测评卷 CE PING JUAN

班级:______ 姓名:______ 得分:______

单元测评(一)

第一章

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷40分,第Ⅱ卷110分,共150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷 (选择题 共40分)

一、选择题(本大题共10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 在$\triangle ABC$中,$a=15$,$b=10$,$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$\sin B=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别是a,b,c,若$a=1$,$c=2$,$B=60°$,则b等于 ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}$ D. 1

3. 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若$a=k(k>0)$,$b=\sqrt{3}k$,$A=45°$,则满足条件的三角形有 ( )

A. 0个 B. 1个

C. 2个 D. 无数个

4. 已知圆的半径$R=4$,a,b,c为该圆的内接三角形的三边,若$abc=16\sqrt{2}$,则三角形的面积为 ( )

A. $2\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 在直角梯形$ABCD$中,$AB\parallel CD$,$\angle ABC=90°$,$AB=2BC=2CD$,则$\cos\angle DAC=$ ( )

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,则$\triangle ABC$是 ( )

A. 等边三角形

B. 有一个角是30°的直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 有一个角是30°的等腰三角形

7. 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若$\triangle ABC$的面积为S,且$2S=a^2+b^2-c^2$,则$\tan C=$ ( )

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

8. 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别是a,b,c.已知$b^2+c^2-a^2=bc$,$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$,则角$B$的大小为 ( )

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

9. 在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,下列结论不正确的是 ( )

A. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ B. $a\sin B=b\sin A$

C. $a=b\cos C+c\cos B$ D. $a\cos B+b\cos A=\sin C$

10. 在$\triangle ABC$中,$AB=2AC$,AD是$\angle A$的平分线,且$AC=tAD$,则t的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$ B. $\left(1,\frac{4}{3}\right)$

C. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$ D. $\left(\frac{3}{4},1\right)$

请将选择题答案填入下表:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
答案											

第Ⅱ卷 (非选择题 共110分)

二、填空题(本大题共7小题,多空题每小题6分,单空题每小题4分,共36分,把答案填在题中横线上)

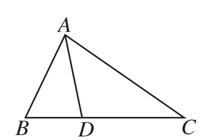
11. 在$\triangle ABC$中,边a,b,c所对的角分别为A,B,C,若$a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$,$\sin C=2\cos B$,则$A=$______,$C=$______.

12. 已知$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边长分别为3,5,7,则$\cos C=$______,该三角形的外接圆半径等于______.

13. 已知$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且满足$2\cos^2 A+\sqrt{3}\sin 2A=2$,$b=1$,$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$A=$______,$\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=$______.

14. 在$\triangle ABC$中,若$AB=2$,$AC=3$,$\angle A=60°$,则$BC=$______;若$AD\perp BC$于D,则$AD=$______.

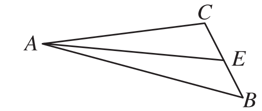
15. 如图D1-1,已知两灯塔A,D相距20海里,甲、乙两船同时从灯塔A处出发,分别沿与AD所成角相等的两条航线AB,AC航行,经过一段时间分别到达B,C两处,此时恰好B,D,C三点共线,且$\angle ABD=\frac{\pi}{3}$,$\angle ADC=\frac{7\pi}{12}$,则乙船航行的距离$AC$为______海里.



图D1-1

16. 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若$c^2-(a-b)^2=6$,$C=120°$,则$\triangle ABC$的面积为______.

17. 如图D1-2,$\triangle ABC$中,$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$,且$BC=1$,若E为BC的中点,则AE的最大值是______.



图D1-2

三、解答题(本大题共5小题,共74分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

18. (14分)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$.

(1)求角A的大小;

(2)若$b=3$,$c=2$,求a的值.

19. (15分)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,$a+b=2\sqrt{3}$,$ab=2$,且$2\cos A\cos B-2\sin A\sin B=1$.求:

(1)角C的度数;

(2)$\triangle ABC$的周长.

20. (15 分)已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若向量 $\boldsymbol{m}=\left(\cos B,2\cos^2\dfrac{C}{2}-1\right)$ 与 $\boldsymbol{n}=(2a-b,c)$ 共线.

(1)求角 C 的大小;

(2)若 $c=2\sqrt{3}$,$S_{\triangle ABC}=2\sqrt{3}$,求 a,b 的值.

21. (15 分)如图 D1-3 所示,现有 A,B,C,D 四个海岛,已知 B 在 A 正北方向 15 海里处,C 既在 A 北偏东 60°的方向上,也在 D 北偏东 45°的方向上,D 在 A 正东方向上,且 B,C 相距 21 海里,求 C,D 两岛间的距离.

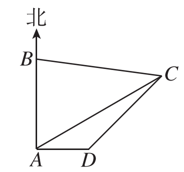


图 D1-3

22. (15 分)设△ABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c,若 $c\cos B=a-\dfrac{1}{2}b$ 且 $c=\sqrt{3}$.

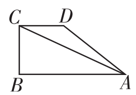
(1)求角 C 的大小;

(2)若角 C 的平分线交 AB 于点 D,求线段 CD 长度的取值范围.

