全品®
CANPOINT®
教与学整体设计

全品学练考

导学案

LEARN
PRACTISE TEST

高中数学
选修4-4 新课标（BS）

主编：肖德好

本册主编：程传道
编　　者：程传道　李　勇　贺　江
　　　　　孙春生　叶勇胜

黄河出版传媒集团
阳光出版社

图书在版编目（CIP）数据

全品学练考：新课标版．高中数学．4-4：选修/肖德好主编．—银川：阳光出版社，2012.8（2018.8 重印）

（教与学整体设计）

ISBN 978-7-5525-0346-3

Ⅰ.①全…　Ⅱ.①肖…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 194311 号

教与学整体设计

全品学练考　高中数学　选修 4-4　　**肖德好　主编**

责任编辑　谢　瑞

封面设计　锦时创意

黄河出版传媒集团 阳光出版社 出版发行

地　　址　宁夏银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)

网　　址　http://www.yrpubm.com

网上书店　http://www.hh-book.com

电子信箱　yangguang@yrpubm.com

邮购电话　0951—5014139

经　　销　全国新华书店

印刷装订　三河市德鑫印刷有限公司

印刷委托书号　(宁)0009683

开　　本　880mm×1230mm　1/16

印　　张　6.5

字　　数　228 千字

版　　次　2012 年 8 月第 1 版

印　　次　2018 年 8 月第 7 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5525-0346-3

定　　价　25.80 元

Contents

目录 | 导学案

新课学案 · 接力教材

导学案 DAO XUE AN

第一章　坐标系

§1　平面直角坐标系

1.1　平面直角坐标系与曲线方程

预习探究　　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　坐标系的作用

1. 在平面直角坐标系中，对于任意一点，都有唯一的有序实数对________与之对应；反之，对于任意的一个有序实数对________，都有唯一的点与之对应．即在平面直角坐标系中，点和有序实数对是____________的．
2. 曲线可以看作是满足某些条件的点的集合或轨迹，由此我们可以借助坐标系，研究曲线与方程间的关系．

▶ 知识点二　建立平面直角坐标系的一般原则

建立平面直角坐标系时，根据几何特点选择适当的平面直角坐标系：

(1)如果图形有对称中心，可以选对称中心为________；

(2)如果图形有对称轴，可以选择对称轴为________；

(3)使图形上的________尽可能多地在坐标轴上．

▶ 知识点三　用平面直角坐标系解决几何问题的步骤

第一步，建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中涉及的几何元素，将几何问题转化为代数问题；第二步，通过代数运算解决代数问题；第三步，把代数运算结果翻译成几何结论．

[探究] 已知点 $P(-1+2m,-3-m)$ 在第三象限，则 m 的取值范围是________．

考点类析　　考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　平面直角坐标系中点的坐标的确定

例1　如图 1-1-1，等边三角形 ABC 的边长为 2，顶点 A 在坐标原点，点 B 在 x 轴的正半轴上，则 A，B，C 三点的坐标分别为______________________．

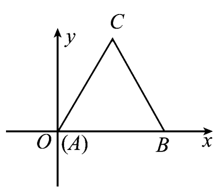

图 1-1-1

例2　(1)直线 $2x-3y+5=0$ 与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 的交点坐标为__________．

(2)已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点 A，B，C 的坐标分别为 $(-1,2)$，$(3,0)$，$(5,1)$，则点 D 的坐标是________．

▶ 考点二　曲线方程

例3　已知一条长为 4 的线段的两个端点 A，B 分别在 x，y 轴上滑动，求线段 AB 的中点 P 的轨迹方程．

例4　已知点 $A(-1,3)$，$B(3,3)$，若点 C 与 A，B 不重合且满足 $\angle ACB=90°$，求点 C 的轨迹方程．

【变式】已知一条长为 6 的线段的两个端点 A，B 分别在 x，y 轴上滑动，点 M 在线段 AB 上，且 $AM:MB=1:2$，求动点 M 的轨迹方程．

▶ 考点三　坐标法的综合应用

例5　已知等边三角形 ABC 的边长为 a，在平面上求一点 P，使 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2$ 最小，并求出此最小值．

【变式】已知$\triangle ABC$的三边a,b,c满足$b^2+c^2=5a^2$,BE,CF分别为边AC,AB上的中线,试判断BE与CF的位置关系.

