参考答案

第一章 坐标系

§1 平面直角坐标系

1.1 平面直角坐标系与曲线方程

【预习探究】

知识点一

1. (x,y) (x,y) 一一对应

知识点二

(1)坐标原点 (2)坐标轴 (3)特殊点

知识点三

探究 $-3<m<\frac{1}{2}$ [解析]∵第三象限点的坐标特征是横坐标与纵坐标均小于0,∴$\begin{cases}-1+2m<0,\\-3-m<0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m<\frac{1}{2},\\m>-3,\end{cases}$即$-3<m<\frac{1}{2}$.

【考点类析】

考点一

例1 $(0,0),(2,0),(1,\sqrt{3})$ [解析]由题知,点A在坐标原点,点B在x轴的正半轴上,点C在第一象限,则点A的坐标为$(0,0)$.

∵等边三角形ABC的边长为2,即$|OB|=2$,

∴点B的坐标为$(2,0)$.

过C作$CM\perp OB$,垂足为M,

则$|OM|=\frac{1}{2}|OB|=1$,$|CM|=\frac{\sqrt{3}}{2}|OB|=\sqrt{3}$,

∴点C的坐标为$(1,\sqrt{3})$.

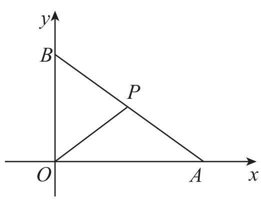
例2 (1)$\left(\frac{1}{2},2\right)$,$\left(-3,-\frac{1}{3}\right)$ (2)$(1,3)$

[解析](1)将两方程联立,解方程组即可.

(2)设$D(x,y)$,则线段AC的中点与线段BD的中点重合,即$\begin{cases}-1+5=3+x,\\2+1=0+y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$故$D(1,3)$.

考点二

例3 解:方法一:如图所示,



设$P(x,y)$,由于$\triangle OAB$是直角三角形,P为AB的中点,所以$|OP|=\frac{1}{2}|AB|$,即$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\times4$,即$x^2+y^2=4$.故点$P$的轨迹方程为$x^2+y^2=4$.

方法二:设$P(x,y)$,$A(x_1,0)$,$B(0,y_2)$,

则$x_1^2+y_2^2=16$.

因为P为AB的中点,所以$x_1=2x$,$y_2=2y$,

即$4x^2+4y^2=16$,

故点P的轨迹方程为$x^2+y^2=4$.

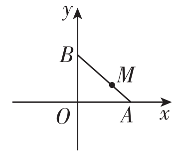
例4 解:设点$C(x,y)$,由$\angle ACB=90°$,得$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$,

∴$(-1-3)^2+(3-3)^2=(x+1)^2+(y-3)^2+(x-3)^2+(y-3)^2$,整理得$x^2+y^2-2x-6y+6=0$,又点$C$与$A,B$不重合,故点$C$的轨迹方程为$x^2+y^2-2x-6y+6=0(x\neq-1$且$x\neq3)$.

变式 解:如图所示,设$A(x_A,0)$,$B(0,y_B)$,$M(x,y)$.

∵$AB=6$,∴$\sqrt{x_A^2+y_B^2}=6$,即$x_A^2+y_B^2=36$.①

又∵$AM:MB=1:2$,



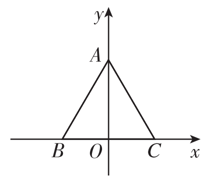
∴$x=\frac{x_A}{1+\frac{1}{2}}$,$y=\frac{\frac{1}{2}y_B}{1+\frac{1}{2}}$,

∴$\begin{cases}x_A=\frac{3}{2}x,\\y_B=3y,\end{cases}$代入①式得$\frac{9}{4}x^2+9y^2=36$,即$x^2+4y^2=16$.

故动点M的轨迹方程为$x^2+4y^2=16$.

考点三

例5 解:以BC所在直线为x轴,BC的垂直平分线为y轴,建立平面直角坐标系,如图所示,



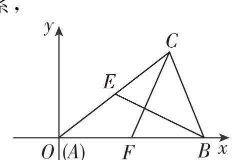
则$A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$,$B\left(-\frac{a}{2},0\right)$,$C\left(\frac{a}{2},0\right)$.

设$P(x,y)$,则$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+y^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=3x^2+3y^2-\sqrt{3}ay+\frac{5a^2}{4}=3x^2+3\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2+a^2\geqslant a^2$,

当且仅当$x=0$,$y=\frac{\sqrt{3}}{6}a$时等号成立,

故所求最小值为a^2,此时点P的坐标为$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$,它是等边三角形$ABC$的中心.

变式 解:如图,以$\triangle ABC$的顶点A为原点,边AB所在直线为x轴,建立平面直角坐标系,



则$A(0,0)$,$B(c,0)$,$F\left(\frac{c}{2},0\right)$.

设$C(x,y)$,则$E\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$.

由$b^2+c^2=5a^2$,得$|AC|^2+|AB|^2=5|BC|^2$,

即$x^2+y^2+c^2=5[(x-c)^2+y^2]$,

整理得$2y^2=(2x-c)(2c-x)$,

∴$x\neq\frac{c}{2}$且$x\neq2c$,

∴BE,CF所在直线的斜率存在.

又∵$k_{BE}=-\frac{y}{2c-x}$,$k_{CF}=\frac{2y}{2x-c}$,

∴$k_{BE}\cdot k_{CF}=\frac{-2y^2}{(2x-c)(2c-x)}=-1$,

∴BE与CF互相垂直.

1.2 平面直角坐标轴中的伸缩变换

【预习探究】

知识点一

1. 坐标压缩变换 2. 坐标伸长变换

3. 坐标伸缩变换

思考 解:变换中的系数均为正数,在伸缩变换下,平面直角坐标系保持不变,即在同一坐标系下只对点的坐标进行伸缩变换.

探究 解:(1)把点$(1,2)$的坐标代入$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$得$x'=2$,

$y'=6$,即点(1,2)经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$ 后所得点的坐标为(2,6).

(2)由伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x',\\y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$ 把 $x'=4,y'=9$ 代入 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x',\\y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$

得 $x=2,y=3$,所以点 A 的坐标为(2,3).

知识点二

直线　椭圆　圆　抛物线　双曲线

讨论　**解**:经过伸缩变换后,直线仍为直线;圆可以变为椭圆;圆不能变为正方形.

【考点类析】

考点一

例1　(1,−1)　[**解析**] 设 $A'(x',y')$,由伸缩变换 φ: $\begin{cases}x'=3x,\\2y'=y,\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x'=3x,\\y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$

由于点 A 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},-2\right)$,

于是 $x'=3\times\frac{1}{3}=1,y'=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$,

∴A'的坐标为(1,−1).

例2　**解**:由伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2x',\\y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$ ①

将①代入 $2x-6y+1=0$,得经过变换后的图形的方程是 $2\times2x'-6\times\frac{1}{3}y'+1=0$,即 $4x'-2y'+1=0$,

因此,直线 $2x-6y+1=0$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y\end{cases}$ 后,变成直线 $4x'-2y'+1=0$.

变式　**解**:由已知,得 (x,y) 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y\end{cases}$ 后变成点 (x',y'),其中 $x'=3x,y'=2y$,

∴点 $A(-2,1),B(-1,3),C(3,4),D(2,2)$ 经过变换后的点的坐标分别是 $A'(-6,2),B'(-3,6),C'(9,8),D'(6,4)$.

∵$k_{A'B'}=\frac{6-2}{-3+6}=\frac{4}{3},k_{C'D'}=\frac{4-8}{6-9}=\frac{4}{3},k_{B'C'}=\frac{8-6}{9+3}=\frac{1}{6},k_{A'D'}=\frac{4-2}{6+6}=\frac{1}{6}$,

∴$k_{A'B'}=k_{C'D'},k_{B'C'}=k_{A'D'}$,

∴$A'B'\parallel C'D',B'C'\parallel A'D'$.

又在伸缩变换下,直线仍变成直线,

∴伸缩变换将平行直线变成平行直线,

∴经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y\end{cases}$ 后,▱$ABCD$ 变成▱$A'B'C'D'$.

考点二

例3　**解**:由 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x',\\y=2y',\end{cases}$ 将其代入 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,得 $2y'=\sin\left(2\times\frac{1}{2}x'+\frac{\pi}{4}\right)$,即 $y'=\frac{1}{2}\sin\left(x'+\frac{\pi}{4}\right)$.

例4　**解**:由伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x',\\y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$ ①

将①代入 $x^2+y^2=5$,得到经过变换后的图形的方程是 $\left(\frac{1}{2}x'\right)^2+\left(\frac{1}{3}y'\right)^2=5$,即 $\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{45}=1$,

因此,圆 $x^2+y^2=5$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$ 后,变成椭圆 $\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{45}=1$.

变式1　**解**:由伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\y'=4y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3x',\\y=\frac{1}{4}y',\end{cases}$ ①

将①代入 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$,得到经过变换后的图形的方程是 $\frac{(3x')^2}{9}+\frac{\left(\frac{1}{4}y'\right)^2}{16}=1$,即 $x'^2+\frac{y'^2}{256}=1$,

因此,椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\y'=4y\end{cases}$ 后,变成椭圆 $x'^2+\frac{y'^2}{256}=1$.

变式2　**解**:设曲线 C' 上任意一点 $P'(x',y')$,由 $\begin{cases}x'=3x,\\2y'=y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}x',\\y=2y',\end{cases}$ 代入 $x^2-\frac{y^2}{64}=1$ 得 $\frac{x'^2}{9}-\frac{4y'^2}{64}=1$,化简得 $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1$,该方程即为曲线 C' 的方程,可知曲线 C' 仍是双曲线,其左、右焦点分别为(−5,0),(5,0).

考点三

例5　$\begin{cases}x'=\frac{4}{9}x,\\y'=y\end{cases}$(答案不唯一)　[**解析**] 设伸缩变换为 φ: $\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$ ①

把①代入变换后的抛物线方程 $y'^2=9x'$,得

$(\mu\cdot y)^2=9(\lambda\cdot x)$,即 $\mu^2\cdot y^2=9\lambda\cdot x$,

由于 $y^2=4x$ 与 $\mu^2\cdot y^2=9\lambda\cdot x$ 表示相同的曲线,所以 $\frac{\mu^2}{1}=\frac{9\lambda}{4}$,取 $\mu=1,\lambda=\frac{4}{9}$,得到满足条件的一个伸缩变换

φ: $\begin{cases}x'=\frac{4}{9}x,\\y'=y.\end{cases}$

例6　**解**:把伸缩变换 $\begin{cases}x'=6x,\\y'=5y\end{cases}$ 代入双曲线方程 $\frac{x'^2}{36}-\frac{y'^2}{25}=1$,得 $\frac{(6x)^2}{36}-\frac{(5y)^2}{25}=1$,即 $x^2-y^2=1$,

∴曲线 C 是双曲线 $x^2-y^2=1$.

变式　椭圆　[**解析**] 如果 x 轴的单位长度不变,y 轴的单位长度缩小为原来的 $\frac{1}{2}$,那么圆 $x^2+y^2=16$ 的图形变为中心在原点,焦点在 x 轴上的一个椭圆.