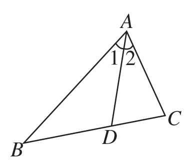
参考答案

单元测评（一）

1. D
2. C ［解析］由余弦定理可得 $b^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos 60°=3$，解得 $b=\sqrt{3}$，故选 C.
3. A ［解析］由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$，即 $\sin B>1$，这是不成立的，$\therefore$ 没有满足题设条件的三角形.
4. C ［解析］$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=8$，$\therefore \sin C=\frac{c}{8}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{16}=\frac{16\sqrt{2}}{16}=\sqrt{2}$.
5. B ［解析］如图所示，设 $CD=a$，则在 $\triangle ACD$ 中，$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos\angle DAC$，$\therefore a^2=(\sqrt{2}a)^2+(\sqrt{5}a)^2-2\times\sqrt{2}a\times\sqrt{5}a\times\cos\angle DAC$，$\therefore \cos\angle DAC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



6. C ［解析］由 $\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$ 得 $b\cos C=c\cos B$，由正弦定理得 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin(B-C)=0$，则 $B=C$. 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\cos B}$ 得 $a\cos B=b\sin A$，由正弦定理得 $\sin A\cos B=\sin A\sin B$，$\because \sin A\neq0$，$\therefore \cos B=\sin B$，又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$，故 $C=\frac{\pi}{4}$，$A=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.
7. D ［解析］$\because S=\frac{1}{2}ab\sin C$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\therefore 2S=ab\sin C$，$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，代入已知等式 $2S=a^2+b^2-c^2$ 可得 $ab\sin C=2ab\cos C$，$\because ab\neq0$，$\therefore \sin C=2\cos C$，$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=2$，故选 D.
8. A ［解析］因为 $b^2+c^2-a^2=bc$，所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，所以 $A=60°$. 又 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$，所以 $a^2+b^2=c^2$，所以 $C=90°$，所以 $B=30°$.
9. D ［解析］由在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，知，
在 A 中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，故 A 正确；
在 B 中，由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore a\sin B=b\sin A$，故 B 正确；
在 C 中，$\because a=b\cos C+c\cos B$，
$\therefore$ 由余弦定理得：$a=b\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，
整理，得 $2a^2=2a^2$，故 C 正确；
在 D 中，由余弦定理得：
$a\cos B+b\cos A=a\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
$=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$
$=c\neq\sin C$，故 D 错误.
10. A ［解析］如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle A$ 的平分线，$AB=2AC$，
令 $AC=a$，$DC=b$，$AD=c$，
则 $AB=2a$，$BD=2b$.
在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中，分别利用余弦定理可得，
$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle1$，
$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\angle2$，
$\therefore 4b^2=4a^2+c^2-4ac\cos\angle1$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle2$，化为 $3c^2-4ac\cos\angle1=0$，
又 $a=tc$，$\therefore t=\frac{3}{4\cos\angle1}$，$\because \angle1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos\angle1\in(0,1)$. $\therefore t\in\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.