1.2 平面直角坐标轴中的伸缩变换

预习探究 梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 坐标伸缩变换

1. 设$P(x,y)$是平面直角坐标系中的任意一点,保持纵坐标y不变,将横坐标x缩短为原来的$\frac{1}{k}(k>1)$,得到点$P'(x',y')$,即$\begin{cases}x'=\frac{1}{k}x,\\y'=y.\end{cases}$ ①

我们把①式叫作平面直角坐标系中的一个__________.

2. 设$P(x,y)$是平面直角坐标系中的任意一点,保持横坐标x不变,将纵坐标y伸长为原来的$k(k>1)$倍,得到点$P'(x',y')$,即$\begin{cases}x'=x,\\y'=ky.\end{cases}$ ②

我们把②式叫作平面直角坐标系中的一个__________.

3. 设$P(x,y)$是平面直角坐标系中的任意一点,在变换φ:$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y(\mu>0)\end{cases}$的作用下,点$P(x,y)$对应到点$P'(x',y')$,称$\varphi$为平面直角坐标系中的__________,简称伸缩变换.

[思考] 坐标伸缩变换中,变换的系数应具有什么特点?平面直角坐标系发生变化吗?

[探究] (1)在平面直角坐标系中,求点(1,2)经过伸缩变换$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$后所得点的坐标;

(2)在平面直角坐标系中,已知点A经过伸缩变换$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$后所得点的坐标为(4,9),求点$A$的坐标.

▶ 知识点二 图形伸缩变换

在坐标伸缩变换的作用下,可以实现平面图形的伸缩变换,即平面图形的伸缩变换可以用坐标伸缩变换表示.

在变换φ的作用下,直线变成________;圆可以变成____,椭圆可以变成________;抛物线、双曲线分别变成________、________.

[讨论] 经过伸缩变换后,直线变成了什么图形?圆可以变为椭圆吗?圆可以变为正方形吗?

考点类析 考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 点、直线的伸缩变换

例1 在同一平面直角坐标系中,已知伸缩变换φ:$\begin{cases}x'=3x,\\2y'=y,\end{cases}$则点$A\left(\frac{1}{3},-2\right)$经过变换$\varphi$后所得的点$A'$的坐标为__________.

例2 在平面直角坐标系中,求直线$2x-6y+1=0$经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y\end{cases}$后的图形.

【变式】已知$\square ABCD$的四个顶点的坐标分别是$A(-2,1)$,$B(-1,3)$,$C(3,4)$,$D(2,2)$,则经过伸缩变换$\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y\end{cases}$后,$\square ABCD$变成什么图形?

▶ 考点二　曲线的伸缩变换

例 3 求曲线 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 经伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$ 后的曲线方程.

例 4 在平面直角坐标系中,求圆 $x^2+y^2=5$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ 后的图形.

【变式 1】 在平面直角坐标系中,求椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=4y\end{cases}$ 后的图形.

【变式 2】 求双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{64}=1$ 经过变换 $\varphi:\begin{cases}x'=3x,\\ 2y'=y\end{cases}$ 后所得曲线 C' 的焦点坐标.

▶ 考点三　已知伸缩变换后的图形方程,确定原图形的方程或变换公式

例 5 在平面直角坐标系中,将抛物线 $y^2=4x$ 变成抛物线 $y'^2=9x'$ 的伸缩变换是________.

