2-8-3，为测量竖直旗杆CD的高度，在旗杆底部C所在水平地面上选取相距$4\sqrt{21}$ m的两点A,B，在A处测得旗杆底部C在西偏北20°的方向，旗杆顶部D的仰角为60°，在B处测得旗杆底部C在东偏北10°的方向，旗杆顶部D的仰角为45°，则旗杆CD的高度为________m.

请完成 **限时集训（八）**

第9讲　解三角形的综合应用

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. [2019·全国卷Ⅰ] △ABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c. 设$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2A-\sin B\sin C$.

(1)求A；

(2)若$\sqrt{2}a+b=2c$，求$\sin C$.

[试做]

方法　如何选用正、余弦定理解三角形

1. 式子中含有角的余弦或边的二次式，可考虑用余弦定理；

2. 式子中含有角的正弦或边的一次式，一般选用正弦定理求解.

2. [2017·全国卷Ⅰ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知$\triangle ABC$ 的面积为$\dfrac{a^2}{3\sin A}$.

(1)求 $\sin B\sin C$;

(2)若 $6\cos B\cos C=1,a=3$,求$\triangle ABC$ 的周长.

[试做]

结论　三角形面积公式

(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$;

(2) $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$(r 为三角形的内切圆半径).

3. [2019·全国卷Ⅲ] $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.

(1)求 B;

(2)若$\triangle ABC$ 为锐角三角形,且 $c=1$,求$\triangle ABC$ 面积的取值范围.

[试做]

方法　求三角形面积的最值或范围

1. 表示为三角形一个内角的三角函数,利用三角函数的性质求解;
2. 结合基本不等式求解.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

解答 1　三角形基本量的求解

例 1 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且满足 $\sin^2A+\sin A\sin B-6\sin^2B=0$.

(1)求$\dfrac{a}{b}$的值;

(2)若 $\cos C=\dfrac{3}{4}$,求 $\sin B$ 的值.

[听课笔记]

【考场点拨】

求解三角形中的边和角等基本量,需要根据正、余弦定理结合已知条件灵活转化边和角之间的关系,从而达到解决问题的目的.其一般步骤是:

第一步:定条件,即确定三角形中的已知和所求,然后确定转化的方向;

第二步:定工具,即根据条件和所求合理选择转化的工具,实施边角之间的互化;

第三步:求结果.

【自我检测】

已知锐角三角形 ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $a=\sqrt{3}$,$\dfrac{\sin B-\sin A}{\sin C}=\dfrac{b-c}{a+b}$.

(1)求角 A 的大小;

(2)求 $b+c$ 的取值范围.

解答2 与三角形面积有关的问题

例2 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}=\tan A+\tan B$.

(1)求角A的大小;

(2)若$a=2$,求$\triangle ABC$的面积的最大值.

[听课笔记]

【考场点拨】

三角形面积的最值问题主要有两种解决方法:一是将面积表示为边的形式,利用基本不等式求得最大值或最小值;二是将面积用三角形某一个角的三角函数表示,结合角的范围确定三角形面积的最值.

【自我检测】

已知在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,$\sin^2A+\sin^2B+\sin A\sin B=2c\sin C$,$\triangle ABC$的面积$S=abc$.

(1)求角C的大小;

(2)求$\triangle ABC$周长的取值范围.

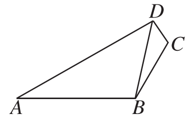
解答3 以平面几何为载体的解三角形问题

例3 如图M2-9-1,在平面四边形$ABCD$中,$CD=1$,$BD=\sqrt{7}$,$AB=4$,$\angle ABC=120°$,$\angle DCB=120°$.

(1)求$\sin\angle DBC$的值;

(2)求AD的值.

[听课笔记]



图M2-9-1

【考场点拨】

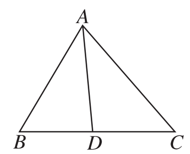
解决以平面几何为载体的解三角形问题,主要注意以下几个方面:一是充分用好平面几何图形的性质;二是出现多个三角形时从条件较多的三角形突破求解;三是四边形问题要转化为三角形问题去求;四是善于用好三角形中的不等关系$\left(\text{如大边对大角,最大角一定大于或等于}\frac{\pi}{3}\right)$,从而可以确定角或边的范围.

【自我检测】

如图M2-9-2所示,在$\triangle ABC$中,$2\sin C\cos A+\sin(A-C)-\sqrt{3}\cos(A+C)=\sqrt{3}$.

(1)求角B的大小;

(2)设$\angle BAC$的角平分线AD交BC于D,$AD=3$,$BD=2$,求$\cos C$的值.



图M2-9-2

请完成 **限时集训(九)**

03 模块三

数列

第10讲　数列、等差数列与等比数列

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4=0$, $a_5=5$, 则　(　　)

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=2n^2-8n$　　D. $S_n=\frac{1}{2}n^2-2n$

(2)[2017·全国卷Ⅲ] 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为1,公差不为0. 若 a_2,a_3,a_6 成等比数列,则 $\{a_n\}$ 前6项的和为　(　　)

A. -24　　B. -3

C. 3　　D. 8

(3)[2016·全国卷Ⅰ] 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=5$, 则 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为________.

[试做]

2. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_4^2=a_6$, 则 $S_5=$________.

(2)[2017·全国卷Ⅱ] 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=$________.

[试做]

3. (1)[2018·全国卷Ⅰ] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $S_n=2a_n+1$, 则 $S_6=$________.

(2)[2015·全国卷Ⅱ] 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $a_1=-1$, $a_{n+1}=S_nS_{n+1}$, 则 $S_n=$________.

(3)[2014·全国卷Ⅱ] 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$, $a_8=2$, 则 $a_1=$________.

[试做]

方法　等差、等比数列的基本运算

1. 公式法解方程—基本量思想(a_1, $d(q)$, a_n, S_n).
2. 数列的性质:若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $m+n=p+q$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$), 则 $a_n+a_m=a_p+a_q$;
若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $m+n=p+q$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$), 则 $a_na_m=a_pa_q$.

方法　数列求和

公式法(等差数列、等比数列前 n 项和公式)、倒序相加法、分组求和法、并项求和法、错位相减法、裂项相消法.