§2　极坐标系

2.1　极坐标系的概念

【预习探究】

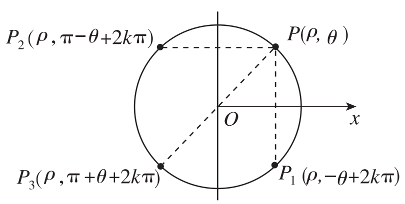
知识点一

1. 极点　极轴　平面极坐标系　极点　极轴
2. 极径　极角　极坐标　3. 任意实数

知识点二

1. 唯一确定的
2. 同一个点
3. (ρ,θ)　唯一确定

思考　**解**:如图所示,点 P 关于极轴、极垂线、极点对称的点分别为 P_1,P_2,P_3,它们的极坐标分别为 $(\rho,-\theta+2k\pi)$, $(\rho,\pi-\theta+2k\pi)$, $(\rho,\pi+\theta+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$.



讨论 解:由于终边相同的角有无数多个,即点的极角不唯一,故平面内一个点的极坐标有无数对.

4. 反向延长线上 $(\rho,\theta+2k\pi)$ $(-\rho,\theta+(2k+1)\pi)$

【考点类析】

考点一

例1 (1)③ (2)$\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ $\left(2,-\frac{4\pi}{3}\right)$ [解析](1)在极坐标系中,极坐标$\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$与$\left(2,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$表示同一个点,只有$\frac{5\pi}{3}$的终边与$\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$的终边不同,故选③.

(2)点$\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$与点$\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$关于极点对称,则点$\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$与点$\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$是同一个点,即$\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$与$\left(2,\frac{2}{3}\pi+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$表示的是同一个点,只需将角$\frac{2}{3}\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$变成相应区间内的角即可.

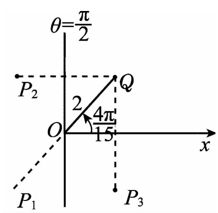
例2 解:由图可得所求各点的极坐标分别为$B\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$,$C\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$,$D\left(1,\frac{5\pi}{6}\right)$,$E(4,\pi)$,$F\left(6,\frac{4\pi}{3}\right)$,$G\left(5,\frac{5\pi}{3}\right)$.

变式 解:由图可得各点的极坐标分别为$A(0,0)$,$B(60,0)$,$C\left(120,\frac{\pi}{3}\right)$,$D\left(60\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right)$,$E\left(50,\frac{3\pi}{4}\right)$.

考点二

例3 (1)$\left(2,\frac{19\pi}{15}\right)$

(2)$\left(2,\frac{11\pi}{15}\right)$ (3)$\left(2,\frac{26\pi}{15}\right)$



[解析]如图所示,(1)点Q关于极点O的对称点P_1的极坐标是$\left(2,\frac{19\pi}{15}\right)$;(2)点$Q$关于直线$\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$的对称点$P_2$的极坐标是$\left(2,\frac{11\pi}{15}\right)$;(3)点$Q$关于极轴的对称点$P_3$的极坐标是$\left(2,\frac{26\pi}{15}\right)$.

例4 解:设极点为O,则OA与OB的夹角为$\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$,又$|OA|=3$,$|OB|=1$,则在$\triangle OAB$中,由余弦定理得$|AB|=\sqrt{3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{7}$.

变式1 解:$A\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$与$B\left(6,\frac{4\pi}{3}\right)$在同一条直线上,并且分布在极点的两侧,故线段$AB$的中点的极坐标为$\left(1,\frac{4\pi}{3}\right)$.

变式2 解:(1)由点P,Q关于极点对称,得它们的极径$|OP|=|OQ|$,极角相差$(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以点$P$的极坐标为$(\rho,(2k+1)\pi+\theta)(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由P,Q关于直线$\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$对称,得它们的极径$|OP|=|OQ|$,点$P$的极角$\theta'$满足$\theta'=\pi-\theta+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以点$P$的极坐标为$(\rho,(2k+1)\pi-\theta)(k\in\mathbf{Z})$.

2.2 点的极坐标与直角坐标的互化

【预习探究】

知识点一

极点 极轴 单位长度 $\rho\cos\theta$ $\rho\sin\theta$

思考 解:要进行点的极坐标与直角坐标的互化,必须具备的前提条件是:①极坐标系中的极点与直角坐标系中的原点重合;②极轴与x轴的正半轴重合;③两种坐标系的单位长度相同.

知识点二

1. $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq0)\end{cases}$

讨论 解:当$x\neq0$时,由$\tan\theta=\frac{y}{x}$的值,并结合点M所在的象限取最小正角即可确定极角θ.当$x=0$时,若$x=y=0$,θ可取任何值;若$x=0$,$y>0$,可取$\theta=\frac{\pi}{2}$;若$x=0$,$y<0$,可取$\theta=\frac{3\pi}{2}$.

探究 解:由$xy<0$得$x<0$,$y>0$或$x>0$,$y<0$,所以点(x,y)可能在第二象限或第四象限.把直角坐标(x,y)化为极坐标(ρ,θ),$\rho>0$,$\theta\in\mathbf{R}$时,θ的取值范围为$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\pi+2k\pi\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

【考点类析】

考点一

例1 $(-3,-3\sqrt{3})$ [解析]由极坐标与直角坐标的互化公式,得$x=\rho\cos\theta=6\cos\frac{4\pi}{3}=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$,$y=\rho\sin\theta=6\sin\frac{4\pi}{3}=6\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3\sqrt{3}$,∴点$A$的直角坐标为$(-3,-3\sqrt{3})$.

例2 解:在极坐标系中,以极点为原点,极轴为x轴的正半轴,建立直角坐标系.由极坐标与直角坐标的互化公式,得点M,N的直角坐标分别为$(0,2)$,$(\sqrt{3},1)$,根据直角坐标系中两点间的距离公式,得$|MN|=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1-2)^2}=2$.

设直线MN与极轴的正方向所成的角为θ,即θ为直线MN的倾斜角,则$\tan\theta=\frac{1-2}{\sqrt{3}-0}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

故M,N两点之间的距离为2,直线MN与极轴的正方向所成的角为$\frac{5\pi}{6}$.

变式 解:点$P\left(4,-\frac{\pi}{3}\right)$关于极轴的对称点$P'$的极坐标为$\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$,由$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,得$x=4\cos\frac{\pi}{3}=2$,$y=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$,即点$P'$的直角坐标为$(2,2\sqrt{3})$.

考点二

例3 $\frac{5\pi}{3}$ [解析]$\tan\theta=\frac{y}{x}=-\sqrt{3}$,

又点M在第四象限,极角$\theta\in[0,2\pi)$,所以$\theta=\frac{5\pi}{3}$.

例4 解:$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$,

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$,

∵点P在第二象限,∴$\theta=\frac{2\pi}{3}$,

∴点P的极坐标为$\left(2\sqrt{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

考点三

例 5 $2\sqrt{7}$ $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$ ［解析］由已知得点 A,B 的直角坐标分别为 $(2,2\sqrt{3})$，$(1,-\sqrt{3})$，因此线段 AB 的长 $|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$，线段 AB 的中点的直角坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，化为极坐标为 $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

例 6 解：由极坐标与直角坐标的互化公式，得点 A,B 的直角坐标分别为 $(\sqrt{3},1)$，$(\sqrt{3},-1)$，
由两点之间的距离公式得
$d=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+[1-(-1)]^2}=2$，
∴ A,B 两点间的距离为 2.

变式 解：由极坐标与直角坐标的互化公式，得点 M,N 的直角坐标分别为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则线段 MN 的中点的直角坐标为 $(0,\sqrt{3})$.

2.3 直线和圆的极坐标方程

【预习探究】

知识点一

1. 至少有一组 (ρ,θ) 曲线 C 极坐标方程
2. (ρ,θ) ρ θ 极坐标方程 满足条件

思考 解：由于平面上点的极坐标的表示形式不唯一，即曲线上的点的极坐标有多种表示，所以曲线的极坐标方程不唯一.

知识点二

1. $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$ 2. $\rho\cos\theta=a$
3. $\rho\sin\theta=a$ 4. $\rho\sin(\alpha-\theta)=\rho_1\sin(\alpha-\theta_1)$

思考 解：在极坐标系中，一个直线的极坐标方程只能与一条直线对应；但一条直线却可以和多个方程对应. 例如极坐标方程 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$ 与 $\theta=\frac{4\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$ 表示同一条直线.

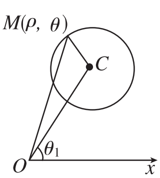
讨论 解：若 $\rho\geqslant 0$，则表示过原点，倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的射线；若 $\rho\in\mathbf{R}$，则表示过原点，倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线.

知识点三

1. $\rho=r$ 2. $\rho=2a\cos\theta$

思考 解：根据圆的几何特征——圆上任意一点到圆心的距离都等于 r，可知把极点放在圆心，可以得到最简单的表示形式：$\rho=r$.

探究 解：设圆 C 上的任意一点为 $M(\rho,\theta)$，且 O,C,M 三点不共线，不妨以如图所示的情况加以说明，在 $\triangle OCM$ 中，由余弦定理得 $|OM|^2+|OC|^2-2|OM|\cdot|OC|\cdot\cos\angle COM=|CM|^2$，所以 $\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)=r^2$. 可以检验，当 O,C,M 三点共线时，点 M 的坐标也适合上式，当 $\theta<\theta_1$ 时也满足该式，所以半径为 r，圆心为 $C(\rho_1,\theta_1)$ 的圆的极坐标方程为 $\rho^2+\rho_1^2-2\rho\rho_1\cos(\theta-\theta_1)-r^2=0$.



【考点类析】

考点一

例 1 (1) $\theta=\pm\frac{\pi}{12}$ (2) $\rho=-\frac{1}{\cos\theta}$ ［解析］(1)注意夹角的定义. (2)设 $M(\rho,\theta)$ 是直线上任意一点，则 $\angle MOx=\theta$，故有 $\rho\cos(\pi-\theta)=1$，即 $\rho=-\frac{1}{\cos\theta}$.

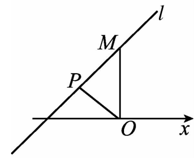
例 2 解：如图所示，设 $P(\rho,\theta)$ 是直线上除 M 外任意一点，则在 $\triangle OPM$ 中，$|OP|=\rho$，$\angle POM=\frac{\pi}{2}-\theta$ 或 $\theta-\frac{\pi}{2}$，
又 $\angle OMP=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}$，∴ $\angle OPM=\theta-\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}-\theta$.

由正弦定理，有 $\frac{|OP|}{\sin\angle OMP}=\frac{|OM|}{\sin\angle OPM}$，

又 $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$，$\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left[\pi-\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，

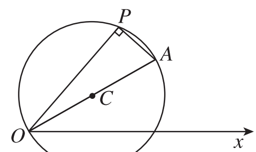
∴ $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 又当 P 与 M 重合时也符合该式，

∴直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

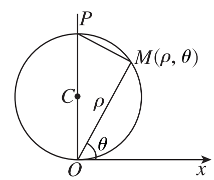


考点二

例 3 解：如图所示，设圆上任意一点 $P(\rho,\theta)$，则 $|OP|=\rho$，
$\angle POA=\theta-\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{6}-\theta$，
$|OA|=2\times 3=6$.
∵ $|OP|=|OA|\cdot\cos\angle POA$，
∴ $\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$，即所求圆的极坐标方程为 $\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.