例 6 在平面直角坐标系中,已知曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=6x,\\ y'=5y\end{cases}$ 后变成双曲线 $\frac{x'^2}{36}-\frac{y'^2}{25}=1$,则曲线 C 是什么图形?

【变式】 在 x 轴上的单位长度为 y 轴上单位长度的 2 倍的平面直角坐标系中,以原点为圆心,4 为半径的圆的图形变为________.

§2　极坐标系

2.1　极坐标系的概念

预习探究　　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　极坐标系和点的极坐标

1. 如图 1-2-1,在平面内取一个定点 O,叫作________,从 O 点引一条射线 Ox,叫作________,再选定一个单位长度和角的正方向(通常取逆时针方向),这样就建立了一个________________.

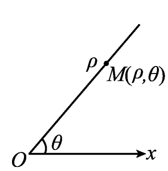

图 1-2-1

极坐标系的四要素:________、________、单位长度、角的正方向.

2. 对于平面内任意一点 M,用 ρ 表示线段 OM 的长,θ 表示以 Ox 为始边、OM 为终边的角度,ρ 叫作点 M 的________,θ 叫作点 M 的________,有序实数对 (ρ,θ) 叫作点 M 的________,记为 $M(\rho,\theta)$.

规定:当点 M 在极点时,它的极径 $\rho=0$,极角 θ 可以取任意值.

3. 一般地,不作特殊说明时,$\rho\geqslant 0$,θ 可取________.

▶ 知识点二　极坐标的多值性

1. 在极坐标系中,给定极坐标 (ρ,θ),其对应的点的位置是________.

2. 在极坐标系中,极坐标 (ρ,θ) 与 $(\rho,\theta+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 表示________.

特别地,极点 O 的极坐标为 $(0,\theta)(\theta\in\mathbf{R})$.

3. 如果规定 $\rho>0$,$0\leqslant\theta<2\pi$,那么除了极点外,平面内的点可用唯一的极坐标________表示;同时,每一个极坐标 (ρ,θ) 表示的点也是________的.

[思考] 设 $P(\rho,\theta)$ 是平面内一点,则点 P 关于极轴、极垂线(过极点且垂直于极轴的直线)、极点对称的点的极坐标分别是什么?

［讨论］给定平面内任意一点，是否可以找到唯一的极坐标？

4. 负极径的规定：在极坐标系中，极径 ρ 允许取负值，当 $\rho<0$ 时，点 M 位于极角的终边的________，且 $|\rho|=|OM|$. $M(\rho,\theta)$ 可以表示为________或________ $(k\in\mathbf{Z})$.

知识点三　平面直角坐标系与极坐标系的区别

1. 在直角坐标系中，点与直角坐标是“一对一”的关系；在极坐标系中，虽然一个极坐标 (ρ,θ) 只能与一个点 P 对应，但一个点 P 却可以与无数多对极坐标对应，即点与极坐标是“一对多”的关系.
2. 多值性是极坐标与直角坐标的重要区别.

考点类析

考点全息　深度挖掘

考点一　点与极坐标的对应关系

例1 (1)在极坐标系中，与 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 所表示的点不同的是________（填序号）.

①$\left(2,-\frac{5\pi}{3}\right)$；②$\left(2,\frac{7\pi}{3}\right)$；③$\left(2,\frac{5\pi}{3}\right)$；④$\left(2,-\frac{11\pi}{3}\right)$.

(2)点 $\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$ 用 $\rho>0,\theta\in[0,2\pi)$ 表示时对应的坐标为________；用 $\rho>0,\theta\in[-2\pi,0)$ 表示时对应的坐标为________.

例2 如图 1-2-2，在极坐标系中，已知 A 点的极坐标为 $(4,0)$，写出图中 B,C,D,E,F,G 各点的极坐标 $(\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi)$.