方法　由递推公式求通项公式

1. 利用 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}$ 得出关于 a_n 与 a_{n+1} (或 a_{n-1})的递推式.
2. 若递推式为 $a_{n+1}=a_n+f(n)$, 则可通过累加法求得通项公式.
3. 若递推式为 $a_{n+1}=f(n)\cdot a_n$, 则可通过累乘法求得通项公式.
4. 若递推式为 $a_{n+1}=pa_n+q$(其中 p,q 均为常数,且 $p\neq1$), 则通常化为 $a_{n+1}-t=p(a_n-t)$, 其中 $t=\frac{q}{1-p}$, 再利用换元法转化为等比数列求解.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

小题 1　等差、等比数列的基本计算

例1　(1)已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零,S_n为其前n项和,$S_3=9$,且a_2-1,a_3-1,a_5-1构成等比数列,则$S_5=$　(　　)

A. 15　　B. -15

C. 30　　D. 25

(2)设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,若$2S_n=3a_n-3$,则$a_4=$　(　　)

A. 27　　B. 81

C. 93　　D. 243

[听课笔记]

【考场点拨】

等差(等比)数列问题的求解策略:(1)抓住基本量,首项a_1,公差d(公比q);(2)熟悉一些结构特征,如前n项和为$S_n=an^2+bn$形式的数列为等差数列,通项为$a_n=p\cdot q^{n-1}$($p\neq 0$)的形式的数列为等比数列;(3)等比数列由于变量n在指数位置,常采用两式相除的方法(即比值的方式)进行计算.

【自我检测】

1. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$a_2+a_8=34$,$S_4=38$,则$a_1=$　(　　)

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

2. 等比数列$\{a_n\}$中,若$a_n>0$,$a_2a_4=1$,$a_1+a_2+a_3=7$,则公比$q=$　(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 2　　D. 4

3. 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=32$,$a_2+a_3=40$,则数列$\{|a_n|\}$的前12项和为　(　　)

A. -144　　B. 80

C. 144　　D. 304

4. 已知在正项等比数列$\{a_n\}$中,$a_{2020}=4a_{2018}$,$a_2+a_4=20$,则a_{2020}的个位数字是　(　　)

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

小题 2　等差、等比数列的性质

例2　(1)已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足$S_8<S_{10}<S_9$,则满足$S_n>0$的正整数n的最大值为　(　　)

A. 16　　B. 17

C. 18　　D. 19

(2)已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$S_4=1$,$S_8=3$,则$a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}$的值是　(　　)

A. 8　　B. 15

C. 18　　D. 20

[听课笔记]

【考场点拨】

等差、等比数列性质使用的注意点:(1)若$m+n=p+q=2k$($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$),则对于等差数列有$a_m+a_n=a_p+a_q=2a_k$,但是不存在$a_m+a_n=a_{2k}$;对于等比数列有$a_ma_n=a_pa_q=a_k^2$,但是不存在$a_ma_n=a_{2k}$.(2)对等差数列有S_m,$S_{2m}-S_m$,$S_{3m}-S_{2m}$,…成等差数列;对等比数列有S_m,$S_{2m}-S_m$,$S_{3m}-S_{2m}$,…成等比数列,且仅在$q\neq-1$或$q=-1$且m为奇数时满足.

【自我检测】

1. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$S_{21}=63$,则$a_3+a_{11}+a_{19}=$　(　　)

A. 12　　B. 9

C. 6　　D. 3

2. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$S_2=3$,$S_4=15$,则$S_6=$　(　　)

A. 61　　B. 62

C. 63　　D. 75

3. 在各项均不为零的等差数列$\{a_n\}$中,$2a_{2017}-a_{2018}^2+2a_{2019}=0$,数列$\{b_n\}$是等比数列,且$b_{2018}=a_{2018}$,则$\log_2(b_{2017}\cdot b_{2019})$的值为　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 8

4. 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$S_5=40$,$S_9=126$,则$S_7=$　(　　)

A. 66　　B. 68

C. 77　　D. 84

小题 3　等差、等比数列的综合问题

例3　(1)已知公差$d\neq 0$的等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,且a_2,a_4-2,a_6成等比数列,若正整数m,n满足$m-n=10$,则$a_m-a_n=$　(　　)

A. 30　　B. 20

C. 10　　D. 5或40

(2)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_1=\frac{1}{3}$,当$n\geqslant 2$时,a_n,S_n-1,S_n成等比数列,若$S_m<\frac{19}{21}$,则m的最大值为　(　　)

A. 9　　B. 11

C. 19　　D. 21

[听课笔记]

【考场点拨】

解决数列综合问题中的易失分点:(1)使用公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 时忽略 $n\geqslant2$ 这个前提;(2)等差数列中忽略 $d=0$ 的情况,等比数列中忽略 $q=1$ 的情况.

【自我检测】

1. 已知数列 1,a_1,a_2,3 成等差数列,1,b_1,b_2,b_3,4 成等比数列,则 $\frac{a_1+a_2}{b_2}$ 的值为 ( )

A. 2 B. -2 C. ±2 D. $\frac{5}{4}$

2. 已知数列$\{a_n\}$是公比 q 不为 1 的等比数列,S_n 为其前 n 项和,若 $a_2=2$,且 $16a_1$,$9a_4$,$2a_7$ 成等差数列,则 $S_3=$ ( )

A. 5 B. 6

C. 7 D. 9

3. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列,首项 $a_1=2$,数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\log_2 a_n$,且 $b_2+b_3+b_4=9$,则 $a_5=$ ( )

A. 8 B. 16

C. 32 D. 64

4. 已知数列$\{a_n\}$的奇数项依次成等差数列,偶数项依次成等比数列,且 $a_1=1$,$a_2=2$,$a_3+a_4=7$,$a_5+a_6=13$,则 $a_7+a_8=$ ( )

A. $4+\sqrt{2}$ B. 19

C. 20 D. 23

小题 4 数列的递推关系

例 4 (1)已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数,记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $a_{n+1}=\frac{2a_n^2}{a_{n+1}-a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,$a_1=1$,则使不等式 $S_n>2019$ 成立的 n 的最小值是________.

(2)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=2a_n-2^{n+1}$,若不等式 $2n^2-n-3<(5-\lambda)a_n$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,则整数 λ 的最大值为________.

[听课笔记]

【考场点拨】

由递推关系求数列的通项公式,常用的方法有:①求出数列的前几项,再归纳猜想出数列的一个通项公式;②将已知递推关系式整理、变形,变成等差、等比数列,或用累加法(适用 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 型)、累乘法(适用 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$ 型)、待定系数法(适用 $a_{n+1}=pa_n+q(p\neq1)$ 型)求通项公式.