例 4 解：如图所示，$P\left(2a,\frac{\pi}{2}\right)$ 是圆与过极点且垂直于极轴的直线的交点，
设 $M(\rho,\theta)$ 是圆上任意一点（除 P 点外），连接 OM 和 MP，则 $OM\perp MP$.
在 $\mathrm{Rt}\triangle OPM$ 中，有
$|OM|=|OP|\cos\angle POM$，即
$\rho=2a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$，又点 M 与点 P 重合时也符合该式，
∴所求圆的极坐标方程为 $\rho=2a\sin\theta$.



变式 解：∵ M 是弦 ON 的中点，
∴ $CM\perp ON$，
∴动点 M 的轨迹的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$.

2.4 曲线的极坐标方程与直角坐标方程的互化

【预习探究】

知识点

探究 1 ［解析］极坐标系中的点 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 对应的直角坐标为 $(\sqrt{3},1)$，极坐标系中的直线 $\rho\sin\theta=2$ 对应的直角坐标方程为 $y=2$，故所求距离为 1.

【考点类析】

考点一

例 1 (1) $x^2+y^2=0$ 或 $x=1$ (2) $(x-2)^2+(y-2)^2=2$
［解析］(1)由 $\rho^2\cos\theta-\rho=0$ 可得 $\rho(\rho\cos\theta-1)=0$，则有 $\rho=0$ 或 $\rho\cos\theta-1=0$，化成直角坐标方程为 $x^2+y^2=0$ 或 $x=1$. (2)原方程可化为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+6=0$，将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入，整理可得直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

例 2 解：由 $\rho=\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$，
得 $\rho\cos^2\theta=\sin\theta(\cos\theta\neq 0)$，即 $\rho^2\cos^2\theta=\rho\sin\theta(\cos\theta\neq 0)$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，可得曲线的直角坐标方程为 $x^2=y$.

变式 解：由题意得 $\rho^2=\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta$，
化成直角坐标方程为 $x^2+y^2=y+2x$，
即 $(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，故曲线是以点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的圆.

考点二

例 3　解:(1)将 $x=\rho\cos\theta$ 代入 $x=2$ 得 $\rho\cos\theta=2$,故 $x=2$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=2$.

(2)将 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$ 代入 $\sqrt{3}x+y-2=0$,得 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2=0$,化简得 $\rho(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)=2$,

即 $\rho\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=1$,

即 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$,

故 $\sqrt{3}x+y-2=0$ 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

例 4　解:以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,则直线方程可化为 $2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-1=0$,

设 $M(\rho_0,\theta_0)$,$P(\rho,\theta)$,则 $2\rho_0\cos\theta_0+4\rho_0\sin\theta_0-1=0$,①

又由 $\begin{cases}\theta=\theta_0,\\ \rho_0\cdot\rho=1\end{cases}$ 知 $\begin{cases}\theta_0=\theta,\\ \rho_0=\frac{1}{\rho},\end{cases}$

代入①得 $2\cdot\frac{1}{\rho}\cos\theta+4\cdot\frac{1}{\rho}\sin\theta-1=0$,

∴点 P 的轨迹的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta+4\sin\theta$.

考点三

例 5　解:此圆的方程化为直角坐标方程为

$x^2+y^2-6\sqrt{3}y+6x=0$,

∴圆心的直角坐标为$(-3,3\sqrt{3})$,

∴所求直线的直角坐标方程为 $x=-3$,

化为极坐标方程为 $\rho\cos\theta=-3$.

例 6　解:(1)由 $\rho=2$ 知 $\rho^2=4$,将 $\rho^2=x^2+y^2$ 代入可得圆 O_1 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4$.

由 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$,

得 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta=2$,

将 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$ 代入,可得圆 O_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

(2)易知圆 O_1 的圆心坐标为$(0,0)$,圆 O_2 的圆心坐标为$(1,1)$,圆 O_1 和圆 O_2 的半径均为 2,

∴$|O_1O_2|=\sqrt{(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}<4$,

∴两圆相交.设相交弦长为 d,

∵两圆半径相等,

∴公共弦平分线段 O_1O_2,

∴$\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2^2$,

∴$d=\sqrt{14}$,

∴公共弦长为 $\sqrt{14}$.

2.5　圆锥曲线统一的极坐标方程

【预习探究】

知识点

$\frac{ep}{1-e\cos\theta}$　椭圆　抛物线　双曲线

探究　$\frac{3}{5}$　[解析] 对应极坐标方程 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 可得 $e=\frac{3}{5}$.

讨论　解:圆锥曲线统一的极坐标方程的坐标系,是以焦点为极点构建的,其中椭圆以左焦点为极点,双曲线以右焦点为极点.当 $e>0$,$\rho>0$ 时方程只表示双曲线的右支,定点 F 是它的右焦点.如果允许 $\rho<0$,方程就表示整个双曲线.

【考点类析】

考点一

例 1　解:∵$\rho=\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{5}{2}}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}$,

∴$e=\frac{2}{3}$,$p=\frac{5}{2}$,

∴$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{2}{3},\\ \frac{b^2}{c}=\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}c,\\ b^2=\frac{5}{2}c,\end{cases}$ 又 $a^2=b^2+c^2$,

∴得 $a=3$,即长轴长为 6.

例 2　解:过定点 F 作定直线 l 的垂线,垂足为 K,以 F 为极点,FK 的反向延长线 Fx 为极轴,建立极坐标系.

由题意,设所求极坐标方程为 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$,

∵定点 $F(2,0)$,定直线 l:$x=-2$,

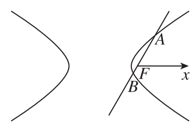
∴点 F 到直线 l 的距离 $p=2-(-2)=4$.

又常数 $e=\frac{1}{2}$,

∴所求点的轨迹的极坐标方程为 $\rho=\frac{\frac{1}{2}\times 4}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$,即 $\rho=\frac{4}{2-\cos\theta}$.

考点二

例 3　解:以双曲线的右焦点 F 为极点,x 轴的正半轴为极轴,建立如图所示的极坐标系,则双曲线的极坐标方程是 $\rho=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$.



∵直线的斜率为$\sqrt{3}$,

∴不妨设点 A 的极坐标为 $\left(\rho_1,\frac{\pi}{3}\right)$,点 B 的极坐标为 $\left(\rho_2,\frac{4\pi}{3}\right)$.

∵$|FA|=\rho_1=\frac{b^2}{a-c\cos\frac{\pi}{3}}$,$|FB|=\rho_2=\frac{b^2}{a-c\cos\frac{4\pi}{3}}$,

∴$\frac{b^2}{a-c\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{4b^2}{a-c\cos\frac{4\pi}{3}}$,

∴$e=\frac{6}{5}$.

§3　柱坐标系和球坐标系

【预习探究】

知识点一

1. 柱坐标系　(r,θ,z)　2. $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$

思考　解:空间点的坐标都是三个数值,其中至少有一个是距离.

知识点二

1. (r,φ,θ)　2. $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$

探究　解:在柱坐标系中,方程 $r=1$ 表示以 z 轴为中心,以 1 为半径的圆柱面;在球坐标系中,方程 $r=1$ 表示球心在原点的单位球面.

知识点三

2. 三个

【考点类析】

考点一

例 1　(1)$\left(2,\frac{2\pi}{3},4\right)$　(2)$\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

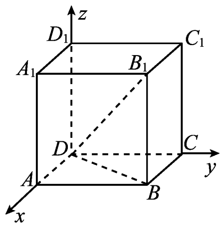
[解析] (1)设点 A 的柱坐标为(r,θ,z),则
$\begin{cases}-1=r\cos\theta,\\ \sqrt{3}=r\sin\theta,\\ 4=z,\end{cases}$ 得 $r=2,\theta=\dfrac{2\pi}{3},z=4$,

∴点 A 的柱坐标为$\left(2,\dfrac{2\pi}{3},4\right)$.

(2)设点 P 的直角坐标为(x,y,z),则
$$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2},\\ y=\sqrt{3}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ z=1,\end{cases}$$

∴点 P 的直角坐标为$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

例 2　**解**:以点 D 为坐标原点,建立如图所示的柱坐标系,则各顶点的柱坐标为



$A(1,0,0)$,$B\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4},0\right)$,

$C\left(1,\dfrac{\pi}{2},0\right)$,$D(0,0,0)$,

$A_1(1,0,1)$,$B_1\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4},1\right)$,

$C_1\left(1,\dfrac{\pi}{2},1\right)$,$D_1(0,0,1)$.

考点二

例 3　(1)$\left(4,\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$　(2)$(-6,2\sqrt{3},4)$

[解析] (1)设点 M 的球坐标为(r,φ,θ),则

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2\sqrt{2})^2}=4$,

由 $r\cos\varphi=z$,

得 $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$,

由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-1$,$0\leqslant\theta<2\pi$,$x<0$,得 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$,

∴点 M 的球坐标为$\left(4,\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

(2)设点 Q 的直角坐标为(x,y,z),则
$$\begin{cases}x=8\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{5\pi}{6}=-6,\\ y=8\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{5\pi}{6}=2\sqrt{3},\\ z=8\cos\dfrac{\pi}{3}=4,\end{cases}$$

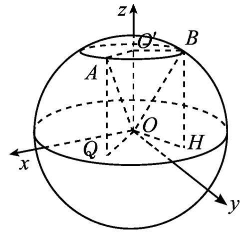
∴点 Q 的直角坐标为$(-6,2\sqrt{3},4)$.

例 4　**解**:方法一:由 $r=3,\varphi=\dfrac{\pi}{6},\theta=\dfrac{\pi}{4}$,得点 A 的直角坐标为$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$;

由 $r=3,\varphi=\dfrac{\pi}{6},\theta=\dfrac{3\pi}{4}$,得点 B 的直角坐标为$\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

根据空间直角坐标系中两点的距离公式,得$|AB|=$
$$\sqrt{\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

方法二:如图所示,由已知,



$OA=OB=3$,$\angle BOO'=\dfrac{\pi}{6}$,

$\angle AOO'=\dfrac{\pi}{6}$,$\angle xOQ=\dfrac{\pi}{4}$,

$\angle xOH=\dfrac{3\pi}{4}$,则$\angle AO'B=\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,

在 Rt$\triangle AO'O$ 中,$|O'A|=3\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$;

在 Rt$\triangle BO'O$ 中,$|O'B|=3\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$;

在 Rt$\triangle AO'B$ 中,$|AB|=\sqrt{|O'A|^2+|O'B|^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

考点三

例 5　**解**:设 P_1 的直角坐标为(x_1,y_1,z_1),

则$\begin{cases}x_1=2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ y_1=2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ z_1=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3},\end{cases}$

∴P_1 的直角坐标为$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right)$.

设 P_2 的直角坐标为(x_2,y_2,z_2),

则$\begin{cases}x_2=\sqrt{6}\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ y_2=\sqrt{6}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\\ z_2=1,\end{cases}$

∴P_2 的直角坐标为$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2},1\right)$.