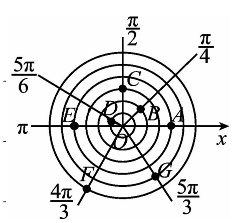

图 1-2-2

【变式】用点 A,B,C,D,E 分别表示教学楼、体育馆、图书馆、实验楼、办公楼的位置. 建立如图 1-2-3 所示的极坐标系，写出各点的极坐标 $(\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi)$.

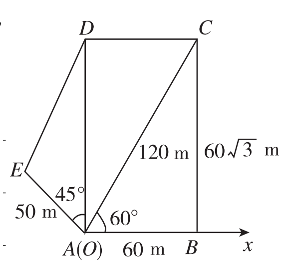

图 1-2-3

考点二　点与点的位置关系

例3 在极坐标系中，已知 $Q\left(2,\frac{4\pi}{15}\right)$，分别求出满足下列条件的点的极坐标 $(\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<2\pi)$：

(1) P_1 是点 Q 关于极点 O 的对称点，则 P_1 的极坐标是________；

(2) P_2 是点 Q 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 的对称点，则 P_2 的极坐标是________；

(3) P_3 是点 Q 关于极轴的对称点，则 P_3 的极坐标是________.

例4 在极坐标系中，求 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $B\left(1,\frac{2\pi}{3}\right)$ 两点间的距离.

【变式 1】在极坐标系中，已知 $A\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $B\left(6,\frac{4\pi}{3}\right)$，求线段 AB 的中点的极坐标.

【变式 2】在极坐标系中，已知点 $Q(\rho,\theta)$，分别按下列条件求出点 P 的极坐标 $(\theta\in\mathbf{R})$.

(1)点 P 是点 Q 关于极点 O 的对称点；

(2)点 P 是点 Q 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 的对称点.

2.2 点的极坐标与直角坐标的互化

预习探究

梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 极坐标与直角坐标的互化

把直角坐标系的原点作为________，x 轴的正半轴作为________，建立极坐标系，并在两种坐标系中取相同的________. 设平面内任意一点 M 的直角坐标为(x,y)，极坐标为(ρ,θ)，则$\begin{cases}x=______,\\ y=______\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq0).\end{cases}$

上述两组公式就是极坐标与直角坐标的互化公式.

用上述公式，可以实现点的极坐标与直角坐标的互化.

[思考] 要进行点的极坐标与直角坐标的互化，必须具备什么条件？

▶ 知识点二 极坐标与直角坐标互化的步骤

1. 把点 M 的极坐标(ρ,θ)化为直角坐标(x,y)，只需应用公式________即可求得 x,y，且答案是唯一的.
2. 若把直角坐标(x,y)化为极坐标(ρ,θ)，只需应用公式________即可求出 ρ,θ. 求极径 ρ 时，只考虑 $\rho\geqslant0$；求极角 θ 时，应注意根据直角坐标判断点 M 所在的象限（即角 θ 的终边的位置），以便正确地求出角 θ，一般取 $\theta\in[0,2\pi)$.

利用两种坐标的互化，可以把不熟悉的问题转化为熟悉的问题.

[讨论] 如何由 $\tan\theta$ 的值确定极角 θ 的值？

[探究] 如果点的直角坐标(x,y)满足 $xy<0$，那么在限定 $\rho>0$，$\theta\in\mathbf{R}$ 的情况下转化为点的极坐标时，试探究 θ 的取值范围.

考点类析

考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 把点的极坐标化为直角坐标

例1 把点 A 的极坐标 $\left(6,\dfrac{4\pi}{3}\right)$ 化为直角坐标为________.

例2 在极坐标系中，已知点 $M\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$N\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$，求 M，N 两点之间的距离及直线 MN 与极轴的正方向所成的角.

【变式】在极坐标系中，求点 $P\left(4,-\dfrac{\pi}{3}\right)$关于极轴的对称点 P' 的直角坐标.

▶ 考点二 把点的直角坐标化为极坐标

例3 点 M 的直角坐标为$(\sqrt{3},-3)$，则其极坐标中的极角 $\theta=$________$(\theta\in[0,2\pi))$.