【自我检测】

1. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=2$,$S_{n+1}=2S_n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $a_{10}=$ ( )

A. 128 B. 256

C. 512 D. 1024

2. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=2$,且 $a_n\cdot a_{n+2}=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 a_{2019} 的值为 ( )

A. 2 B. 1

C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

3. 数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,0\leqslant a_n<\frac{1}{2},\\2a_n-1,\frac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$ 若 $a_1=\frac{3}{5}$,则 $a_{2018}=$ ( )

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

4. 已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $a_n+S_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $\log_2(2a_2-a_1)(2a_3-a_2)\cdots(2a_{100}-a_{99})=$________.

请完成 **限时集训(十)**

第 11 讲 数列求和及数列的简单应用

D 典型真题研析

六年典型真题甄选 解法、结论、拓展研析

1. [2019·全国卷Ⅰ] 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.已知 $S_9=-a_5$.

(1)若 $a_3=4$,求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 $a_1>0$,求使得 $S_n\geqslant a_n$ 的 n 的取值范围.

[试做]

策略 解决数列解答题

1. 解决已知某几个基本量求等差、等比数列的通项公式和前 n 项和的问题:

关键一:通过列方程(组)求关键量 a_1 和 d(或 q).

关键二:利用通项公式和前 n 项和公式求解.

2. ［2019·全国卷Ⅱ］已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足 $a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

(1)证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

(2)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

［试做］

3. ［2017·全国卷Ⅲ］设数列$\{a_n\}$满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n=2n$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$的前 n 项和.

［试做］

2. 解决数列的递推问题：

关键一：利用 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 得出关于 a_n 与 a_{n+1}(或 a_{n-1})的递推式.

关键二：观察递推式的形式，采用不同方法求 a_n.

3. 解决数列求和问题：

关键一：利用等差数列、等比数列的前 n 项和公式.

关键二：利用分组求和法、错位相减法、裂项相消法.

4. (1)等差数列的判断方法：定义法、等差中项法、利用通项公式判断、利用前 n 项和公式判断.

(2)等比数列的判断方法：

(a)定义法：若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q 是常数且 $q\neq 0$)，则数列$\{a_n\}$是等比数列.

(b)等比中项法：若 $a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$($n\in\mathbf{N}^*$)，则数列$\{a_n\}$是等比数列.

(c)通项公式法：若 $a_n=pq^n$(p，q 为常数且 $p,q\neq 0$)，则数列$\{a_n\}$是等比数列.

5. 解决关于数列的不等式证明问题常用放缩法，解决数列的最值问题常用基本不等式法.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

解答 1　等差、等比数列基本量的计算

例 1　已知$\{a_n\}$是递增的等比数列，$a_5=48$，$4a_2$，$3a_3$，$2a_4$ 成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{b_n\}$满足 $b_1=a_2$，$b_{n+1}=b_n+a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

［听课笔记］

【考场点拨】

由等差数列、等比数列组成的综合问题，首先要根据两数列的概念，设出相应的基本量，充分使用通项公式、求和公式、数列的性质，确定基本量. 解综合题的成败在于审清题目，弄懂来龙去脉，揭示问题的内在联系和隐含条件，形成解题策略.

【自我检测】

已知等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0，且 $a_4=7$，a_2，a_6-2a_1，a_{14} 分别是等比数列$\{b_n\}$的前三项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n>2020$，求 n 的取值范围.

解答2 数列的证明问题

例2 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_2-a_1=1$,其前 n 项和为 S_n,当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}-1,S_n,S_{n+1}$成等差数列.

(1)求证:$\{a_n\}$为等差数列;

(2)若 $S_n=0,S_{n+1}=4$,求 n 的值.

[听课笔记]

【考场点拨】

判断或证明数列是等差或等比数列的方法:(1)将所给的关系式进行变形、转化,以便使用等差数列或等比数列的定义进行判断;(2)若要判断一个数列不是等差(等比)数列,则只需说明某连续三项(如前三项)不是等差(等比)数列即可.

【自我检测】

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{2}$,$(n+1)a_n=1-\frac{1}{na_{n-1}+1}(n\geqslant 2,n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)求 a_2,a_3 的值;

(2)求证:数列$\left\{\frac{1}{(n+1)a_n}\right\}$为等差数列.

解答3 数列的求和问题

例3 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_3+a_5=18$,$S_3+S_5=50$.数列$\{b_n\}$为等比数列,且 $b_1=a_1$,$3b_2=a_1a_4$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)记 $c_n=\frac{4}{(\log_3 b_n^2+3)\cdot a_n}$,其前 n 项和为 T_n,证明:$T_n<\frac{2}{3}$.

[听课笔记]

【考场点拨】

裂项相消法就是把数列的每一项分解成一正一负的两项,使得相加后,项与项之间能够相互抵消,但在抵消的过程中,有的是相邻项相消,有的是间隔项相消.常见的裂项方式有:$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$;$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$;$\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$等.

例4 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$a_1=2$,$a_n>0$,且$a_{n+1}^2-2a_{n+1}\cdot a_n-3a_n^2=0$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设$b_n=\log_3(1+S_n)$,求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和T_n.

[听课笔记]

【考场点拨】

当数列$\{a_n\}$是等差数列,$\{b_n\}$是等比数列,求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和时,可采用错位相减法.用错位相减法求数列的前n项和时,应注意:①等比数列的公比为负数的情形;②在写出"S_n"和"qS_n"的表达式时应特别注意将两式"错项对齐",以便准确写出"S_n-qS_n"的表达式.

【自我检测】

1. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$1,a_n,S_n$成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_2a_1+\log_2a_2+\cdots+\log_2a_n$,$T_n=\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\cdots+\frac{1}{b_{n+1}}$,求$T_n$.

2. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_n\neq0$,且满足$32a_3+32a_{11}=a_7^2$,数列$\{b_n\}$满足$b_{n+1}-2b_n=0$,$b_7=a_7$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(2)若$c_n=nb_n$,求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n.