故$|P_1P_2|=\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{10}}{2}$.

例 6　**解**:将顶点 C_1 的柱坐标$\left(6,\dfrac{\pi}{2},5\right)$化成直角坐标为$(0,6,5)$,故长方体的三边长分别为 4,6,5,因此其体对角线长为$\sqrt{16+36+25}=\sqrt{77}$,从而该长方体的外接球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{77}}{2}\right)^3=\dfrac{77\sqrt{77}}{6}\pi$.

第二章　参数方程

§1　参数方程的概念

【预习探究】

知识点

1. 参数方程　参变数　2. 普通方程

3. (1)物理意义或几何意义　实际意义　(3)不同

思考　**解**:求参数方程的步骤为:

(1)建立直角坐标系,设曲线上一点 P 的坐标为(x,y);

(2)选取适当的参数 t;

(3)根据适当条件和图形的几何性质或物理意义,建立点 P 的坐标和参数的函数关系式;

(4)列出关系式$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t),\end{cases}$并注明参数.

探究　**解**:(1)参数方程中有三个变量,其中(x,y)表示点的坐标,t 为参变量,并且 x,y 分别是关于 t 的函数;

(2)从数学角度讲,点的坐标是由 x,y 唯一确定的,但 x,y 是由 t 确定的,当 t 连续变化时,x,y 也随之连续变化,也

参考答案

第一章 坐标系

§1 平面直角坐标系

1.1 平面直角坐标系与曲线方程

1. C ［解析］因为圆心坐标是(1,2)，所以将圆心坐标代入各选项验证知选 C.

2. C ［解析］对于 A，$x^2+y^2=1$ 表示一个整圆；对于 B，$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=0$，表示两条相交直线；对于 D，由 $\lg x+\lg y=0$ 知 $x>0,y>0$.

3. A ［解析］由题意可得 $1+4-2a+5=0$，解得 $a=5$.

4. C ［解析］由 $|x|y=1$ 得 $y>0,x\in\mathbf{R}$，故选 C.

5. $(1,-2)$ ［解析］∵点 $P(x,y)$ 到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 1，∴$|y|=2,|x|=1$. 又∵$P(x,y)$ 在第四象限，∴$x>0,y<0$，∴$x=1,y=-2$，即点 P 的坐标为 $(1,-2)$.

6. 四 ［解析］∵$0<m<1$，∴$3m+2>0,m-1<0$，∴点 $P(3m+2,m-1)$ 在第四象限.

7. 射线 $x+y-1=0(x\leqslant 1)$ 和射线 $x-y-1=0(x\geqslant 1)$
［解析］原方程等价于 $y=|x-1|$，所以有 $x+y-1=0(x\leqslant 1)$ 和 $x-y-1=0(x\geqslant 1)$.

8. $(-2,3)$ ［解析］点 (x,y) 关于 y 轴的对称点坐标为 $(-x,y)$，所以 $P(2,3)$ 关于 y 轴的对称点是 $(-2,3)$.

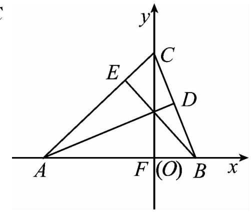
9. ③ ［解析］方程 $\frac{y}{x-2}=1$ 表示斜率为 1，在 y 轴上的截距为 -2 的直线且扣除点 $(2,0)$，故①错；到 x 轴的距离为 2 的点的轨迹方程为 $y=-2$ 或 $y=2$，故②错；方程 $(x^2-4)^2+(y^2-4)^2=0$ 表示点 $(-2,2),(-2,-2),(2,-2),(2,2)$，故③正确.

10. **解**：∵点 P 到两坐标轴的距离相等就是点 P 的横、纵坐标相等或互为相反数，
∴分以下两种情况：
①横、纵坐标相等时，即 $2-a=3a+6$，解得 $a=-1$，
∴点 P 的坐标是 $(3,3)$；
②横、纵坐标互为相反数时，即 $(2-a)+(3a+6)=0$，解得 $a=-4$，∴点 P 的坐标是 $(6,-6)$.
故点 P 的坐标为 $(3,3)$ 或 $(6,-6)$.

11. **解**：(1)汽车行驶到点 A 与 x 轴的垂线段的垂足处时，离 A 村庄最近，此点的坐标为 $(2,0)$.
(2)设点 $P(x,y)$ 为线段 AB 的垂直平分线上任意一点，则 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}$，
即 $2x+y-11=0$，
令 $y=0$，得 $x=\frac{11}{2}$，故汽车行驶到与 A,B 两村庄距离相等的位置时，该点的坐标为 $\left(\frac{11}{2},0\right)$.

12. **解**：由 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，$P(x,y)$ 及点 A,B 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，可得 $B(0,3y)$，$A\left(\frac{3}{2}x,0\right)$，
∴$\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{3}{2}x,3y\right)$.
∵Q 与 P 关于 y 轴对称，
∴$Q(-x,y)$，且 $\overrightarrow{OQ}=(-x,y)$.
由 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，得 $\frac{3}{2}x^2+3y^2=1(x>0,y>0)$，
即点 P 的轨迹方程是 $\frac{3}{2}x^2+3y^2=1(x>0,y>0)$.

13. **证明**：以 AB 所在直线为 x 轴，AB 边上的高所在直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，设 $A(-a,0)$，$B(b,0)$，$C(0,c)$，则直线 AC,BC 的斜率为 $k_{AC}=\frac{c}{a}$，$k_{BC}=-\frac{c}{b}$.



∵$AD\perp BC$，$BE\perp AC$，∴$k_{BE}=-\frac{a}{c}$，$k_{AD}=\frac{b}{c}$，
∴直线 BE,AD 的方程分别为
$y=-\frac{a}{c}(x-b)$，$y=\frac{b}{c}(x+a)$，
联立 $\begin{cases}y=-\frac{a}{c}(x-b),\\ y=\frac{b}{c}(x+a),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=\frac{ab}{c},\end{cases}$
即直线 BE,AD 的交点在 y 轴上，
∴△ABC 的三条高线 AD,BE,CF 相交于一点.

1.2 平面直角坐标轴中的伸缩变换

1. A ［解析］设变换 $\begin{cases}x'=\lambda x,\\ y'=\mu y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{x'}{\lambda},\\ y=\frac{y'}{\mu}.\end{cases}$
①直线 $ax+by+c=0$ 在变换作用下变为 $\frac{a}{\lambda}x'+\frac{b}{\mu}y'+c=0$，仍表示一条直线. ②圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 在变换作用下变为 $\frac{x'^2}{\lambda^2}+\frac{y'^2}{\mu^2}+\frac{D}{\lambda}x'+\frac{E}{\mu}y'+F=0$，∴当 $\lambda^2\neq\mu^2$ 时，曲线表示椭圆. ③椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在变换作用下变为 $\frac{x'^2}{\lambda^2a^2}+\frac{y'^2}{\mu^2b^2}=1$，∴当 $\lambda^2a^2=\mu^2b^2$ 时，曲线表示圆. ④双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 在变换作用下变为 $\frac{x'^2}{\lambda^2a^2}-\frac{y'^2}{\mu^2b^2}=1$，曲线仍是双曲线. ⑤抛物线 $y^2=2px$ 在变换作用下变为 $\frac{y'^2}{\mu^2}=\frac{2p}{\lambda}x'$，即 $y'^2=\frac{2p\mu^2x'}{\lambda}$，曲线仍是抛物线.

2. B ［解析］把 $\left(-\frac{2}{3},6\right)$ 代入 $\begin{cases}x'=3x,\\ y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x'=-2,\\ y'=3.\end{cases}$

3. B ［解析］易知选项 C,D 不是伸缩变换，再代入 A,B 进行检验，可知 B 正确.

4. A ［解析］设直线 $2x+3y-1=0$ 上任一点的坐标为 (x,y)，经变换后对应点的坐标为 (x',y')，坐标变换公式为 $\begin{cases}x'=kx,\\ y'=hy,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{1}{k}x',\\ y=\frac{1}{h}y',\end{cases}$ 将其代入直线方程 $2x+3y-1=0$，得 $\frac{2}{k}x'+\frac{3}{h}y'-1=0$，将其与 $6x'+6y'-1=0$ 比较系数，得 $k=\frac{1}{3}$，$h=\frac{1}{2}$，∴坐标变换公式为 $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$

5. $(\pi,-2)$ ［解析］由伸缩变换公式 $\begin{cases}x'=3x,\\ y'=2y,\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}x=\frac{1}{3}x',\\ y=\frac{1}{2}y',\end{cases}$ 把 $(3\pi,-4)$ 代入，得 $\begin{cases}x=\pi,\\ y=-2.\end{cases}$

6. $y'=2\sin 3x'$ ［解析］由伸缩变换公式$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=2y,\end{cases}$得到$\begin{cases}x=3x',\\ y=\frac{1}{2}y',\end{cases}$代入 $y=\sin x$，得 $\frac{1}{2}y'=\sin 3x'$，即 $y'=2\sin 3x'$.

7. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$ ［解析］把$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$代入 $4x'^2-9y'^2=36$，可得曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$.

8. $\left(\pm\frac{\sqrt{37}}{3},0\right)$ ［解析］将$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=3y\end{cases}$代入 $x'^2-y'^2=1$，得$\frac{x^2}{4}-9y^2=1$，∴曲线 C 中 $a^2=4$，$b^2=\frac{1}{9}$，

∴$c^2=a^2+b^2=\frac{37}{9}$，

∴$c=\frac{\sqrt{37}}{3}$，∴焦点坐标为$\left(\pm\frac{\sqrt{37}}{3},0\right)$.

9. $\begin{cases}x'=5x,\\ y'=3y\end{cases}$ ［解析］设伸缩变换为$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\ y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$将其代入 $2x'^2+8y'^2=1$，得 $2\lambda^2x^2+8\mu^2y^2=1$，与曲线 $50x^2+72y^2=1$ 比较系数，得 $2\lambda^2=50$，$8\mu^2=72$，即 $\lambda=5$，$\mu=3$，故所求伸缩变换公式为$\begin{cases}x'=5x,\\ y'=3y.\end{cases}$

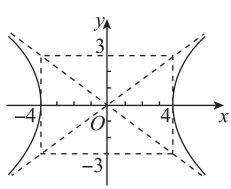
10. $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=\frac{2}{5}y\end{cases}$ ［解析］设伸缩变换为$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\ y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$①

把①代入 $x'^2+y'^2=4$，得

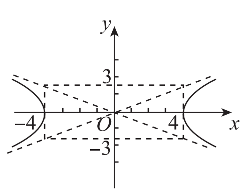
$(\lambda x)^2+(\mu y)^2=4$，即$\frac{x^2}{\frac{4}{\lambda^2}}+\frac{y^2}{\frac{4}{\mu^2}}=1$，②

由于②与方程$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$表示相同的曲线，所以$\begin{cases}\frac{4}{\lambda^2}=16,\\ \frac{4}{\mu^2}=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\ \mu=\frac{2}{5},\end{cases}$故所求伸缩变换为$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=\frac{2}{5}y.\end{cases}$

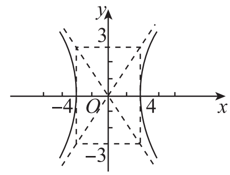
11. **解**：(1)建立平面直角坐标系，使 x 轴与 y 轴具有相同的单位长度，双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的图形如下：



(2)如果 x 轴上的单位长度保持不变，y 轴上的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$，双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的图形如下：



(3)如果 y 轴上的单位长度保持不变，x 轴上的单位长度缩小为原来的$\frac{1}{2}$，双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的图形如下：



12. **解**：(1)设 $A'(x',y')$，由伸缩变换 φ：$\begin{cases}x'=3x,\\ 2y'=y\end{cases}$得到$\begin{cases}x'=3x,\\ y'=\frac{1}{2}y,\end{cases}$由于点 A 的坐标为$\left(\frac{1}{3},-2\right)$，

于是 $x'=3\times\frac{1}{3}=1$，$y'=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$，

∴$A'(1,-1)$即为所求.