例4 把点 P 的直角坐标$(-\sqrt{2},\sqrt{6})$化成极坐标$(\theta\in[0,2\pi))$.

▶ 考点三 点的极坐标与直角坐标互化的应用

例5 在极坐标系中，已知点 $A\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$B\left(2,-\dfrac{\pi}{3}\right)$，则线段 AB 的长为________；线段 AB 的中点的极坐标$(\theta\in[0,2\pi))$为________.

例6 在极坐标系中，已知点 $A\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$，$B\left(2,-\dfrac{\pi}{6}\right)$，求 A，B 两点间的距离.

【变式】已知 M，N 两点的极坐标分别是 $\left(3,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，求线段 MN 的中点的直角坐标.

2.3 直线和圆的极坐标方程

预习探究

梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 极坐标方程的定义

1. 定义：在极坐标系中，如果曲线 C 上的每个点的极坐标中__________满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$，并且极坐标满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 的点都在______上，那么方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 叫作曲线 C 的________，曲线 C 叫作极坐标方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 的曲线.
2. 求曲线的极坐标方程的步骤：
(1)建立适当的极坐标系，设 M______是曲线上任意一点；
(2)根据曲线上的点所满足的条件，列出以____，____为变量的等式；
(3)化简，得所求曲线的________；
(4)检验所得极坐标方程是否________.
[思考] 曲线的极坐标方程是否唯一？

▶ 知识点二 直线的极坐标方程

1. 过极点且倾斜角是 α 的直线的极坐标方程是__________.
2. 在极坐标系中，过点 $A(a,0)(a>0)$，且垂直于极轴的直线的极坐标方程是________.
3. 在极坐标系中，过点 $A\left(a,\frac{\pi}{2}\right)(a>0)$，且平行于极轴的直线的极坐标方程是________.
4. 在极坐标系中，过 $P(\rho_1,\theta_1)$ 且与极轴所成的角为 α 的直线的极坐标方程是__________.
[思考] 在极坐标系中，直线和它的极坐标方程是一一对应的吗？

[讨论] 在极坐标系中，当 $\rho\geqslant0$，$\rho\in\mathbf{R}$ 时，极坐标方程 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 分别表示什么曲线？

▶ 知识点三 圆的极坐标方程

1. 圆心在极点，半径为 r 的圆的极坐标方程是______.
2. 圆心为极轴上的点 $(a,0)(a>0)$，且过极点 O 的圆的极坐标方程是______.
[思考] 如何建立极坐标系，可使得圆的极坐标方程最简单？

[探究] 如何求圆心为 $C(\rho_1,\theta_1)$，半径为 r 的圆的极坐标方程？

考点类析

考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 直线的极坐标方程

例1 (1)经过极点，与极轴的夹角为 $\frac{\pi}{12}$ 的直线 l 的极坐标方程为__________；
(2)已知点 P 的极坐标为 $(1,\pi)$，那么过点 P 且垂直于极轴的直线的极坐标方程是__________.

例2 极坐标系中，直线 l 经过点 $M\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$，且该直线与极轴的正方向所成角为 $\frac{\pi}{4}$，求直线 l 的极坐标方程.

▶ 考点二 圆的极坐标方程

例3 求圆心为 $C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，半径为 3 的圆的极坐标方程.

例4 在极坐标系中，求圆心在点 $C\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$ 处，且过极点的圆的极坐标方程.

【变式】如图 1-2-4，在极坐标系中，圆 C 的圆心为 $(4,0)$，半径 $r=|OC|=4$，从极点 O 作圆 C 的弦 ON，求 ON 的中点 M 的轨迹的极坐标方程.