请完成 限时集训(十一)

04 模块四 立体几何

第 12 讲　空间几何体、空间中的位置关系

D 典型真题研析

六年典型真题甄选　解法、结论、拓展研析

1. [2019 · 全国卷Ⅱ] 中国有悠久的金石文化，印信是金石文化的代表之一. 印信的形状多为长方体、正方体或圆柱体，但南北朝时期的官员独孤信的印信形状是“半正多面体”(图 M4-12-1①). 半正多面体是由两种或两种以上的正多边形围成的多面体. 半正多面体体现了数学的对称美. 图②是一个棱数为 48 的半正多面体，它的所有顶点都在同一个正方体的表面上，且此正方体的棱长为 1. 则该半正多面体共有______个面，其棱长为______.


①

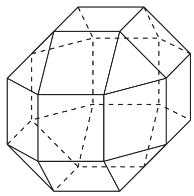

②

图 M4-12-1

[试做]

方法　由直观图求三视图的问题

1. 注意正视图、侧视图和俯视图的观察方向；
2. 注意看到的部分是实线，看不到的部分是虚线.

2. (1)[2017 · 全国卷Ⅰ] 某多面体的三视图如图 M4-12-2 所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为 2，俯视图为等腰直角三角形，该多面体的各个面中有若干个是梯形，这些梯形的面积之和为　　(　　)

A. 10　　B. 12

C. 14　　D. 16

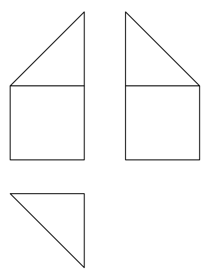


图 M4-12-2

(2)[2018 · 全国卷Ⅱ] 已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°. 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为________.

(3)[2019 · 全国卷Ⅲ] 学生到工厂劳动实践，利用 3D 打印技术制作模型，如图 M4-12-3，该模型为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 挖去四棱锥 $O-EFGH$ 后所得的几何体，其中 O 为长方体的中心，E，F，G，H 分别为所在棱的中点，$AB=BC=6$ cm，$AA_1=4$ cm. 3D 打印所用原料密度为 0.9 g/cm^3. 不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量为________g.

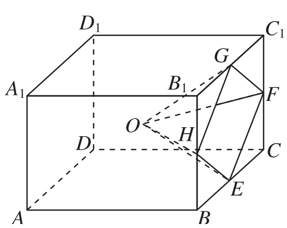


图 M4-12-3

[试做]

知识　求解几何体表面积或体积的几个注意点

1. 观察三视图时，需注意图中的虚、实线.
2. 利用补形法，将几何体补成长方体或者正方体等常见几何体.
3. 求不规则几何体的表面积或体积时，通常将所给几何体分割为基本的柱、锥、台体等.
4. 求组合体的表面积时，需注意组合体的衔接部分的面积，分清侧面积和表面积.

3. (1)[2019·全国卷Ⅲ] 如图M4-12-4，点 N 为正方形 $ABCD$ 的中心，$\triangle ECD$ 为正三角形，平面 $ECD\perp$ 平面 $ABCD$，M 是线段 ED 的中点，则 (　　)

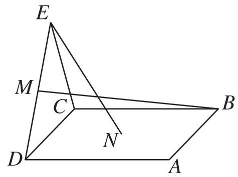


图 M4-12-4

A. $BM=EN$，且直线 BM，EN 是相交直线
B. $BM\neq EN$，且直线 BM，EN 是相交直线
C. $BM=EN$，且直线 BM，EN 是异面直线
D. $BM\neq EN$，且直线 BM，EN 是异面直线

(2)[2016·全国卷Ⅱ] α，β 是两个平面，m，n 是两条直线，有下列四个命题：
①如果 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$，那么 $\alpha\perp\beta$.
②如果 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，那么 $m\perp n$.
③如果 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，那么 $m/\!/\beta$.
④如果 $m/\!/n$，$\alpha/\!/\beta$，那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.
其中正确的命题有________.（填写所有正确命题的编号）

[试做]

方法　空间中线面位置关系的判定
1. 逐个寻找反例作出否定的判断，或逐个进行逻辑证明作出肯定的判断.
2. 结合长方体模型或实际空间位置(如教室、课桌、灯管)作出判断，但要注意准确应用定理，考虑问题全面细致.

4. (1)[2019·全国卷Ⅰ] 已知三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90^\circ$，则球 O 的体积为 (　　)
A. $8\sqrt{6}\pi$　　B. $4\sqrt{6}\pi$　　C. $2\sqrt{6}\pi$　　D. $\sqrt{6}\pi$

(2)[2018·全国卷Ⅲ] 设 A，B，C，D 是同一个半径为4的球的球面上四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D\text{-}ABC$ 体积的最大值为 (　　)
A. $12\sqrt{3}$　　B. $18\sqrt{3}$　　C. $24\sqrt{3}$　　D. $54\sqrt{3}$

[试做]

结论　几何体与球
1. 长方体的外接球的直径即长方体体对角线的长.
2. 设正四面体的棱长为 a，则其外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，内切球的半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{12}a$.

5. [2018·全国卷Ⅰ] 已知正方体的棱长为1，每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 (　　)
A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[试做]

方法　几何体的截面问题
1. 根据已知条件确定所求截面或与所求截面平行的平面.
2. 根据平面特点利用数形结合思想确定截面形状.

6. [2018·全国卷Ⅱ] 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 (　　)
A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[试做]

方法　求解异面直线所成的角
1. 先通过作图(三角形中位线、平行四边形补形)来构造平行线，再通过解三角形求解.
2. 补形法(补成长方体、正方体).

K 考点考法探究

核心考点全面提升 题型、考法、思维强化

小题1 空间几何体的三视图与直观图

例1 (1)如图 M4-12-5 所示,网格纸上小正方形的边长为 1,粗线画出的是某几何体的三视图,则此几何体的各个面中是直角三角形的面的个数为 ( )

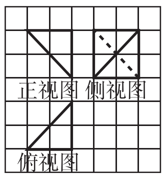


图 M4-12-5

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

(2)如图 M4-12-6 所示,一个动点从正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 处出发,经正方体的表面,按最短路线到达顶点 C_1 的位置,则下列图形中可以表示正方体及动点运动的最短路线的正视图的是 ( )

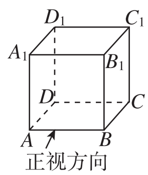
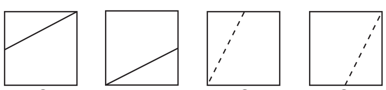


图 M4-12-6



① ② ③ ④

图 M4-12-7

A. ①②　　B. ①③

C. ②④　　D. ③④

[听课笔记]

【考场点拨】

识别三视图应注意以下几个方面:①看线型,是线段、虚线还是含有曲线,可确定此几何体是简单多面体还是旋转体等;②分部分,想整体,看是简单几何体还是组合体;③对比一些熟悉的三视图模型分析,如正方体、圆锥、三棱锥等三视图模型.