(2)设 $B(x,y)$，由伸缩变换 φ：$\begin{cases}x'=3x,\\ 2y'=y\end{cases}$得到$\begin{cases}x=\frac{1}{3}x',\\ y=2y'.\end{cases}$

由于点 B' 的坐标为$\left(-3,\frac{1}{2}\right)$，

于是 $x=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$，$y=2\times\frac{1}{2}=1$，

∴$B(-1,1)$即为所求.

(3)由伸缩变换 φ：$\begin{cases}x'=3x,\\ 2y'=y,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{x'}{3},\\ y=2y',\end{cases}$代入直线 l：$y=6x$，得到经过伸缩变换后的方程为 $y'=x'$，因此直线 l' 的方程为 $y'=x'$.

13. **证明**：由点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，得线段 AB 的中点 P 的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，

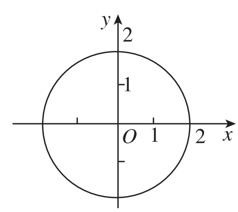
设伸缩变换为$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\ y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$则经过伸缩变换后，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$变为 $A'(\lambda x_1,\mu y_1)$，$B'(\lambda x_2,\mu y_2)$，线段$A'B'$的中点坐标为$\left(\frac{\lambda x_1+\lambda x_2}{2},\frac{\mu y_1+\mu y_2}{2}\right)$，

又∵线段 AB 的中点 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$经过伸缩变换后，变为 $P'\left(\frac{\lambda x_1+\lambda x_2}{2},\frac{\mu y_1+\mu y_2}{2}\right)$，

∴P'是线段 $A'B'$ 的中点.

14. **解**：设 $M(x,y)$是曲线 C 上任意一点，经过变换后的点为 $M'(x',y')$.

由$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=\frac{1}{4}y,\end{cases}$且 $M'(x',y')$在曲线$\frac{x'^2}{16}+4y'^2=1$上，



得$\frac{4x^2}{16}+\frac{4y^2}{16}=1$，

即 $x^2+y^2=4$.

因此曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4$，其表示以 $O(0,0)$为圆心，以 2 为半径的圆(如图所示).

§2 极坐标系

2.1 极坐标系的概念

1. D ［解析］选项 D 表示的是 A 点关于极点对称的点，不是 A 点的极坐标，其他选项都是 A 点极坐标的不同表示，故选 D.

2. A ［解析］①错误，点的极坐标有多值性；②错误，不作规定时，极角的取值是任意的；③错误，极径有时也可以小于零；④正确.

3. A ［解析］设极点为 O，由已知得$|OA|=3$，$|OB|=$

$2\sqrt{3}$，$\angle AOB=\frac{\pi}{6}$，则在$\triangle AOB$中，由余弦定理得

$|AB|=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times3\times2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$.

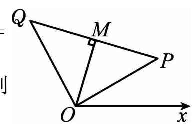
4. C [解析] 由对称性知，点A关于直线$\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$的对称点的极径$\rho=4$，极角$\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，故对称点的极坐标为$\left(4,\frac{2\pi}{3}\right)$.

5. ① [解析] 与点$P\left(-3,-\frac{\pi}{6}\right)$表示同一个点的极坐标可表示为$\left(-3,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$或$\left(3,-\frac{\pi}{6}+\pi+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$.

6. ①④⑤ [解析] 在直线OA上的点的极角可表示为$\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$或$\frac{3\pi}{4}+\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

7. 关于极轴所在直线对称 [解析] 点(ρ,θ)也可以表示为$(-\rho,\pi+\theta)$，而$(-\rho,\pi+\theta)$与$(-\rho,\pi-\theta)$关于极轴所在直线对称.

8. $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right)$ [解析] 如图，$|OP|=|OQ|=2$，$\angle POQ=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则$|PQ|=2\sqrt{2}$，$|OM|=\frac{1}{2}|PQ|=\sqrt{2}$，

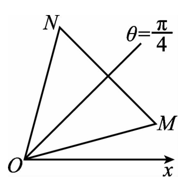


$\angle xOM=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$，故点$M$的极坐标为$\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right)$.

9. 3 $\frac{5\pi}{6}$ [解析] 根据极坐标的定义可得$|AO|=|BO|=3$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，即$\triangle AOB$为等边三角形，所以$|AB|=3$，易得直线AB与极轴正方向所成的角为$\frac{5\pi}{6}$.

10. 3 [解析] 点B的极坐标也可表示为$\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$，在$\triangle AOB$中，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin\frac{\pi}{6}=3$，即$\triangle AOB$的面积等于3.

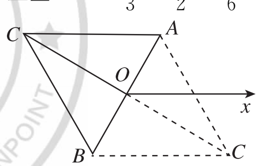
11. 解：如图，设点M关于直线$\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$的对称点为$N$，则$|ON|=|OM|=3$，$\angle xON=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$，所以点$N$的极坐标为$\left(3,\frac{5\pi}{12}\right)$.



12. 解：如图所示，由$A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$，得$A,O,B$三点共线，且$O$是线段$AB$的中点，

$\because\triangle ABC$是等边三角形，$\therefore CO\perp AB$，

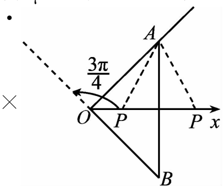
$\therefore|OC|=|OA|\tan\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，且$\angle xOC=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$或$\angle xOC=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}$，



$\therefore\triangle ABC$的第三个顶点C的极坐标是$\left(2\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right)$或$\left(2\sqrt{3},-\frac{\pi}{6}\right)$.

13. 解：如图，由点A与点$B\left(-4\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$关于极轴所在直线对称，得点$A$的极坐标是$\left(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

又点P在极轴上，设点P的极坐标为$(\rho,0)$，在$\triangle AOP$中，$|OP|^2+|OA|^2-2|OP|\cdot|OA|\cdot\cos\frac{\pi}{4}=|PA|^2$，



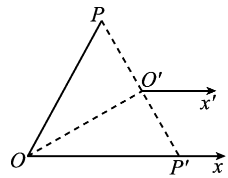
即$\rho^2+(4\sqrt{2})^2-2\rho\cdot4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5^2$，

化简得$\rho^2-8\rho+7=0$，

解得$\rho=7$或$\rho=1$，

$\therefore$所求点P的极坐标为$(7,0)$或$(1,0)$.

14. 解：(1)设点P在新坐标系中的坐标为(ρ,θ)，由已知点P在原极坐标系中的坐标为$\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$，得$|OP|=4$，$\angle xOP=\frac{\pi}{3}$.



由已知点O'在原极坐标系中的坐标为$\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$，得

$|OO'|=2\sqrt{3}$，$\angle xOO'=\frac{\pi}{6}$，在$\triangle OPO'$中，$\angle POO'=\frac{\pi}{6}$，

则$|O'P|^2=|OP|^2+|OO'|^2-2|OP|\cdot|OO'|\cos\frac{\pi}{6}=4^2+(2\sqrt{3})^2-2\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4$，即$\rho=2$，

又$\because\frac{|OO'|}{\sin\angle OPO'}=\frac{|O'P|}{\sin\angle POO'}$，

$\therefore\sin\angle OPO'=\frac{2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\angle OPO'=\frac{\pi}{3}$.

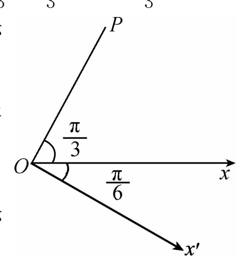
延长PO'交极轴Ox于点P'，则$\angle OP'P=\pi-\angle OPO'-\angle xOP=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\angle x'O'P=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即$\theta=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore$点P在新坐标系中的坐标为$\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$.

(2)设点P在新坐标系中的坐标为(ρ,θ)，如图，有

$\rho=4$，$\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore$点P在新坐标系中的坐标为$\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$.



2.2 点的极坐标与直角坐标的互化

1. A [解析] $\because x=\rho\cos\theta=2\times\cos\frac{\pi}{3}=1$，$y=\rho\sin\theta=2\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$\therefore$点$M$的直角坐标是$(1,\sqrt{3})$.

2. D [解析] 易求得极径为2，极角为$2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，则点$M$的极坐标为$\left(2,2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

3. A [解析] 把A,B两点的极坐标化为直角坐标分别是$(3,3\sqrt{3})$，$(-4,-4\sqrt{3})$，由中点坐标公式得线段AB中点的直角坐标为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. B [解析] 由极坐标与直角坐标的互化公式，得$x=4\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-2\sqrt{3}$，$y=4\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=2$，故选B.

5. $\left(6,\frac{4}{3}\pi\right)$ [解析] 由已知可知 θ 为第三象限角，$\tan\theta=\frac{-3\sqrt{3}}{-3}=\sqrt{3}$，故 $\theta=\frac{4\pi}{3}$，$\rho=\sqrt{(-3)^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$，所以 M 的极坐标为 $\left(6,\frac{4}{3}\pi\right)$.

6. $\left(3\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ [解析] 由已知，得点 P 的直角坐标为 $(-3,3)$，则 $\rho=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$\tan\theta=-1$，又点 P 在第二象限，则点 P 的极坐标为 $\left(3\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.

7. 5 [解析] 设极点为 O，∵点 $A(4,1)$，$B\left(3,1+\frac{\pi}{2}\right)$，
∴$OA\perp OB$，∴$|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}=5$.

8. $(-3\sqrt{2},-4\sqrt{2})$ [解析] 设顶点 B 的直角坐标为 (x_0,y_0)，把点 A,D 的极坐标化为直角坐标，得 $A(-\sqrt{2},0)$，$D(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$，则 $\frac{-\sqrt{2}+x_0}{2}=-2\sqrt{2}$，$\frac{0+y_0}{2}=-2\sqrt{2}$，解得 $x_0=-3\sqrt{2}$，$y_0=-4\sqrt{2}$，则顶点 B 的直角坐标为 $(-3\sqrt{2},-4\sqrt{2})$.

9. $5\sqrt{3}$ [解析] 把点 Q 的直角坐标化为极坐标，得 $Q\left(5,-\frac{\pi}{4}\right)$，则 $|OP|=4$，$|OQ|=5$，$\angle POQ=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}\times4\times5\sin\frac{2\pi}{3}=5\sqrt{3}$.