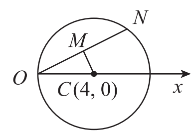

图 1-2-4

2.4　曲线的极坐标方程与直角坐标方程的互化

预习探究
梳理教材　探究疑难

▶ 知识点　极坐标方程与直角坐标方程的互化

当极点与原点重合，极轴与 x 轴正半轴重合，单位长度相同时，利用 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 可将直角坐标方程化为极坐标方程，利用 $\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2,\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq0)\end{cases}$ 可将极坐标方程化为直角坐标方程.

［探究］在极坐标系中，点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\sin\theta=2$ 的距离等于________.

考点类析
考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　将极坐标方程化为直角坐标方程

例 1　(1)化极坐标方程 $\rho^2\cos\theta-\rho=0$ 为直角坐标方程为________________.

(2)已知某圆的极坐标方程为 $\rho^2-4\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+6=0$，其直角坐标方程为________________.

例 2　曲线的极坐标方程为 $\rho=\tan\theta\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}$，求曲线的直角坐标方程.

【变式】求极坐标方程 $\rho=\sin\theta+2\cos\theta$ 所表示的曲线.

▶ 考点二　将直角坐标方程化为极坐标方程

例 3　将下列直角坐标方程化为极坐标方程：

(1) $x=2$；

(2) $\sqrt{3}x+y-2=0$.

例 4　从原点 O 引直线交直线 $2x+4y-1=0$ 于点 M，P 为 OM 上一点，已知 $|OP|\cdot|OM|=1$，求点 P 的轨迹的极坐标方程.

▶ 考点三　极坐标方程与直角坐标方程互化的综合应用

例 5　在极坐标系中，已知一个圆的方程为 $\rho=12\cdot\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$，求过圆心且与极轴垂直的直线的极坐标方程.

例 6　已知圆 O_1 和圆 O_2 的极坐标方程分别为 $\rho=2$，$\rho^2-2\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$.

(1)把圆 O_1 和圆 O_2 的极坐标方程化为直角坐标方程.

(2)圆 O_1，O_2 是否相交？若相交，请求出公共弦的长；若不相交，请说明理由.

2.5 圆锥曲线统一的极坐标方程

预习探究 梳理教材 探究疑难

▶ 知识点 圆锥曲线统一的极坐标方程

设定点为 F，定直线为 l，过定点 F 作定直线 l 的垂线，垂足为 K，以 F 为极点，FK 的反向延长线 Fx 为极轴，建立极坐标系. 若 $M(\rho,\theta)$ 为圆锥曲线上任意一点，连接 MF，作 $MA\perp l$，$MB\perp Fx$，垂足分别为 A，B，则 $\frac{|MF|}{|MA|}=e$，$|FK|=p$，可得圆锥曲线统一的极坐标方程是 $\rho=$________，当 $0<e<1$ 时，它表示________；
当 $e=1$ 时，它表示________；
当 $e>1$ 时，它表示________.

[探究] 方程 $\rho=\frac{10}{5-3\cos\theta}$ 表示的曲线的离心率为______.

[讨论] 在极坐标系中圆锥曲线统一的极坐标方程的坐标系是怎么构建的？

考点类析 考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 圆锥曲线的极坐标方程

例 1 求椭圆 $\rho=\frac{5}{3-2\cos\theta}$ 的长轴长.

例 2 平面直角坐标系中，有一定点 $F(2,0)$ 和一条定直线 l：$x=-2$. 求与定点 F 的距离和定直线 l 的距离的比等于常数 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹的极坐标方程.

▶ 考点二 用圆锥曲线统一的极坐标方程解决综合问题

例 3 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 的右支于 A，B 两点，若 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，求 C 的离心率.

§3 柱坐标系和球坐标系

预习探究 梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 柱坐标系

1. 在平面极坐标系的基础上，通过极点 O，再增加一条与极坐标系所在平面垂直的 z 轴，这样就建立了________.