11. 30° 90° ［解析］由 $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$ 得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos A$，
$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=30°$，
$\therefore B=150°-C$，
由 $\sin C=2\cos B$ 得：$\sin C=2\cos(150°-C)$，得 $\sin C=2(\cos C\cos 150°+\sin C\sin 150°)$，
即 $\sin C=-\sqrt{3}\cos C+\sin C$，即 $\cos C=0$，$\therefore C=90°$.
12. $-\frac{1}{2}$ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ［解析］已知 $a=3$，$b=5$，$c=7$，$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，$\therefore \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
$\therefore R=\frac{c}{2\sin C}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.
13. $\frac{\pi}{3}$ 2 ［解析］由 $2\cos^2A+\sqrt{3}\sin 2A=2$，可得 $\cos 2A+\sqrt{3}\sin 2A=1$，$\therefore \sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore \frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{6}$，$\therefore 2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$. 又 $\because b=1$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times1\times c\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore c=2$. 由余弦定理可得 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，
$\therefore \frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$.
14. $\sqrt{7}$ $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ ［解析］$\because AB=2$，$AC=3$，$\angle A=60°$，$\therefore$ 由余弦定理可得 $BC=\sqrt{4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$，$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot AD$，$\therefore AD=\frac{3\sqrt{21}}{7}$.
15. $10\sqrt{6}+10\sqrt{2}$ ［解析］$\because \angle ABD=\frac{\pi}{3}$，$\angle ADC=\frac{7\pi}{12}$，$\therefore \angle BAD=\frac{\pi}{4}=\angle CAD$，$\therefore \angle ACD=\frac{\pi}{6}$，$\triangle ACD$ 中，由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin\frac{7}{12}\pi}=\frac{20}{\sin\frac{\pi}{6}}$，$\therefore AC=(10\sqrt{6}+10\sqrt{2})$ 海里.
16. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ［解析］由已知得 $c^2=b^2+a^2-2ba+6$，根据余弦定理，得 $c^2=b^2+a^2-2ba\cos C=b^2+a^2+ba$，于是 $-2ba+6=ba$，解得 $ab=2$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
17. $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ［解析］设 $C=\alpha$，则 $B=\pi-\frac{\pi}{6}-\alpha=\frac{5\pi}{6}-\alpha$，
在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$，
则 $AB=2\sin\alpha$，$AC=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$.
在 $\triangle ABE$ 中，$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=(2\sin\alpha)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times2\sin\alpha\times\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=4\sin^2\alpha-2\sin\alpha\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)+\frac{1}{4}=3\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{4}=\frac{3(1-\cos 2\alpha)}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}=-\frac{3}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{7}{4}=\sqrt{3}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{7}{4}$，当 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时，AE^2 有最大值 $\sqrt{3}+\frac{7}{4}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$，即 AE 的最大值是 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
18. **解**：(1) $\because a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，由正弦定理可知 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，
$\therefore \sin A\sin B=\sqrt{3}\cos A\sin B$.
$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore \sin B\neq0$，$\therefore \sin A=\sqrt{3}\cos A$，
$\because \cos A\neq0$，$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.
(2) $\because b=3$，$c=2$，由(1)得 $A=\frac{\pi}{3}$，
$\therefore$ 由余弦定理可知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9+4-2\times3\times2\times\frac{1}{2}=7$，
$\therefore a=\sqrt{7}$.
19. **解**：(1) $\because 2\cos A\cos B-2\sin A\sin B=1$，$\therefore \cos(A+B)=\frac{1}{2}$，
$\therefore \cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\frac{1}{2}$.
又 $\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=120°$.
(2) 由题知 $a+b=2\sqrt{3}$，$ab=2$，
$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=(2\sqrt{3})^2-2=10$，
$\therefore c=\sqrt{10}$.
从而 $\triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{3}+\sqrt{10}$.
20. **解**：(1) $\because \boldsymbol{m}=(\cos B,\cos C)$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，$\therefore c\cos B=(2a-b)\cos C$，
由正弦定理得 $\sin C\cos B=(2\sin A-\sin B)\cos C$，
$\therefore \sin C\cos B+\sin B\cos C=2\sin A\cos C$，$\therefore \sin A=2\sin A\cos C$.
$\because \sin A>0$，$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$. $\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$.
(2) 由余弦定理得 $(2\sqrt{3})^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$，$\therefore a^2+b^2-ab=12$①.
$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2\sqrt{3}$，$\therefore ab=8$. ②
由①②得 $\begin{cases}a=2,\\b=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\b=2.\end{cases}$
21. **解**：设 A，C 两岛相距 x 海里，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $21^2=15^2+x^2-2\times15x\cos 60°$，化简得 $x^2-15x-216=0$，解得 $x=24$ 或 $x=-9$（不合题意，舍去）.
$\because C$ 在 D 北偏东 45°的方向上，$\therefore \angle ADC=135°$，又易知 $\angle DAC=30°$，$\therefore$ 在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin 30°}=\frac{AC}{\sin 135°}$，$\therefore CD=\frac{24\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=12\sqrt{2}$，$\therefore C$，$D$ 两岛间的距离为 $12\sqrt{2}$ 海里.
22. **解**：(1) 方法 1：因为 $a=b\cos C+c\cos B$，所以 $c\cos B=b\cos C+c\cos B-\frac{1}{2}b$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.
方法 2：由余弦定理得，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以 $c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a-\frac{1}{2}b$，所以 $a^2+c^2-b^2=2a^2-ab$，即 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.
方法 3：由正弦定理得，$\sin C\cos B=\sin A-\frac{1}{2}\sin B$，
所以 $\sin C\cos B=\sin(B+C)-\frac{1}{2}\sin B$，所以 $\sin C\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C-\frac{1}{2}\sin B$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.
(2) 由题意得 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{4}b\cdot|CD|+\frac{1}{4}a\cdot|CD|$，所以 $|CD|=\frac{\sqrt{3}ab}{a+b}$，
根据余弦定理，可得 $a^2+b^2=3+ab$，所以 $a^2+b^2=3+ab\geqslant2ab$，
所以 $0<ab\leqslant3$，由 $a^2+b^2=3+ab$，得 $ab=\frac{(a+b)^2}{3}-1$，且 $a+b\in(\sqrt{3},2\sqrt{3}]$，所以 $|CD|=\frac{\sqrt{3}ab}{a+b}=\sqrt{3}\left(\frac{a+b}{3}-\frac{1}{a+b}\right)\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$.

单元测评（二）

1. C ［解析］观察数列各项知符号可用 $(-1)^n$ 表示；各项绝对值的分母依次为 3，5，7，…，故可表示为 $2n+1$；各项绝对值的分子依次为 1，4，9，…，故可表示为 n^2. $a_n=(-1)^n\frac{n^2}{2n+1}$，故选 C.
2. D 3. B
4. C ［解析］由等比数列的性质，得 $a_1a_8=a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5$，则数列 $\{a_n\}$ 前 8 项的积为 $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8=(a_2a_7)^4=3^4=81$，故选 C.
5. A ［解析］由等比数列的性质，得 $a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=a_5^2$，
又 $a_4a_5a_6=8$，则 $a_5^3=8$，即 $a_5=2$，
$\therefore \log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_9=\log_2(a_1a_2a_3\cdots a_9)=\log_2a_5^9=9$，故选 A.
6. A ［解析］设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由题意可得 $\begin{cases}a_9=a_1+8d=-18+8d\leqslant0,\\a_{10}=a_1+9d=-18+9d>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d\leqslant\frac{9}{4},\\d>2,\end{cases}$ 即公差 d 的取值范围是 $\left(2,\frac{9}{4}\right]$. 故选 A.
7. C ［解析］设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $S_{14}=S_9$，所以 $7(a_1+a_{14})=9a_5$，解得 $a_1=-11d$，所以 $a_n=(n-12)d$，因为 $a_1>0$，所以 $d<0$，当 $a_n=0$ 时，$n=12$，又 $S_{23}=\frac{23}{2}(a_1+a_{23})=23a_{12}=0$，所以满足 $S_n>0$ 的最大自然数 n 的值为 22. 故选 C.
8. C ［解析］若 $a_1>0$，则 $q=1$ 时，$S_{2019}>0$；$q\neq1$ 时，$S_{2019}=\frac{a_1(1-q^{2019})}{1-q}>0$，因此 C 正确，A 不正确. 若 $a_2>0$，则 $q=1$ 时，$S_{2018}>0$；$q\neq1$ 时，$S_{2018}=\frac{\frac{a_2}{q}(1-q^{2018})}{1-q}$ 与 0 的大小关系与 q 的取值有关系，因此 B，D 都有可能，因此不正确. 故选 C.
9. C ［解析］依题意 $a_2=a_1q=2$，$a_5=a_1q^4=\frac{1}{4}$，两式相除可求得 $q=\frac{1}{2}$，则 $a_1=4$. 又因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $\{a_n\cdot a_{n+1}\}$ 是以 a_1a_2 为首项，q^2 为公比的等比数列，所以根据等比数列前 n 项和公式可知原式 $=\frac{a_1a_2(1-q^{2n})}{1-q^2}=\frac{32}{3}(1-4^{-n})$，故选 C.
10. C ［解析］对于 A，若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且首项 $a_1=0$，当 $d>0$ 时，$S_n=\frac{n(n-1)}{2}d$，当 $n\to+\infty$ 时，$|S_n|\to+\infty$，则 $\{a_n\}$ 不是“L 数列”，故 A 错误；对于 B，若 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d=0$，$S_n=na_1$，当 $a_1\neq0$ 时，当 $n\to+\infty$ 时，$|S_n|\to+\infty$，则 $\{a_n\}$ 不是“L 数列”，故 B 错误；对