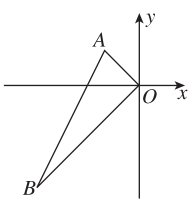
10. $\left(\frac{5}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$或$\left(-\frac{5}{2},0\right)$ [解析] 在极坐标系中，由 $\triangle MON$ 是等边三角形，得 $|ON|=|OM|$，$\angle MON=\frac{\pi}{3}$，
∴点 N 的极坐标为 $\left(\frac{5}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$或$\left(\frac{5}{2},-\pi\right)$，
由极坐标与直角坐标的互化公式，得点 N 的直角坐标是 $\left(\frac{5}{4},-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$或$\left(-\frac{5}{2},0\right)$.

11. **解**：(1)∵$\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi$，∴$A,O,B$ 在同一条直线上，
∴$|AB|=7+2=9$.
(2)点 B 的极坐标可化为 $\left(4,-\frac{\pi}{12}\right)$，∴$|AB|=\sqrt{6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)}=2\sqrt{7}$.

12. **解**：将 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$ 代入直角坐标方程可得 $\rho^2-\rho-\rho\sin\theta=0$，
∴$\rho=0$ 或 $\rho=1+\sin\theta$.
∵$\rho=0$ 表示极点，包含在 $\rho=1+\sin\theta$ 中，
∴所求极坐标方程是 $\rho=1+\sin\theta$.

13. **解**：$B(-4,220°)$可化为 $B(4,40°)$，由题意可得 $\angle AOB=30°$，$\angle AOC=90°$，$\angle BOC=60°$，从而 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}-S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin30°+\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin60°-\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin90°=2+3\sqrt{3}-3=3\sqrt{3}-1$.

14. **解**：如图，以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立直角坐标系，由极坐标与直角坐标的互化公式 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得 A,B 两点的直角坐标分别为 $A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$B(-3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$，



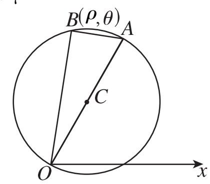
∴直线 AB 的方程为 $\frac{y-\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{x+\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}$，
即 $2x-y+3\sqrt{2}=0$，令 $y=0$，得 $x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，
即直线 AB 与极轴所在直线的交点的直角坐标为 $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$.

2.3 直线和圆的极坐标方程

1. A [解析] 把 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 代入曲线的极坐标方程，得 $4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2$，则 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 在曲线上；把 $\left(-4,-\frac{\pi}{3}\right)$ 代入曲线的极坐标方程，得 $4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-4$，则 $\left(-4,-\frac{\pi}{3}\right)$ 在曲线上.

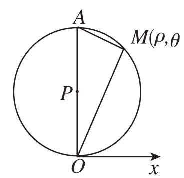
2. D [解析] 所求直线为过直角坐标系中的点(0,1)且平行于 x 轴的直线，故其极坐标方程为 $\rho\sin\theta=1$.

3. A [解析] 如图所示，设 $B(\rho,\theta)$ 为圆 C 上任意一点，
∵直径 $|AO|=4$，$\angle BOA=\left|\theta-\frac{\pi}{3}\right|$，
∴$\rho=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$.



4. C [解析] 所求直线的直角坐标方程为 $x=2$，故其极坐标方程为 $\rho\cos\theta=2$.

5. B [解析] 易知极坐标为 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 的点与点 P 重合. 如图所示，
点 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ 是圆与过极点且垂直于极轴的直线的交点，设 $M(\rho,\theta)$ 是圆上任意一点，则 $|OM|=|OA|\cdot\cos\angle AOM$，即 $\rho=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$，
∴所求圆的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.



6. 一条射线 [解析] 由于极径 $\rho\geqslant0$，故 $\theta=-\frac{\pi}{3}$ 表示的曲线是一条射线.

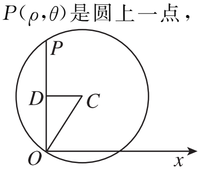
7. $\frac{5\pi}{6}$ [解析] 直线 $\theta=-\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$ 的倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$.

8. 3 [解析] 因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho(3\cos\theta-\sin\theta)=1$，所以直线 l 的直角坐标方程为 $3x-y=1$，其斜率为 3.

9. 垂直 [解析] $\rho\cos(\theta-\alpha)=1$ 表示的直线是 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$，其倾斜角为 $\alpha-\frac{\pi}{2}$，与直线 $\theta=\alpha$ 互相垂直.

10. $\sqrt{3}$ [解析] $2\rho\cos\theta=1$ 是过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 且垂直于极轴的直线，$\rho=2\cos\theta$ 是以(1,0)为圆心，1 为半径的圆，则所求弦长为 $2\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

11. **解**：如图所示，设 $P(\rho,\theta)$ 是圆上一点，



过 C 作 $CD\perp OP$ 于 D，易知 $|OP|=2|DO|$.
在 Rt$\triangle CDO$ 中，$\angle DOC=|\theta-1|$，
∴$|OP|=2|DO|=2\cos|\theta-1|$，
∴所求圆的极坐标方程为 $\rho=2\cos(\theta-1)$.

12. **解**：在直线 l 上任取一点 $M(\rho,\theta)$，则 $|OM|=\rho$，$\angle AOM=$

$\angle AOx-\angle MOx=\frac{\pi}{3}-\theta$ 或 $\theta-\frac{\pi}{3}$，则 $|OA|=|OM|\cdot\cos\angle AOM$，

即 $\rho\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=3$，这就是所求直线 l 的极坐标方程.

13. **解**：设点 M 的坐标是 (ρ,θ)，点 N 的坐标是 (ρ_1,θ_1).
∵点 N 在圆 $\rho=8\cos\theta$ 上，∴$\rho_1=8\cos\theta_1$. ①
∵M 是 ON 的中点，
∴$\rho_1=2\rho,\theta_1=\theta$，
将它代入①式得 $2\rho=8\cos\theta$，
故点 M 的轨迹方程是 $\rho=4\cos\theta$.

14. **解**：(1)把曲线 C 的极坐标方程 $\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 化为

$\frac{1}{2}\rho\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=1$，

从而得曲线 C 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y=2$.
当 $\theta=0$ 时，$\rho=2$，则点 M 的极坐标为 $(2,0)$，
当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\rho=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则点 N 的极坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.
(2)点 M 的直角坐标为 $(2,0)$，点 N 的直角坐标为 $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，
∴MN 的中点 P 的直角坐标为 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，化为极坐标是 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，
∴直线 OP 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$.

2.4 曲线的极坐标方程与直角坐标方程的互化

1. A ［解析］将 $\rho=4\cos\theta$ 两边同时乘 ρ，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，将 $x=\rho\cos\theta,x^2+y^2=\rho^2$ 代入，得 $x^2+y^2-4x=0$，故选 A.
2. A ［解析］$\rho(\cos\theta+\sin\theta)=\sqrt{3}$ 可化为 $x+y-\sqrt{3}=0$，则极点到直线的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.
3. B ［解析］∵$\tan\theta=\frac{y}{x}$，∴$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x}=\sqrt{3}$，即 $y=\sqrt{3}x$.
4. C ［解析］原极坐标方程可化为 $\rho\cos\theta=4\sin\theta\cos\theta$，即 $\cos\theta=0$ 或 $\rho=4\sin\theta$，即 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 或 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，则 $x=0$ 或 $x^2+y^2=4y$，∴方程表示一条直线和一个圆.
5. $\frac{\pi}{4}$ ［解析］易得直线的直角坐标方程为 $x-y=1$，其倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.
6. $4\sqrt{2}-2$ ［解析］曲线 C 为圆，其直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=4$，则其圆心为 $(-1,0)$，半径为 2，直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-7=0$，则圆心到直线的距离 $d=\frac{|-1-7|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$，所以 $|AB|_{\min}=4\sqrt{2}-2$.
7. 抛物线 ［解析］$4\rho\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}=4\rho\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}=2\rho-2\rho\cdot\cos\theta=5$，化为直角坐标方程为 $2\sqrt{x^2+y^2}-2x=5$，
化简得 $y^2=5x+\frac{25}{4}$，
显然该方程表示抛物线.
8. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ［解析］由 $2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 可得 $2\rho\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}-2\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，整理得 $y-x=1$，即 $x-y+1=0$，而点 $A\left(2\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$ 的直角坐标为 $(2,-2)$，则点 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
9. $2\sqrt{3}$ ［解析］曲线方程 $\rho=4\cos\theta$ 两边都乘 ρ，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，由极坐标与直角坐标的互化公式，得 $x^2+y^2=4x$，即 $(x-2)^2+y^2=4$，表示以 $(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆.
而过点 $(3,0)$ 且与极轴垂直的直线的直角坐标方程为 $x=3$，则圆心到直线 $x=3$ 的距离为 1，故 $|AB|=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$.
10. **解**：把直线的极坐标方程 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 化为

$\frac{1}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=1$，

化为直角坐标方程是 $\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y-1=0$，

把圆的极坐标方程 $\rho=\sqrt{2}$ 化为 $\rho^2=2$，即得圆的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2$，则圆心到直线的距离 $d=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=1<\sqrt{2}$，
故直线与圆相交，公共点的个数是 2.
11. **解**：由题可得 $\rho^2=\rho\sin\theta-3\rho\cos\theta$（两边同时乘 ρ），
∵$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,\rho^2=x^2+y^2$，
∴曲线的直角坐标方程为 $x^2+3x+y^2-y=0$.
12. **解**：曲线 $\rho\cos^2\theta=\sin\theta$ 可化为 $x^2=y$，$\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 可化为 $x+y=2$，联立两个直角坐标方程，解得 $A(1,1)$，$B(-2,4)$，所以 $|AB|=\sqrt{(1+2)^2+(1-4)^2}=3\sqrt{2}$.
13. **解**：(1)设 O 为极点，OD 为圆 C 的直径，$A(\rho,\theta)$ 为圆 C 上的一个动点，则 $\angle AOD=\frac{\pi}{4}-\theta$ 或 $\angle AOD=\theta-\frac{\pi}{4}$，

所以 $|OA|=|OD|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ 或 $|OA|=|OD|\cdot\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-\sqrt{2}=0$，

圆心 C 的直角坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

故点 C 满足直线 l 的方程，则直线 l 经过圆 C 的圆心，
故直线 l 被圆所截得的弦长为 2.