【自我检测】

1. 一个锥体的正视图和侧视图如图 M4-12-8 所示,则下面的选项中,不可能是该锥体的俯视图的是 ( )

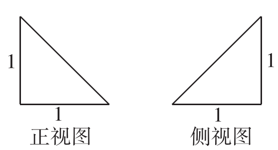


图 M4-12-8

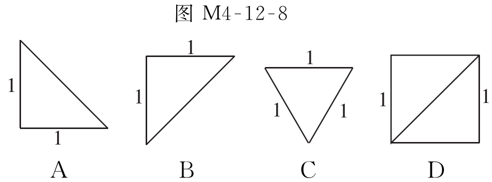


图 M4-12-9

2. 已知某四面体的三视图如图 M4-12-10 所示,其中正视图、侧视图、俯视图是全等的等腰直角三角形,则该四面体的四个面中直角三角形的个数为 ( )

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

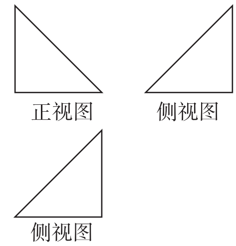


图 M4-12-10

3. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 2,底面三角形的边长分别为 3,4,5.若球 O 内切于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,其正视图和俯视图如图 M4-12-11 所示,则其侧视图是 ( )

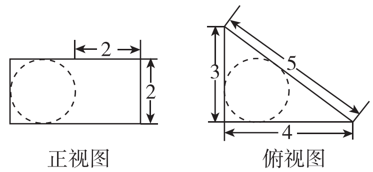


图 M4-12-11

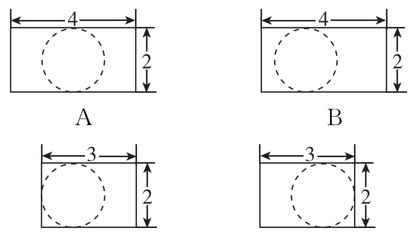


图 M4-12-12

小题2 空间几何体的表面积与体积

例2 (1)在轴截面顶角为直角的圆锥内作一内接圆柱,若圆柱的表面积等于圆锥的侧面积,则圆锥的底面半径与圆柱的底面半径的比值为 ( )

A. $\sqrt{2}$　　B. 2

C. $2\sqrt{2}$　　D. 4

(2)如图 M4-12-13,在 Rt△ABC 中,$AB=BC=1$,D 和 E 分别是边 BC 和 AC 上异于端点的点,$DE\perp BC$,将△CDE 沿 DE 折起,使点 C 到点 P 的位置,则四棱锥 $P-ABDE$ 体积的最大值为________.

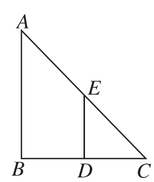


图 M4-12-13

[听课笔记]

【考场点拨】

求几何体的表面积和体积的易失分点:(1)计算表面积时,有些面的面积没有计算到(或重复计算);(2)一些不规则几何体的体积不会采用分割法或补形思想转化求解;(3)求几何体体积的最值时,不注意使用基本不等式或求导等确定最值.

【自我检测】

1. 如图 M4-12-14，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，动点 E 在 BB_1 上，动点 F 在 A_1C_1 上，O 为底面 $ABCD$ 的中心，若 $BE=x$，$A_1F=y$，则三棱锥 $O-AEF$ 的体积 ( )

A. 与 x，y 都有关　　B. 与 x，y 都无关

C. 与 x 有关，与 y 无关　　D. 与 y 有关，与 x 无关

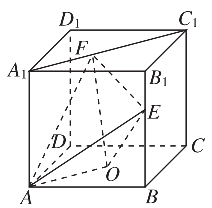


图 M4-12-14

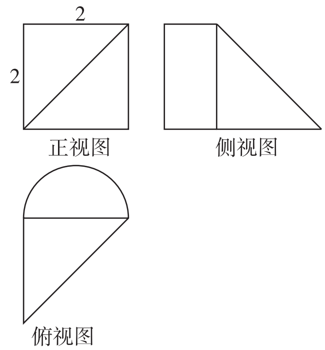


图 M4-12-15

2. 某几何体的三视图如图 M4-12-15 所示，其中正视图是正方形，侧视图是直角梯形，俯视图由一个半圆和一个等腰直角三角形组成，则该几何体的体积为 ( )

A. $\frac{\pi}{2}+4$　　B. $\pi+4$

C. $\frac{3\pi+4}{3}$　　D. $\frac{3\pi+8}{3}$

3. 已知一个圆柱的轴截面为正方形，其侧面积为 S_1，与该圆柱等底等高的圆锥的侧面积为 S_2，则$\frac{S_2}{S_1}$的值为________.

4. 已知正四棱锥的底面边长为 2，表面积为 12，则它的体积为________.

小题 3　多面体与球

角度 1　外接球

例 3　已知三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 6，在$\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=4$，$\angle BAC=60°$，且三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心 O 恰好是 AD 的中点，则球 O 的表面积为 ( )

A. $\frac{32\pi}{3}$　　B. $\frac{64\pi}{3}$　　C. 43π　　D. 42π

[听课笔记]

【考场点拨】

解决多面体外接球问题的关键是确定球心的位置，方法是先选择多面体中的一面，确定此面多边形外接圆的圆心，再过此圆心作垂直此面的垂线，则球心一定在此垂线上，最后根据其他顶点的情况确定球心的准确位置. 对于特殊的多面体还可通过补成正方体或长方体的方法找到球心位置.

【自我检测】

1. 直三棱柱 $ABC-A'B'C'$的所有棱长均为 $2\sqrt{3}$，则此三棱柱的外接球的表面积为 ( )

A. 12π　　B. 16π

C. 28π　　D. 36π

2. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$BC\perp BD$，$AB=AD=BD=4\sqrt{3}$，$BC=6$，平面 $ABD\perp$平面 BCD，则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球体积为 ( )

A. 36π　　B. $\frac{256\pi}{3}$　　C. $\frac{500\pi}{3}$　　D. 288π

3. 已知三棱锥 A-BCD 中，$BC\perp CD$，$BC=1$，$CD=\sqrt{3}$，$AB=AD=\sqrt{2}$，则该三棱锥的外接球的体积为________.