参考答案

第一章　解三角形

1.1　正弦定理和余弦定理

1.1.1　正弦定理

1. B ［解析］由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$,所以$AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{3\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$.
2. A ［解析］因为$\sin A>\sin B$,所以利用正弦定理,可知$a>b$,再利用大边对大角,可知$A>B$,故选A.
3. C ［解析］$\because a=15,b=10,A=60^\circ$,$\therefore$由正弦定理可得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选C.
4. A ［解析］由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,即$\frac{3}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{\sin B}$,所以$\sin B=\frac{5}{9}$.
5. C ［解析］因为在$\triangle ABC$中,$A:B:C=1:2:3$,且三角形的内角和为180°,所以$A=30^\circ,B=60^\circ,C=90^\circ$,所以$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1=1:\sqrt{3}:2$.
6. C ［解析］$\because a=3,b=6,\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$,$\therefore$由正弦定理可得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{4}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}$,$a<b$,$\therefore A<\frac{\pi}{6}$,$A<B$,$\therefore B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2}{3}\pi$.故选C.
7. C ［解析］由正弦定理,有$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,故$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\sqrt{3}>1$,则此三角形无解.故选C.
8. A ［解析］根据题意$a\cos B=b\cos A$,结合正弦定理可得$\sin A\cos B=\sin B\cos A$,即$\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$,所以$\sin(A-B)=0$,结合三角形内角的取值范围,可得$A=B$,所以$\triangle ABC$是等腰三角形,故选A.
9. 1 ［解析］由正弦定理,得$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{\sin B}$,$\therefore\sin B=\frac{1}{2}$.$\because C$为钝角,$\therefore B$为锐角,$\therefore B=\frac{\pi}{6}$,$\therefore A=\frac{\pi}{6}$,$\therefore a=b=1$.
10. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ［解析］由正弦定理,有$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,即$\triangle ABC$的外接圆的直径为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.
11. $(\sqrt{3},2)$ ［解析］在$\triangle ABC$中,$B=60^\circ,c=2$,若此三角形有两解,则必须满足的条件为$c>b>c\sin B$,即$2>b>\sqrt{3}$,故答案为$(\sqrt{3},2)$.
12. 直角三角形 ［解析］由已知得$\sin^2A-\sin^2B=\sin^2C$,根据正弦定理知$\sin A=\frac{a}{2R}$,$\sin B=\frac{b}{2R}$,$\sin C=\frac{c}{2R}$,所以$\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$,即$a^2-b^2=c^2$,故$b^2+c^2=a^2$,所以$\triangle ABC$是直角三角形.
13. 解:由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,$\therefore\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sin 30^\circ}=\frac{2}{\sin B}$,解得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\because a<b$,$\therefore B=60^\circ$或$120^\circ$.当$B=60^\circ$时,$C=90^\circ$,$\therefore c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$;当$B=120^\circ$时,$C=30^\circ$,$\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
14. 解:由条件及正弦定理得$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{2}{5}$,$\therefore\sin A=\frac{2}{5}\sin C$,

    同理可得$\sin B=\frac{4}{5}\sin C$,

    $\therefore\frac{2\sin A-\sin B}{\sin C}=\frac{2\times\frac{2}{5}\sin C-\frac{4}{5}\sin C}{\sin C}=0$.
15. A ［解析］由$a+b=cx$,得$x=\frac{a+b}{c}$.由题意得,Rt$\triangle ABC$中,$C=90^\circ$,则$A+B=90^\circ$,由正弦定理得$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{\sin A+\sin(90^\circ-A)}{\sin 90^\circ}=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+45^\circ)$,由$A\in(0^\circ,90^\circ)$,得$A+45^\circ\in(45^\circ,135^\circ)$,所以$\sin(A+45^\circ)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,所以$\sqrt{2}\sin(A+45^\circ)\in(1,\sqrt{2}]$,所以$x\in(1,\sqrt{2}]$.故选A.
16. 解:由$1+2\cos(B+C)=0$和$B+C=\pi-A$,得$1-2\cos A=0$,所以$\cos A=\frac{1}{2}$,$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