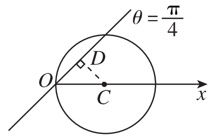
滚动习题（一）

1. A ［解析］把伸缩变换公式 $\begin{cases}x'=5x,\\y'=3y\end{cases}$ 代入曲线 $2x'^2+8y'^2=1$，得 $2\times(5x)^2+8\times(3y)^2=1$，即 $50x^2+72y^2=1$.
2. A ［解析］$\rho=1$ 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$，表示圆心在原点，半径为 1 的圆，故 A 正确；$\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\geqslant0)$ 化为直角坐标方程为 $x=0(y\geqslant0)$，表示射线，故 B 不正确；$\rho\sin\theta=1$ 化为直角坐标方程为 $y=1$，表示直线，故 C 不正确；$\rho(\sin\theta+\cos\theta)=1$ 化为直角坐标方程为 $x+y=1$，表示直线，故 D 不正确.
3. A ［解析］由 $\rho=2\cos\theta$，得 $x^2+y^2-2x=0$，与 $y+kx+2=0$ 联立得 $(1+k^2)x^2+(4k-2)x+4=0$，依题意有 $\Delta=(4k-2)^2-16(1+k^2)>0$，解得 $k<-\frac{3}{4}$.
4. D ［解析］点 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $\rho=2\cos\theta$ 的圆心在平面直角坐标系中的坐标分别为 $(1,\sqrt{3})$ 和 $(1,0)$. 故选 D.
5. B ［解析］曲线 $\rho=-2\cos\theta$ 和 $\rho+\frac{4}{\rho}=4\sqrt{2}\sin\theta$，
即 $\rho^2=-2\rho\cos\theta$ 和 $\rho^2-4\sqrt{2}\rho\sin\theta+4=0$.
曲线的极坐标方程化为直角坐标方程为
$x^2+y^2+2x=0$ 和 $x^2+y^2-4\sqrt{2}y+4=0$，

分别配方,得 $(x+1)^2+y^2=1$ 和 $x^2+(y-2\sqrt{2})^2=4$,它们分别表示圆心为 $C_1(-1,0)$,半径 $r_1=1$ 的圆和圆心为 $C_2(0,2\sqrt{2})$,半径 $r_2=2$ 的圆.
∵$|C_1C_2|=3=r_1+r_2$,∴两圆外切.

6. B [解析] 由 $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $B\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$,知 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$,∴$\triangle AOB$ 为等边三角形. 因此 $|AB|=2$.

7. B [解析] 如图所示,圆 $\rho=4\cos\theta$ 的圆心为 $C(2,0)$,则 $|OC|=2$,直线 $\tan\theta=1$ 即直线 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$,过 C 作直线 $\tan\theta=1$ 的垂线,垂足为 D. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COD$ 中,
$\angle ODC=\frac{\pi}{2}$,$\angle COD=\frac{\pi}{4}$,
∴$|CD|=\sqrt{2}$,
即圆 $\rho=4\cos\theta$ 的圆心到直线 $\tan\theta=1$ 的距离为$\sqrt{2}$.



8. $\rho\cos\theta=2\sqrt{3}$ [解析] 设极点为 O,由该圆的极坐标方程为 $\rho=4$,知该圆的半径为 4,又直线 l 被该圆截得的弦长 $|AB|$ 为 4,所以 $\angle AOB=60^\circ$,所以极点到直线 l 的距离 $d=4\times\cos 30^\circ=2\sqrt{3}$,所以该直线的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=2\sqrt{3}$.

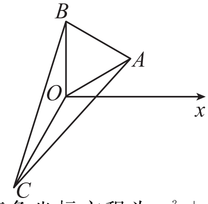
9. 3 [解析] 将方程 $\rho=2\sqrt{2}$ 与 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ 化成直角坐标方程分别为 $x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2$ 与 $x-y-2=0$,则 C_1 是圆心为圆点,半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆,C_2 为直线,所以圆心到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,故满足条件的点的个数为 3.

10. $\sqrt{2}-1$ [解析] 把直线 l 的极坐标方程化为直角坐标方程是$x+y-4=0$,把圆 C 的极坐标方程化为直角坐标方程是$x^2+y^2=4x-3$,即 $(x-2)^2+y^2=1$,圆 C 的圆心为 $(2,0)$,半径为 1,圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|2+0-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,则 $|PQ|$ 的最小值是$\sqrt{2}-1$.

11. 解:把极坐标方程 $\rho=1$ 化为直角坐标方程是 $x^2+y^2=1$.
由 $\rho=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$,得 $\rho=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$,
两边都乘 ρ,得 $\rho^2=\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta$,
∴曲线 $\rho=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-x+\sqrt{3}y=0$. 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x^2+y^2-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$
得 $A(1,0)$,$B\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
∴$|AB|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(0+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

12. 解:(1)设 $D(\rho,\theta)$ 为圆 C 上任意一点,圆 C 交极轴于另一点 A. 由已知得 $|AO|=8$,所以 $|OD|=|OA|\cos\theta$,即 $\rho=8\cos\theta$,这就是圆 C 的极坐标方程.
(2)连接 CM. 因为 M 为弦 ON 的中点,所以 $CM\perp ON$,故 M 在以 OC 为直径的圆上. 又 $|OC|=4$,所以动点 M 的轨迹方程是$\rho=4\cos\theta$.

13. 解:如图,由题意得$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$,$\angle BOC=\frac{5\pi}{6}$,$\angle AOC=\frac{5\pi}{6}$,
又 $|OA|=|OB|=5$,$|OC|=4\sqrt{3}$,∴在$\triangle AOC$ 中,由余弦定理得 $|AC|^2=|OA|^2+|OC|^2-2|OA|\cdot|OC|\cdot\cos\angle AOC$
$=5^2+(4\sqrt{3})^2-2\times5\times4\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=133$,
∴$|AC|=\sqrt{133}$. 同理,$|BC|=\sqrt{133}$,∴$|AC|=|BC|$,
∴$\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又 $|AB|=|OA|=|OB|=5$,
∴ AB 边上的高 $h=\sqrt{|AC|^2-\left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2}=\frac{13\sqrt{3}}{2}$,
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{13\sqrt{3}}{2}\times5=\frac{65\sqrt{3}}{4}$.



14. 解:(1)$\rho^2-4\rho\cos\theta+2=0$ 化为直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x+2=0$.
(2)由 $x^2+y^2-4x+2=0$,得$(x-2)^2+y^2=2$,
令 $x-2=\sqrt{2}\cos\alpha$,$y=\sqrt{2}\sin\alpha$,$\alpha\in[0,2\pi)$,
则 $x+y=\sqrt{2}\cos\alpha+2+\sqrt{2}\sin\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+2$,
∵$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,1]$,
∴$x+y\in[0,4]$,
即 $x+y$ 的最大值和最小值分别为 4,0.

2.5 圆锥曲线统一的极坐标方程

1. D [解析] $\rho=\frac{8}{4-3\cos\theta}=\frac{2}{1-\frac{3}{4}\cos\theta}$,故 $e=\frac{3}{4}$,故选 D.

2. C [解析] 由 $\rho\cos^2\frac{\theta}{2}=1$,可得 $\rho\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}=1$,即 $\rho=2-\rho\cos\theta$,两边平方化成直角坐标方程为 $y^2=-4(x-1)$,∴极坐标方程 $\rho\cos^2\frac{\theta}{2}=1$ 表示的曲线是抛物线.

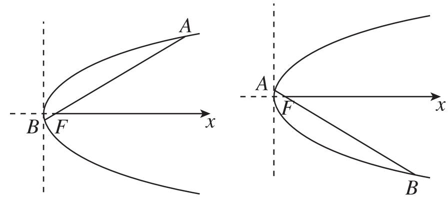
3. B [解析] $\rho=\frac{4}{5-3\cos\theta}$,其离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$,曲线为椭圆,焦准距 $p=\frac{a^2}{c}-c=\frac{4}{3}$,解得 $c=\frac{3}{4}$.

4. A [解析] 由 $\rho^2\cos 2\theta=4$,得 $\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=4$,其直角坐标方程是 $x^2-y^2=4$.

5. B [解析] $\rho=\frac{3}{3-2\cos\theta}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}$,其离心率 $e=\frac{2}{3}$,焦准距 $p=\frac{3}{2}$.

6. $0<a<3$ [解析] 由题知离心率 $e=\frac{a}{3}\in(0,1)$,故 $0<a<3$.

7. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$ [解析] 以抛物线的焦点 F 为极点,以 x 轴的正半轴为极轴,建立如图所示的极坐标系,则抛物线的极坐标方程是 $\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$.
设点 A 的极坐标为(ρ_1,θ),点 B 的极坐标为$(\rho_2,\pi+\theta)$,
∵$|FA|=\rho_1=\frac{2}{1-\cos\theta}$,$|FB|=\rho_2=\frac{2}{1+\cos\theta}$,
∴$\frac{2}{1-\cos\theta}+\frac{2}{1+\cos\theta}=16$,解得 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
故直线 l 的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.



8. $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ [解析] 设直线 AB 的极坐标方程为 $\theta=\theta_1(\rho\in\mathbf{R})$,$A(\rho_1,\theta_1)$,$B(\rho_2,\theta_1+\pi)$,则 $\rho_1=\frac{3}{1-2\cos\theta_1}$,

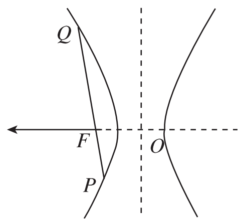
$\rho_2=\dfrac{3}{1-2\cos(\theta_1+\pi)}=\dfrac{3}{1+2\cos\theta_1}$.

又$|AB|=|\rho_1+\rho_2|=\left|\dfrac{3}{1-2\cos\theta_1}+\dfrac{3}{1+2\cos\theta_1}\right|=\left|\dfrac{6}{1-4\cos^2\theta_1}\right|=6$,

$\therefore\dfrac{1}{1-4\cos^2\theta_1}=\pm1$,$\therefore\cos\theta_1=0$ 或 $\cos\theta_1=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故直线 AB 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$.

9. $\dfrac{27}{4}$ [解析] 以双曲线的左焦点为极点,x 轴的负半轴为极轴,建立如图所示的极坐标系,则双曲线的极坐标方程是 $\rho=\dfrac{3}{1-2\cos\theta}$.



$\because S_{\triangle OFQ}=2S_{\triangle OFP}$,

$\therefore|FQ|=2|FP|$.

设点 P 的极坐标为(ρ_1,θ),点 Q 的极坐标为$(\rho_2,\pi+\theta)$,

$\therefore|FP|=\rho_1=\dfrac{3}{1-2\cos\theta}$,

$|FQ|=\rho_2=\dfrac{3}{1-2\cos(\pi+\theta)}$,

即$\dfrac{3}{1+2\cos\theta}=\dfrac{2\times3}{1-2\cos\theta}$,

$\therefore\cos\theta=-\dfrac{1}{6}$,

$\therefore|PF|+|FQ|=\rho_1+\rho_2=\dfrac{3}{1-2\cos\theta}+\dfrac{3}{1+2\cos\theta}=\dfrac{27}{4}$.

10. **解**:(1)由 $\rho=\dfrac{9}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$,得 $\rho=\dfrac{9}{\sin\theta+\cos\theta}$,

$\therefore\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=9$,

$\therefore$曲线 C 的直角坐标方程为 $x+y=9$.

(2)半圆$(x-1)^2+y^2=1(y\geqslant0)$的圆心$(1,0)$到直线 $x+y=9$ 的距离为 $4\sqrt{2}$,所以$|PQ|_{\min}=4\sqrt{2}-1$.

11. **解**:(1)把直线的极坐标方程 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$ 展开得 $\rho\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)=3\sqrt{2}$,可化为 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=6$,得到直角坐标方程为 $x-y+6=0$.