角度 2　内切球

例 4　如图 M4-12-16，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=4$，$AC=2\sqrt{7}$，$PB=BC=2\sqrt{3}$，$PA\perp$平面 PBC，则三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的表面积为________.

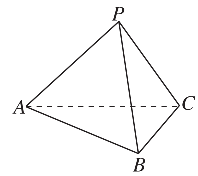


图 M4-12-16

[听课笔记]

【考场点拨】

求解多面体的内切球问题的关键是求内切球的半径. 求内切球半径的一般方法为：将多面体分割为以球心为顶点，多面体的各面为底面的棱锥，利用多面体的体积等于各分割棱锥的体积之和求内切球的半径.

【自我检测】

1. 已知一圆锥的底面直径与母线长相等，一球体与该圆锥的所有母线和底面都相切，则球的表面积与圆锥的表面积的比值为 ( )

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{2\sqrt{6}}{9}$　　D. $\frac{8}{27}$

2. 在封闭的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球. 若 $AB=6$，$AA_1=4$，则 V 的最大值是 ( )

A. 16π　　B. $\frac{32\pi}{3}$　　C. 12π　　D. $4\sqrt{3}\pi$

3. 已知一个高为 1 的三棱锥，各侧棱长都相等，底面是边长为 2 的等边三角形，内有一个体积为 V 的球，则 V 的最大值为 ( )

A. $\frac{4\pi}{81}$　　B. $\frac{4\pi}{27}$

C. $\frac{4\pi}{9}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

小题 4　空间线面位置关系的判断

角度 1　线面位置关系

例 5　(1)已知 α,β,γ 是三个不同的平面，m,n 是两条不同的直线，给出下列命题：

①若 $m\parallel\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m\parallel n$；

②若 $\alpha\cap\beta=m$，$m\parallel n$，且 $n\not\subset\alpha$，$n\not\subset\beta$，则 $n\parallel\alpha$，$n\parallel\beta$；

③若 $n\perp\alpha$，$m\subset\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则 $m\perp n$；

④$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\gamma$，则 $m\perp n$.

其中真命题的个数是 ( )

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

(2)如图 M4-12-17 所示,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P 为棱 CC_1 上异于其中点的动点,Q 为棱 AA_1 的中点,设直线 m 为平面 BDP 与平面 B_1D_1P 的交线,以下结论中正确的是 ( )

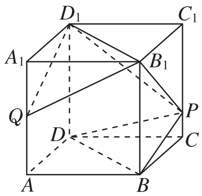


图 M4-12-17

A. $m // D_1Q$

B. $m \perp B_1Q$

C. $m //$ 平面 B_1D_1Q

D. $m \perp$ 平面 ABB_1A_1

[听课笔记]

【考场点拨】

判断空间中点、线、面的位置关系,主要依赖四个公理、平行关系和垂直关系的有关定义及定理、性质,具体处理时可以构建长方体或三棱锥等模型,把要考查的点、线、面融入模型中,判断会简洁明了.如果要否定一个结论,只需找到一个反例即可.

【自我检测】

1. 已知 α,β 是两个不重合的平面,在下列条件中,可判断平面 α,β 平行的是 ( )

A. m,n 是平面 α 内的两条直线,且 $m // \beta, n // \beta$

B. m,n 是两条异面直线,$m \subset \alpha, n \subset \beta$,且 $m // \beta, n // \alpha$

C. α 内不共线的三点到 β 的距离相等

D. α,β 都垂直于平面 γ

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 O 是四边形 $ABCD$ 的中心,关于直线 A_1O,下列说法正确的是 ( )

A. $A_1O // DC$　　B. $A_1O \perp BC$

C. $A_1O //$ 平面 B_1CD_1　　D. $A_1O \perp$ 平面 ABD

角度 2 异面直线所成的角、线面角

例 6 (1)如图 M4-12-18 所示,在三棱锥 $A-BCD$ 中,$AB=BC=CD=DA=a$,$\angle BCD=90°$,平面 $ABD \perp$ 平面 BCD,则异面直线 AD 与 BC 所成角的大小为 ( )

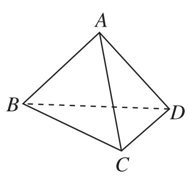


图 M4-12-18

A. $30°$　B. $45°$　C. $60°$　D. $90°$

(2)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为棱 CD 上一点,且 $CE=2DE$,F 为棱 AA_1 的中点,且平面 BEF 与 DD_1 交于点 G,则 B_1G 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　C. $\frac{5\sqrt{2}}{12}$　D. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

[听课笔记]

【考场点拨】

(1)对于异面直线所成的角,一般是通过平移构建三角形求角,要注意异面直线所成的角是锐角或直角,若计算出是钝角时,其补角才是异面直线所成的角.

(2)求直线和平面所成角的关键是作出这个平面的垂线,则斜线和射影所成角即为所求.

(3)当空间关系较为复杂时也可以建立空间直角坐标系,利用向量求解.

【自我检测】

1. 如图 M4-12-19,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱长为 $\sqrt{2}$,底面三角形的边长为 1,则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的大小为 ( )

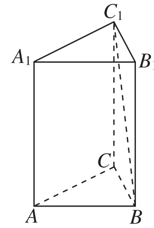


图 M4-12-19

A. $30°$　B. $45°$

C. $60°$　D. $90°$

2. 已知异面直线 a,b 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$,直线 $a \perp c$,则异面直线 b 与 c 所成角的取值范围为 ( )

A. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$　B. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

3. 如图 M4-12-20 所示,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=AC=AA_1=\sqrt{2}$,$BC=2$,点 D 为 BC 的中点,则异面直线 AD 与 A_1C 所成的角为 ( )

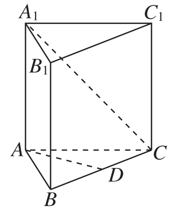


图 M4-12-20

A. $\frac{\pi}{2}$　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　D. $\frac{\pi}{6}$

角度 3 截面问题

例 7 已知正四面体 $A-BCD$ 的内切球的表面积为 36π,过该四面体的一条棱以及球心的平面截正四面体 $A-BCD$,则所得截面的面积为 ( )

A. $27\sqrt{2}$　B. $27\sqrt{3}$　C. $54\sqrt{2}$　D. $54\sqrt{3}$

[听课笔记]

【考场点拨】

解决几何体截面面积问题的关键是确定截面图形的位置、形状、经过的点,再根据有关数量计算截面面积.