    由正弦定理,得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.由$b<a$知$B<A$,所以$B=\frac{\pi}{4}$.故$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

    设边BC上的高为h,则$h=b\sin C=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

1.1.2　余弦定理

第1课时　余弦定理

1. A ［解析］由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore A=45^\circ$.
2. D ［解析］由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=1+4-2\times1\times2\times\cos 60^\circ=3$,所以$b=\sqrt{3}$.
3. A ［解析］$\because a^2=b^2+c^2-bc$,$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$,$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,$\because 0^\circ<A<180^\circ$,$\therefore A=60^\circ$,故选A.
4. B ［解析］在$\triangle ABC$中,$\because a=5,b=7,c=8$,$\therefore$由余弦定理可得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{25+64-49}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$,$\because b<c$,故$B$为锐角,可得$B=60^\circ$,$\therefore A+C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.故选B.
5. B ［解析］设中间的内角为θ,则$\cos\theta=\frac{4^2+8^2-(4\sqrt{3})^2}{2\times4\times8}=\frac{1}{2}$,$\theta=60^\circ$,故最大内角与最小内角的和是$180^\circ-60^\circ=120^\circ$.
6. C ［解析］$\because b=3,c=4$,且$\triangle ABC$是锐角三角形,$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>0$,且$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$,$\therefore 7<a^2<25$,$\therefore\sqrt{7}<a<5$,故选C.
7. C ［解析］$\because$在$\triangle ABC$中,角A、B、C的对边分别为a、b、c,$(a^2+c^2-b^2)\tan B=ac$,$\therefore 2ac\cdot\cos B\cdot\tan B=ac$,$\therefore\sin B=\frac{1}{2}$,$\because B\in(0,\pi)$,$\therefore B=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.故选C.
8. A ［解析］设腰长为1,顶角为α的等腰三角形的底边长为m,则由余弦定理得$m^2=1+1-2\times1\times1\times\cos\alpha=2-2\cos\alpha$,则$m=\sqrt{2-2\cos\alpha}$.又四个全等的等腰三角形的面积和为$4\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2-2\cos\alpha}\times1\times\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\alpha$,所以该八边形的面积为$2\sin\alpha+(2-2\cos\alpha)=2\sin\alpha-2\cos\alpha+2$.故选A.
9. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ［解析］在$\triangle ABC$中,$\because A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{6}$,$c=\sqrt{5}$,$\therefore$由余弦定理可得$a^2=6=b^2+5-2\sqrt{5}\cdot b\cos\frac{\pi}{3}$,解得$b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$或$b=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$(舍去).
10. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ ［解析］由$\cos C=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$,则$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.由正弦定理,有$2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$,故$\triangle ABC$的外接圆的半径为$\frac{7\sqrt{3}}{3}$.
11. $\sqrt{2}$ ［解析］由余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,又$\cos A=\frac{3}{4}$且$c=2b$,$\therefore\frac{3}{4}=\frac{b^2+4b^2-a^2}{4b^2}$,可得$\frac{a}{b}=\sqrt{2}$.
12. $\frac{3}{5}$ ［解析］由余弦定理可得$49=AC^2+25-2\times5\times AC\times\cos 120^\circ$,整理得$AC^2+5\cdot AC-24=0$,解得$AC=3$或$AC=-8$(舍去),再由正弦定理可得$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$.
13. 解:(1)由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,得$b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$,又$a+c=6$,$b=2$,$\cos B=\frac{7}{9}$,所以$ac=9$,解得$a=3$,$c=3$.

    (2)在$\triangle ABC$中,$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$,由正弦定理得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,因为$a=c$,所以$A$为锐角,所以$\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{1}{3}$,因此$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{10\sqrt{2}}{27}$.
14. 解:(1)在$\triangle ABD$中,由正弦定理$\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,得$\frac{5}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\angle ADB}$,所以$\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.由题意知$0^\circ<\angle ADB<90^\circ$,所以$\cos\angle ADB=\sqrt{1-\frac{2}{25}}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

    (2)由题意及(1)知$\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

    在$\triangle BCD$中,由余弦定理得$BC^2=BD^2+DC^2-2\cdot BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC=25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=25$,所以$BC=5$.
15. A ［解析］$\because\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\therefore AD\perp AC$,$\therefore\angle DAC=90^\circ$,$\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=\angle BAD+90^\circ$,$\therefore\sin\angle BAC=\sin(\angle BAD+90^\circ)=\cos\angle BAD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.在$\triangle ABD$中,$AB=3\sqrt{2}$,$BD=\sqrt{3}$,根据余弦定理可得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD=18+AD^2-8AD=3$,解得$AD=3$或$AD=5$.当$AD=5$时,$AD>AB$,不成立,故舍去;当$AD=3$时,在$\triangle ABD$中,由正弦定理可得$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,由$\cos\angle BAD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,可得$\sin\angle BAD=\frac{1}{3}$,则$\sin\angle ADB=\frac{AB\sin\angle BAD}{BD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.又$\angle ADB=\angle DAC+\angle C$,$\angle DAC=90^\circ$,$\therefore\cos C=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故选A.
16. 解:(1)由$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{2c-b}{b}$,结合正弦定理得,$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{2\sin C-\sin B}{\sin B}$,$\therefore\sin A\cos B\sin B=2\sin C\cos A\sin B-\sin^2B\cos A$,又$\sin B\neq0$,$\therefore\sin A\cos B=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$,$\therefore\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos A$,即$\sin(A+B)=2\sin C\cos A$,$\therefore\cos A=\frac{1}{2}$,又$0<A<\pi$,$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

    (2)由(1)知$\cos A=\frac{1}{2}$,$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$,即$a^2=b^2+c^2-bc$①.由$\sin(B+C)=6\cos B\sin C$得$\sin A=6\cos B\sin C$,$\therefore\frac{a}{c}=6\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,$\therefore a^2=3a^2+3c^2-3b^2$,$\therefore 2a^2=3b^2-3c^2$②.由①②得$b^2+2bc-5c^2=0$,即$\left(\frac{b}{c}\right)^2+2\cdot\frac{b}{c}-5=0$,可得$\frac{b}{c}=\sqrt{6}-1$.