(2)$\because P$ 为椭圆 C:$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上一点,

$\therefore$可设 $P(4\cos\alpha,3\sin\alpha)$,

利用点到直线的距离公式得

$d=\dfrac{|4\cos\alpha-3\sin\alpha+6|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|5\sin(\alpha+\varphi)+6|}{\sqrt{2}}\leqslant\dfrac{|5+6|}{\sqrt{2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$(其中 $\sin\varphi=\dfrac{4}{5}$,$\cos\varphi=-\dfrac{3}{5}$),

当且仅当 $\sin(\alpha+\varphi)=1$ 时取等号,

$\therefore$点 P 到直线的距离的最大值是$\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$.

12. **解**:(1)曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{2}{1+\sin^2\theta}$,直线 l 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{4}{\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta}$,

根据 $\rho^2=x^2+y^2$,$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,

得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+2y^2=2$,直线 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{2}y=4$.

(2)设 $Q(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta)$,则点 Q 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta-4|}{\sqrt{3}}=\dfrac{\left|2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-4\right|}{\sqrt{3}}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

当且仅当 $\theta+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,即 $\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$时取等号,

$\therefore$点 Q 到直线 l 的距离的最小值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

13. **解**:以直角坐标系的原点为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,则椭圆的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{48}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$,

直线 l 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{24}{2\cos\theta+3\sin\theta}$.

设 P,Q,R 的极坐标分别为(ρ_2,θ),(ρ,θ),(ρ_1,θ),

则 $\rho_1^2=\dfrac{48}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$,$\rho_2=\dfrac{24}{2\cos\theta+3\sin\theta}$.

$\because|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$,$\therefore\rho\rho_2=\rho_1^2(\rho\neq0)$,

$\therefore\rho=\dfrac{4\cos\theta+6\sin\theta}{2\cos^2\theta+3\sin^2\theta}$(其中 $\rho\neq0$),

两边乘 ρ 化为直角坐标方程,整理得$\dfrac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\dfrac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1$($x,y$ 不同时为 0).

故点 Q 的轨迹是以$(1,1)$为中心,长、短半轴长分别为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$,$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$,且长轴平行于 x 轴的椭圆,但不包括原点.

§3 柱坐标系和球坐标系

1. A [解析] 由柱坐标与直角坐标的变换公式,得 $x=2\cos\dfrac{11\pi}{6}=\sqrt{3}$,$y=2\sin\dfrac{11\pi}{6}=-1$,$z=1$.

2. C [解析] 由柱坐标与直角坐标的变换公式,有 $r=\sqrt{x^2+y^2}=2$,$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-\sqrt{3}$,$z=4$,

$\because x<0,y>0$,$\therefore\theta=\dfrac{2\pi}{3}$,$\therefore$所求柱坐标是$\left(2,\dfrac{2\pi}{3},4\right)$.

3. B [解析] 由点的柱坐标的意义可知选 B.

4. A [解析] 由球坐标与直角坐标的变换公式,有 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$,

由 $r\cos\varphi=z$,得 $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,又 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{6}$,

由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-1$,且 $x>0,y<0,0\leqslant\theta<2\pi$,得 $\theta=\dfrac{7\pi}{4}$,

$\therefore$点 M 的球坐标为$\left(2\sqrt{2},\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

5. $(-2,2,2\sqrt{2})$ $\left(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$ [解析] 设 M 的直角坐标为(x,y,z),柱坐标为(r,θ,z).

则 $x=4\times\sin\dfrac{\pi}{4}\times\cos\dfrac{3\pi}{4}=-2$,

$y=4\times\sin\dfrac{\pi}{4}\times\sin\dfrac{3\pi}{4}=2$,

$z=4\times\cos\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$,

$\therefore$点 M 的直角坐标为$(-2,2,2\sqrt{2})$.

又由$\begin{cases}-2=r\cos\theta,\\2=r\sin\theta,\\z=2\sqrt{2},\end{cases}$ 得 $r=2\sqrt{2}$,$\theta=\dfrac{3\pi}{4}$,$z=2\sqrt{2}$,

$\therefore$点 M 的柱坐标为$\left(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4},2\sqrt{2}\right)$.

6. $2\sqrt{2}$ [解析] 点 M 到 Oz 轴的距离为 $r\sin\varphi=4\times\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$.

7. 半平面 [解析] 在柱坐标系中,方程 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 表示的是过 z 轴的半平面.

8. 球面 [解析] 在球坐标系中,方程 $r=2$ 表示以原点 O 为

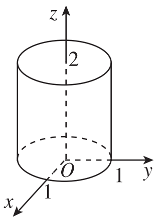
球心,2为半径的球面.

9. $\sqrt{53}$ [解析] 点 M,N 的直角坐标分别是 $M(3,\sqrt{3},2)$,$N(-2,2\sqrt{3},-3)$,由两点间的距离公式,
得 $|MN|=\sqrt{(-5)^2+(\sqrt{3})^2+(-5)^2}=\sqrt{53}$.

10. $\left(R,\frac{5\pi}{18},\frac{29\pi}{45}\right)$ [解析] $\varphi=(90-40)\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{18}$,$\theta=116\times\frac{\pi}{180}=\frac{29\pi}{45}$,则所求的球坐标是 $\left(R,\frac{5\pi}{18},\frac{29\pi}{45}\right)$.

11. **解**:以圆形体育馆的中心 O 为极点,选取以 O 为端点且过正东入口的射线 Ox 为极轴,在地面上建立极坐标系,则点 A 与体育馆中轴线 Oz 的距离为 203 m,极轴 Ox 按逆时针方向旋转 $\frac{17\pi}{16}$,就得到 OA 在地平面上的射影,A 距地面的高度为 2.8 m,因此我们可以用柱坐标来表示点 A 的准确位置,所以点 A 的柱坐标为 $\left(203,\frac{17\pi}{16},\frac{14}{5}\right)$.

12. **解**:根据柱坐标系与点的柱坐标的意义可知,满足 $r=1,0\leqslant\theta<2\pi,0\leqslant z\leqslant 2$ 的动点 $M(r,\theta,z)$ 的轨迹为如图所示的圆柱面,所围成的封闭图形是以直线 Oz 为轴,轴截面为正方形的圆柱.圆柱的底面半径 $r=1,h=2$,$\therefore V=Sh=\pi r^2h=2\pi$.



13. **解**:点 C_1 的直角坐标为 $(1,1,\sqrt{2})$.
设 C_1 的球坐标为 (r,φ,θ),其中 $r\geqslant 0$,$0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta<2\pi$,
由 $x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$,
得 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1^2+1^2+(\sqrt{2})^2}=2$,
又 $z=r\cos\varphi$,
$\therefore\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$,
又 $\tan\theta=\frac{y}{x}=1$,
$\therefore\theta=\frac{\pi}{4}$,
从而点 C_1 的球坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

14. **解**:在赤道平面上,选取地球球心为极点 O,以 O 为端点且与本初子午线相交的射线 Ox 为极轴,建立球坐标系.
由航天器位于东经 80°,可知 $\theta=80^\circ=\frac{4}{9}\pi$,
由航天器位于北纬 45°,可知 $\varphi=90^\circ-45^\circ=45^\circ=\frac{\pi}{4}$,由航天器离地面 2384 千米,地球半径为 6371 千米,可知 $r=2384+6371=8755$(千米),所以点 P 的球坐标为 $\left(8755,\frac{\pi}{4},\frac{4\pi}{9}\right)$.

第二章 参数方程

§1 参数方程的概念

1. A [解析] 由参数方程的概念知 $\begin{cases}x=m,\\y=m\end{cases}$($m$ 为参数)是参数方程,其他都不是,故选 A.

2. C [解析] 设与 x 轴交点的直角坐标为 (x,y).令 $y=0$,得 $t=1$,代入 $x=1+t^2$,得 $x=2$,$\therefore$曲线与 x 轴交点的直角坐标为 $(2,0)$.

3. C [解析] 由题意可知曲线的普通方程为 $x^2+y^2=1$,只有 C 选项符合.

4. A [解析] 设 $A(x,y)$,则 $|OA|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$.

5. $(0,-1),(0,1)$ [解析] 把 $x=0$ 代入参数方程,得 $\begin{cases}0=t^2-1,\\y=-t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=1,\\y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t=-1,\\y=1.\end{cases}$

6. $(3,0)$ [解析] 由题意可知椭圆的普通方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,故 $a=5,b=4,c=\sqrt{a^2-b^2}=3$,则右焦点坐标为 $(3,0)$.

7. -5 [解析] 把点 M 的坐标代入参数方程,得 $\begin{cases}3=\lambda+1,\\p=-2\lambda^2+3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=2,\\p=-5.\end{cases}$

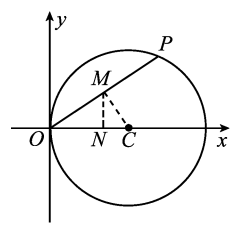
8. 0 或 2 [解析] 当 $y=1$ 时,$t^2=1$,$\therefore t=\pm 1$.
当 $t=1$ 时,$x=2$;当 $t=-1$ 时,$x=0$.

9. $\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ [解析] 将点 $(-3,-3\sqrt{3})$ 的坐标代入参数方程,解得 $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2},\\\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$
所以 $\theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

10. $\sqrt{5}$ [解析] 将 $t=0,t=1$ 分别代入直线的参数方程,可得相应的点的直角坐标分别为 $(2,-1)$ 和 $(4,0)$,故两点间的距离为 $\sqrt{5}$.

11. **解**:(1)把点 $A(1,\sqrt{3})$ 的坐标代入参数方程,得 $\begin{cases}1=2\cos\theta,\\\sqrt{3}=2\sin\theta,\end{cases}$
在 $[0,2\pi)$ 内,此方程组的解是 $\theta=\frac{\pi}{3}$.
把 $B(2,1)$ 的坐标代入参数方程,得 $\begin{cases}2=2\cos\theta,\\1=2\sin\theta,\end{cases}$
在 $[0,2\pi)$ 内,此方程组无解.
故 A 点在曲线 C 上,而 B 点不在曲线 C 上.
(2)由点 $C(-\sqrt{3},a)$ 在曲线 C 上,得 $\begin{cases}-\sqrt{3}=2\cos\theta,\\a=2\sin\theta,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\\sin\theta=\frac{a}{2},\end{cases}$
又由 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $\sin\theta=\pm\frac{1}{2}$,
$\therefore a=\pm 1$.

12. **解**:把圆的一般方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 化为标准方程得 $(x-a)^2+y^2=a^2$,则圆心坐标为 $C(a,0)$,半径为 a.
如图,设 OP 是过原点的任意一条弦,$M(x,y)$ 是弦 OP 的中点,弦 OP 与 x 轴的夹角为 θ,θ 为参数,连接 CM,过 M 作 $MN\perp x$ 轴于点 N,则 $|OM|=|OC|\cos\theta=a\cos\theta$,



$\therefore|ON|=|OM|\cos\theta=a\cos^2\theta$,$|MN|=|OM|\sin\theta=a\cos\theta\sin\theta$,
$\therefore$所有弦的中点的轨迹的参数方程是 $\begin{cases}x=a\cos^2\theta,\\y=a\cos\theta\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

13. **解**:因为圆的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=1+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),
所以 $2x+y=2\cos\theta+\sin\theta+1=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+1$,其中 $\tan\varphi=2$,