【自我检测】

1. 图 M4-12-21 是某几何体的三视图,则过该几何体顶点的所有截面中,最大的截面面积是 ( )

A. 2　B. $\sqrt{3}$　C. 4　D. $\frac{3}{2}\pi$

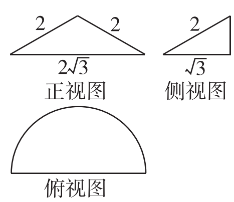


图 M4-12-21

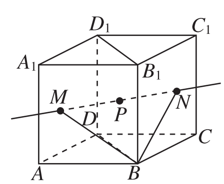


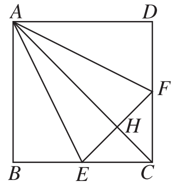
图 M4-12-22

2. 如图 M4-12-22,P 是棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角面 BB_1D_1D 上的一动点,过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线,与正方体的侧面相交于 M,N 两点,则 $\triangle BMN$ 的面积的最大值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

角度4 翻折问题

例8 如图M4-12-23，在边长为2的正方形$ABCD$中，E,F分别为BC,CD的中点，H为EF的中点，沿AE,EF,FA将正方形折起，使B,C,D重合于点O，在构成的四面体$A-OEF$中，下列结论错误的是 ( )



图M4-12-23

A. $AO\perp$平面EOF

B. 直线AH与平面EOF所成角的正切值为$2\sqrt{2}$

C. 四面体$A-OEF$的外接球的表面积为6π

D. 异面直线OH和AE所成的角为60°

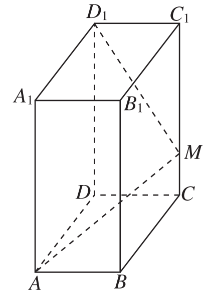
［听课笔记］

【考场点拨】

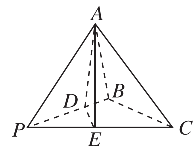
翻折问题，关键是分清翻折前后图形的位置和数量关系的变与不变.一般地，位于"折痕"同侧的点、线、面之间的位置和数量关系不变，而位于"折痕"两侧的点、线、面之间的位置关系会发生变化；对于不变的关系应在平面图形中处理，而对于变化的关系则要在立体图形中解决.

【自我检测】

1. 如图M4-12-24，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，点M在棱CC_1上，当MD_1+MA取得最小值时，$MD_1\perp MA$，则棱CC_1的长为________.



图M4-12-24



图M4-12-25

2. 如图M4-12-25，在三棱锥$P-ABC$中，AP,AB,AC两两垂直，且$AP=AB=AC=\sqrt{2}$.若点D,E分别在棱PB,PC上运动（都不含端点），则$AD+DE+EA$的最小值为________.

请完成 限时集训（十二）

第13讲 立体几何

D 典型真题研析

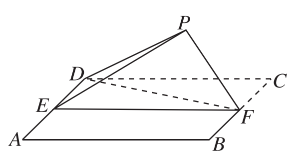
六年典型真题甄选 解法、结论、拓展研析

1. ［2018·全国卷Ⅰ］如图M4-13-1所示，四边形$ABCD$为正方形，E,F分别为AD,BC的中点，以DF为折痕把$\triangle DFC$折起，使点C到达点P的位置，且$PF\perp BF$.

(1)证明：平面$PEF\perp$平面$ABFD$；

(2)求DP与平面$ABFD$所成角的正弦值.

［试做］



图M4-13-1

策略 解决立体几何解答题

1. 证明平行、垂直问题的方法：

(1)平行：证明线面平行或者面面平行一般先证明线线平行，主要是利用三角形中位线或者构建平行四边形或者利用线面平行的性质定理等证明；

(2)垂直：证明线面垂直或者面面垂直主要是证明线线垂直，主要结合几何图形的特征，通过等腰或等边三角形的三线合一、菱形的对角线垂直、勾股定理、线面垂直关系的转化等证明.

2. [2019·全国卷Ⅲ] 如图 M4-13-2,图①是由矩形 $ADEB$,Rt△ABC 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形,其中 $AB=1$,$BE=BF=2$,$\angle FBC=60°$. 将其沿 AB,BC 折起使得 BE 与 BF 重合,连接 DG,如图②.

(1)证明:图②中的 A,C,G,D 四点共面,且平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$;

(2)求图②中的二面角 B-CG-A 的大小.

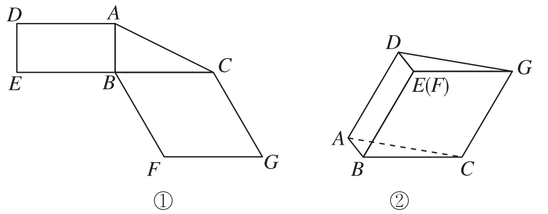


图 M4-13-2

[试做]

2. 利用空间向量求直线与平面所成的角的主要方法:

求出斜线的方向向量与平面的法向量所夹的锐角,其余角就是斜线和平面所成的角.

注意:若直线 l 与平面 α 的夹角为 θ,直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{l}$ 与平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 β,则 $\theta=\frac{\pi}{2}-\beta$ 或 $\theta=\beta-\frac{\pi}{2}$,故有 $\sin\theta=|\cos\beta|=\frac{|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{n}|}$,线面角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

3. 求二面角最常用的方法:

首先分别求出二面角的两个半平面所在平面的法向量,然后通过两个平面的法向量的夹角得到二面角的大小,但要注意结合实际图形判断所求角是锐角还是钝角.

K 考点考法探究

核心考点全面提升　题型、考法、思维强化

解答1　平行、垂直关系的证明

例1 如图 M4-13-3 所示,在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中,$AB=AC$,侧面 $BCC_1B_1\perp$ 底面 ABC,E,F 分别为棱 BC 和 A_1C_1 的中点.

(1)求证:EF∥平面 ABB_1A_1;

(2)求证:平面 $AEF\perp$ 平面 BCC_1B_1.

[听课笔记]

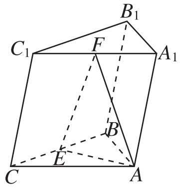


图 M4-13-3

【考场点拨】

(1)证明线面平行的关键是在平面中找到一条与已知直线平行的直线,找直线的方法一般是从三角形的中位线、平行四边形、比例线段平行等方面入手,也可以通过面面平行证线面平行,这个方法的关键是构造过已知直线的平面.