第2课时　正、余弦定理综合应用

1. B ［解析］由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$得$3=1+c^2-2c\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=1+c^2-c$,$\therefore c^2-c-2=0$,$\therefore c=2$或$-1$(舍).故选B.
2. D ［解析］由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,又因为$a^2+b^2=c^2-\sqrt{2}ab$,所以$\cos C=\frac{-\sqrt{2}ab}{2ab}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,又$C\in(0,\pi)$,所以$C=\frac{3\pi}{4}$,故选D.
3. B ［解析］由题意得$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1}{2}$,$\therefore\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore$边$AC$上的高$h=AB\cdot\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
4. C ［解析］由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$和$3\sin A=5\sin B$,得$3a=5b$,即$b=\frac{3}{5}a$.又$b+c=2a$,$\therefore c=\frac{7}{5}a$,$\therefore$由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$,$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$,故选C.
5. D ［解析］$\because a:b:c=2:\sqrt{3}:\sqrt{13}$,$\therefore$可令$a=2k$,$b=\sqrt{3}k$,$c=\sqrt{13}k(k>0)$,由$b<a<c$,知$C$为$\triangle ABC$中最大的内角.$\because\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4+3-13}{2\times2\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$0<C<\pi$,$\therefore C=\frac{5\pi}{6}$,故选D.
6. D ［解析］$\because\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\therefore\cos C=2\cos^2\frac{C}{2}-1=-\frac{3}{5}$.在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cdot\cos C=25+1-2\times5\times1\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$,$\therefore AB=4\sqrt{2}$.故选D.
7. B ［解析］$\because\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}+\frac{b}{2c}$,$\therefore\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1}{2}+\frac{b}{2c}$,即$\cos A=\frac{b}{c}$,$\therefore\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b}{c}$,则$c^2=a^2+b^2$,故$\triangle ABC$为直角三角形,故选B.
8. A ［解析］在$\triangle ABD$中,由余弦定理$AB^2=AD^2+BD^2-2\cdot AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$,得$14^2=10^2+BD^2-2\times10\times BD\times\frac{1}{2}$,解得$BD=16$(负值舍去).在$\triangle CBD$中,由正弦定理可得$BC=\frac{BD\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{16\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=8\sqrt{2}$.故选A.
9. $\frac{\pi}{3}$　$\sqrt{6}$ ［解析］$\because a^2+b^2-c^2=ab$,$\therefore$可得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$,$\because C\in(0,\pi)$,$\therefore C=\frac{\pi}{3}$,$\because\angle A=\frac{\pi}{4}$,$c=3$,$\therefore$由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,可得$\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,解得$a=\sqrt{6}$.
10. 等腰三角形 ［解析］$\because 2\cos B\sin A=\sin C$,$\therefore 2\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot a=c$,$\therefore a=b$.故$\triangle ABC$一定为等腰三角形.
11. 30° ［解析］根据正弦定理可得$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$,$c=2\sqrt{3}b$,解得$a=\sqrt{7}b$.根据余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+12b^2-7b^2}{2\times b\times2\sqrt{3}b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$A=30^\circ$.

12. ①②③ 【解析】对于①③，由正弦定理、余弦定理，知一定成立. 对于②，由正弦定理及 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，知一定成立. 对于④，利用正弦定理可得 $\sin B=\sin C\sin A+\sin A\sin C=2\sin A\sin C$，又 $\sin B=\sin(A+C)=\cos C\sin A+\cos A\sin C$，两式不一定相等，所以④不一定成立.

13. 解：(1)在△ADC中，∵ $\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$，∴ $\sin\angle ADC=\frac{4\sqrt3}{7}$，∴ $\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-\angle B)=\frac{3\sqrt3}{14}$.

(2) $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC=\frac{4\sqrt3}{7}$，则在△ABD中，由正弦定理得 $BD=\frac{AB\cdot\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=3$，则 BC=BD+DC=5. 在△ABC中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=49$，∴AC=7.

14. 解：(1)由正弦定理得 $b(b+c)=(a-c)(a+c)$，整理得 $a^2=b^2+c^2+bc$，故 $\cos A=-\frac12$. 又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)因为 $A=\frac{2\pi}{3}$，$a=\frac{\sqrt3}{2}$，所以 $2R=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}}=1$，故 $b+c=2R\sin B+2R\sin C=\sin B+\sin C=\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)=\frac{\sqrt3}{2}\cos B+\frac12\sin B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，故 $\frac{\sqrt3}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，故 $\frac{\sqrt3}{2}<b+c\leqslant1$.