设 $M(x,y,z)$ 为空间一点，并设点 M 在 xOy 平面上的投影点 P 的极坐标为 (r,θ)，则这样的三个数 r,θ,z 构成的有序数组________就叫作点 M 的柱坐标（如图 1-3-1 所示），这里规定 r，θ，z 的变化范围为 $r\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$z\in\mathbf{R}$.

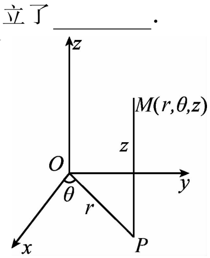

图 1-3-1

柱坐标系又称半极坐标系，它是由平面极坐标系及空间直角坐标系中的一部分建立起来的.

2. 空间点 M 的直角坐标 (x,y,z) 与柱坐标 (r,θ,z) 之间的变换关系为____________.

[思考] 要刻画一个空间点的位置，就距离和角的个数来说有什么要求？

▶ 知识点二 球坐标系

1. 设 $M(x,y,z)$ 为空间一点，点 M 可用这样三个有次序的数 r,φ,θ 来确定，其中 r 为原点 O 到点 M 间的距离，φ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正方向所夹的角，θ 为从 z 轴正半轴看，x 轴正半轴按逆时针方向旋转到有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的角，这里 P 为点 M 在 xOy 平面上的投影(如图 1-3-2 所示)，这样的三个数 r,φ,θ 构成的有序数组________叫作点 M 的球坐标，这里 r,φ,θ 的变化范围为 $r\geqslant 0,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta<2\pi$. 我们把建立上述对应关系的坐标系叫作球坐标系.

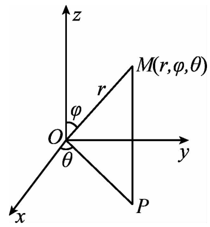

图 1-3-2

2. 空间点 P 的直角坐标 (x,y,z) 与球坐标 (r,φ,θ) 之间的变换关系为____________.

[探究] 在柱坐标系中，方程 $r=1$ 表示空间中的什么曲面？在球坐标系中，方程 $r=1$ 表示空间中的什么曲面？

▶ 知识点三 空间直角坐标系、柱坐标系和球坐标系的区别与联系

1. 柱坐标系和球坐标系都是以空间直角坐标系为背景，柱坐标系中一点在平面 xOy 内的坐标是极坐标，竖坐标和空间直角坐标系的竖坐标相同；球坐标系中，则以一点到原点的距离和两个角来刻画点的位置.
2. 空间直角坐标系、柱坐标系和球坐标系都是空间坐标系，空间的坐标都是________有序数值.

考点类析

考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 柱坐标系与空间直角坐标系

例 1 (1)已知点 A 的直角坐标为 $(-1,\sqrt{3},4)$，则它的柱坐标为____________；

(2)已知点 P 的柱坐标为 $\left(\sqrt{3},-\frac{\pi}{6},1\right)$，则它的直角坐标为____________.

例 2 建立适当的柱坐标系，表示棱长为 1 的正方体的各顶点.

▶ 考点二 球坐标系与空间直角坐标系

例 3 (1)已知点 M 的直角坐标为 $(-2,2,-2\sqrt{2})$，则它的球坐标为____________.

(2)已知点 Q 的球坐标为 $\left(8,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，则它的直角坐标为____________.

例 4 在球坐标系中，已知点 $A\left(3,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$，$B\left(3,\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\right)$，求 A,B 两点间的距离.

▶ 考点三 空间坐标系的应用

例 5 已知点 P_1 的球坐标是 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$，点 P_2 的柱坐标是 $\left(\sqrt{6},\frac{\pi}{6},1\right)$，求 P_1,P_2 两点间的距离.

例 6 长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 在平面 xOy 中，其中两个顶点的坐标分别为 $A_1(4,0,5)$(直角坐标)，$C_1\left(6,\frac{\pi}{2},5\right)$(柱坐标)，求此长方体的外接球的体积.