(2)面面垂直的判定可由线面垂直得到,而线面垂直可通过线线垂直得到,注意平面中两条直线是相交的.由面面垂直也可得到线面垂直,注意直线在平面内且直线垂直于两个垂直平面的交线.

【自我检测】

如图 M4-13-4 所示,在多面体 $ABCDEF$ 中,平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$. 四边形 $ADEF$ 为正方形,四边形 $ABCD$ 为梯形,且 AD∥BC,△ABD 是边长为 1 的等边三角形,$BC=3$.

(1)求证:$AF\perp BD$.

(2)线段 BD 上是否存在点 N,使得直线 CE∥平面 AFN?若存在,求$\frac{BN}{BD}$的值;若不存在,请说明理由.

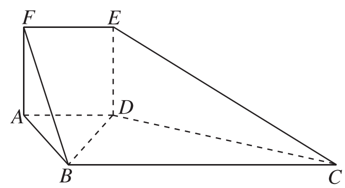


图 M4-13-4

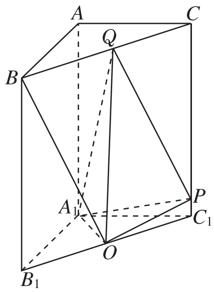
解答2 利用空间向量求角的问题

例2 如图M4-13-5所示,在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$A_1B_1=A_1C_1=2$,$CC_1=2\sqrt{3}$,$\angle BAC=120°$,O为棱B_1C_1的中点,P为棱CC_1上一动点(异于点C,C_1),Q为棱BC上一动点,且$QP\perp OP$.

(1)求证:平面$A_1PQ\perp$平面A_1OP;

(2)若$BO\parallel PQ$,求直线OP与平面A_1PQ所成角的正弦值.

[听课笔记]



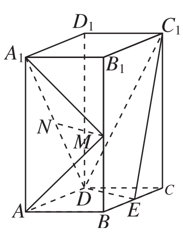
图M4-13-5

例3 [2019·全国卷Ⅰ] 如图M4-13-6所示,直四棱柱$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的底面是菱形,$AA_1=4$,$AB=2$,$\angle BAD=60°$,E,M,N分别是BC,BB_1,A_1D的中点.

(1)证明:$MN\parallel$平面C_1DE;

(2)求二面角$A\text{-}MA_1\text{-}N$的正弦值.

[听课笔记]



图M4-13-6

【考场点拨】

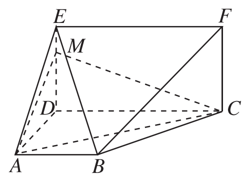
求解空间角的注意点:(1)用向量法求出的异面直线所成的角的余弦值必须为正;(2)若直线的方向向量$\boldsymbol{l}$与平面的法向量$\boldsymbol{n}$的夹角为θ,则直线与平面的夹角$\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta\left(\text{或}\alpha=\theta-\frac{\pi}{2}\right)$,故有$\sin\alpha=|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{l}||\boldsymbol{n}|}$;(3)要结合图形分析所求的二面角是锐角还是钝角,以防结论错误.

【自我检测】

1. 如图M4-13-7,平面$ABCD\perp$平面$CDEF$,且四边形$ABCD$是梯形,四边形$CDEF$是矩形,$\angle BAD=\angle CDA=90°$,$AB=AD=DE=\frac{1}{2}CD$,$M$是棱$DE$上的点,且$DM=2ME$.

(1)证明:$BE\parallel$平面MAC;

(2)求直线BF与平面MAC所成角的正弦值.

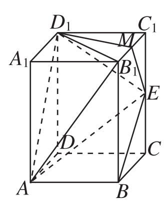


图M4-13-7

2. 如图M4-13-8所示,在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,M,E分别为棱B_1C_1,CC_1的中点,$AB=\sqrt{2}$,$AA_1=2$.

(1)证明:平面$D_1EM\perp$平面ABE;

(2)求平面AB_1D_1与平面ABE所成锐二面角的余弦值.



图M4-13-8

3. 如图 M4-13-9 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PC\perp$平面 $ABCD$，M 为 PB 的中点，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB/\!/CD$，$AD\perp CD$，$AD=CD=PC=\frac{1}{2}AB$.

(1)证明：$CM/\!/$平面 PAD；

(2)求平面 PAD 与平面 PBC 所成的锐二面角的大小.

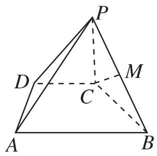


图 M4-13-9

解答 3　利用空间向量解决探索性问题

例 4　如图 M4-13-10 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB/\!/DC$，$\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，$AB=AD=\frac{1}{2}CD=2$，$PD=PB=\sqrt{6}$，$PD\perp BC$.

(1)求证：平面 $PBD\perp$平面 PBC.

(2)在棱 PC 上是否存在点 M，使得平面 ABM 与平面 PBD 所成锐二面角为$\frac{\pi}{3}$？若存在，求$\frac{CM}{CP}$的值；若不存在，说明理由.

［听课笔记］

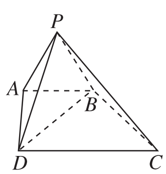


图 M4-13-10

【考场点拨】

与空间向量有关的探索性问题主要有两类：一是探索线面平行或垂直的位置关系；二是探索线面角或二面角满足什么要求. 解题原则是：先建立空间直角坐标系，引入参数(有些是题中已给出)，设出关键点的坐标，然后探索这样的点是否存在，或参数是否满足要求，从而作出判断.

【自我检测】

如图 M4-13-11 所示，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A\perp$底面 $ABCD$，$AB\perp AC$，$AB=1$，$AC=AA_1=2$，$AD=CD=\sqrt{5}$，E 为棱 AA_1 上的点，且 $AE=\frac{1}{2}$.

(1)求证：$BE\perp$平面 ACB_1.

(2)求二面角 D_1-AC-B_1 的余弦值.

(3)棱 A_1B_1 上是否存在点 F，使得直线 $DF/\!/$平面 ACB_1？若存在，求 A_1F 的长；若不存在，说明理由.

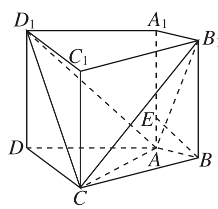


图 M4-13-11

请完成　限时集训(十三)