15. $\frac35$　6 【解析】若最小边为3，则其余两边为4，5，则△ABC为直角三角形，故最小角的正弦值为 $\frac35$；设三边长分别为 n−1，n，n+1，对应的角为 A，B，C，由题意知 C=2A，由正弦定理得 $\frac{n-1}{\sin A}=\frac{n+1}{2\sin A\cos A}$，即有 $\cos A=\frac{n+1}{2(n-1)}$，又 $\cos A=\frac{n^2+(n+1)^2-(n-1)^2}{2n(n+1)}=\frac{n+4}{2(n+1)}$，所以 $\frac{n+1}{2(n-1)}=\frac{n+4}{2(n+1)}$，解得 n=5，所以三边分别为4，5，6. 故最大边的长为6.

16. 解：(1)由已知，根据正弦定理得 $2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，即 $a^2=b^2+c^2+bc$，又 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，∴ $\cos A=-\frac12$，A=120°.

(2)方法一：由(1)及正弦定理得 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C$，又 A=120°，∴ $\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=\frac34$. ∵ $\sin B+\sin C=1$，∴ $\sin C=1-\sin B$. ∴ $\sin^2B+(1-\sin B)^2+\sin B(1-\sin B)=\frac34$，即 $\sin^2B-\sin B+\frac14=0$，解得 $\sin B=\frac12$. 故 $\sin C=\frac12$，∴B=C=30°. 所以△ABC是等腰的钝角三角形.

方法二：由(1)知 A=120°，∴B+C=60°，则 C=60°−B. ∴ $\sin B+\sin C=\sin B+\sin(60°-B)=\sin B+\frac{\sqrt3}{2}\cos B-\frac12\sin B=\frac12\sin B+\frac{\sqrt3}{2}\cos B=\sin(B+60°)=1$，∴B=30°，C=30°. ∴△ABC是等腰的钝角三角形.

1.2　应用举例

第1课时　应用举例(一)

1. D 【解析】由已知得 BC=AC=4 m，∠ACB=120°，所以由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos120°=48$，所以 $AB=4\sqrt3$ m.

2. A 【解析】∵∠ACB=45°，∠CAB=105°，∴∠ABC=180°−105°−45°=30°. 在△ABC中，由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，得 $AB=\frac{AC\cdot\sin C}{\sin B}=\frac{50\times\frac{\sqrt2}{2}}{\frac12}=50\sqrt2$(m).

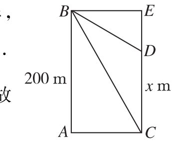
3. A 【解析】因为∠DAC=∠ACB−∠D=60°−30°=30°，所以△ADC为等腰三角形，所以 AC=DC=100(米)，在Rt△ABC中，$AB=AC\sin60°=50\sqrt3$(米).

4. D 【解析】设高 PO=h(m)，则易知 $OA=\sqrt3h$，OB=h. 在△AOB中，由余弦定理得 $40^2=(\sqrt3h)^2+h^2-2\times\sqrt3h\times h\times\cos30°$，解得h=40. 故选D.

5. D 【解析】在△BCD中，∠BDC=60°+30°=90°，∠BCD=45°，∴∠CBD=90°−45°=45°，∴BD=CD=40，$BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=40\sqrt2$. 在△ACD中，∠ADC=30°，∠ACD=60°+45°=105°，∴∠CAD=180°−(30°+105°)=45°，由正弦定理，得 $AC=\frac{CD\sin30°}{\sin45°}=20\sqrt2$. 在△ABC中，由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle BCA=(40\sqrt2)^2+(20\sqrt2)^2-2\times40\sqrt2\times20\sqrt2\cos60°=2400$，∴ $AB=20\sqrt6$. 即A，B两点间的距离为 $20\sqrt6$ 米.

6. B 【解析】根据题意可知 AP=70 m，BP=40 m，则 $AB=\sqrt{4900+1600-2\times70\times40\times\frac12}=10\sqrt{37}$，而 $\frac{10\sqrt{37}}{3}\times3600=12\,000\sqrt{37}$ m/h$=12\sqrt{37}$ km/h，因为 $70<12\sqrt{37}<80$，所以选B.

7. C 【解析】如图所示，山高为AB，塔高为CD，且四边形ABEC为矩形，设塔高为 x m. 由题意得 $\tan30°=\frac{DE}{BE}=\frac{200-x}{BE}$，∴ $BE=\sqrt3(200-x)$. $\tan60°=\frac{200}{BE}=\sqrt3$，∴ $BE=\frac{200}{\sqrt3}$. ∴ $\frac{200}{\sqrt3}=\sqrt3(200-x)$，∴ $x=\frac{400}{3}$(m)，故选C.



8. D 【解析】在△BCD中，∠CBD=180°−15°−30°=135°. 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin30°}=\frac{30}{\sin135°}$，得 $BC=15\sqrt2$(m). 在Rt△ABC中，$AB=BC\tan\angle ACB=15\sqrt2\times\sqrt3=15\sqrt6$(m).

9. $3\sqrt2$ 【解析】根据题意，由正弦定理 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$，得 $\frac{3}{\sin30°}=\frac{AC}{\sin45°}$，解得 $AC=3\sqrt2$(km).

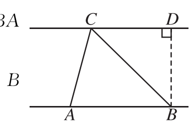
10. $30+30\sqrt3$ 【解析】在△PAB中，∠PAB=30°，∠APB=15°，AB=60，$\sin15°=\sin(45°-30°)=\sin45°\cos30°-\cos45°\sin30°=\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\times\frac12=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$，∴由正弦定理得 $\frac{PB}{\sin30°}=\frac{AB}{\sin15°}$，∴ $PB=\frac{\frac12\times60}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=30\times(\sqrt6+\sqrt2)$. ∴ $PB\cdot\sin45°=30\times(\sqrt6+\sqrt2)\times\frac{\sqrt2}{2}=30+30\sqrt3$，∴树的高度为 $(30+30\sqrt3)$ m.

11. 30 【解析】设两条船所在位置分别为点A，B，炮台底部所在位置为点C，在△ABC中，由题意可知 $AC=\frac{30}{\tan30°}=30\sqrt3$(m)，$BC=\frac{30}{\tan45°}=30$(m)，又∠ACB=30°，∴ $AB^2=(30\sqrt3)^2+30^2-2\times30\sqrt3\times30\times\cos30°=900$，∴AB=30(m).

12. 150 【解析】在△ABC中，易知 $AC=100\sqrt2$ m. 在△MAC中，∠CMA=180°−75°−60°=45°，由正弦定理得 $\frac{MA}{\sin60°}=\frac{AC}{\sin45°}$，得 $MA=100\sqrt3$ m. 在△MNA中，$MN=MA\cdot\sin60°=150$(m)，即山高MN为150 m.

13. 解：设 CD=h m，则 $AD=\frac{h}{\sqrt3}$ m，$BD=\sqrt3h$ m. 在△ADB中，由余弦定理得 $AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cdot\cos120°$，即 $130^2=3h^2+\frac{h^2}{3}-2\times\sqrt3h\times\frac{h}{\sqrt3}\times\left(-\frac12\right)$，解得 $h=10\sqrt{39}$，故塔的高度为 $10\sqrt{39}$ m.

14. 解：∵∠CAB=75°，∠CBA=45°，∴∠ACB=180°−∠CAB−∠CBA=60°.



由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{BC}{\sin\angle CAB}$，∴ $BC=\frac{AB\sin75°}{\sin60°}$. 如图，过点B作BD垂直于对岸，垂足为D，则BD的长就是该河段的宽度. 在Rt△BDC中，∵∠BCD=∠CBA=45°，$\sin\angle BCD=\frac{BD}{BC}$，∴ $BD=BC\sin45°=\frac{AB\sin75°}{\sin60°}\cdot\sin45°=\frac{100\times\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}{\frac{\sqrt3}{2}}\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{50(3+\sqrt3)}{3}$(米).

15. C 【解析】∵ $\tan15°=\tan(60°-45°)=\frac{\tan60°-\tan45°}{1+\tan60°\tan45°}=2-\sqrt3$，∴ $BC=60\tan60°-60\tan15°=120(\sqrt3-1)$(m)，故选C.

16. 解：(1)因为∠CAB=45°，∠DBC=75°，所以∠ACB=75°−45°=30°. 又AB=4，所以由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin45°}=\frac{4}{\sin30°}$，得 $BC=4\sqrt2$，即B，C之间的距离为 $4\sqrt2$ m.

(2)在△CBD中，∠CDB=90°，$BC=4\sqrt2$，所以 $DC=4\sqrt2\sin75°$. 因为 $\sin75°=\sin(45°+30°)=\sin45°\cos30°+\cos45°\sin30°=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$，所以 $DC=2+2\sqrt3$，所以 $CE=ED+DC=1.70+2+2\sqrt3\approx3.70+3.464\approx7.16$. 所以这棵桃树的顶端C离地面的高度约为7.16 m.

第2课时　应用举例(二)

1. D 【解析】由条件及题图可知，∠CAB=∠CBA=40°. 因为∠BCD=60°，所以∠CBD=30°，所以∠DBA=10°，因此灯塔A在灯塔B南偏西80°的方向上.

2. D 【解析】因为 $a\sin B=\sqrt2\sin C$，所以由正弦定理可得 $ab=\sqrt2c$，由 $\cos C=\frac13$ 得 $\sin C=\frac{2\sqrt2}{3}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac12ab\sin C=\frac23c=4$，得c=6，故选D.

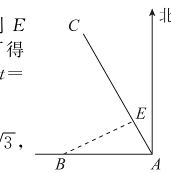
3. A 【解析】设 AD=b，AB=a，∠BAD=α，则 a+b=9，$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=17$，$a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha)=65$，解得 a=5，b=4，$\cos\alpha=\frac35$ 或 a=4，b=5，$\cos\alpha=\frac35$，∴ $S_{\square ABCD}=ab\sin\alpha=16$，故选A.

4. D 【解析】∵在△ABC中，$a\cos B+b\cos A=2c\cos C$，∴ $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$，即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos C$，即 $\sin C=2\sin C\cos C$，∵ $\sin C\neq0$，∴ $\cos C=\frac12$，$C=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理可得 $a^2+b^2-c^2=ab$，即 $(a+b)^2-3ab=c^2=7$. 又 $S_{\triangle ABC}=\frac12ab\sin C=\frac{\sqrt3}{4}ab=\frac{3\sqrt3}{2}$，∴ab=6. ∴ $(a+b)^2=7+3ab=25$，a+b=5，∴△ABC的周长为 $a+b+c=5+\sqrt7$. 故选D.

5. D 【解析】∵B=30°，$AB=\sqrt3$，AC=1，∴由余弦定理可得 $1^2=(\sqrt3)^2+BC^2-2\times\sqrt3\times BC\times\frac{\sqrt3}{2}$，整理得 $BC^2-3BC+2=0$，解得 BC=1 或 2，$S_{\triangle ABC}=\frac12\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{\sqrt3}{2}$ 或 $\frac{\sqrt3}{4}$. 故选D.

6. A 【解析】由 $S_{\triangle ABC}=\frac12bc\sin A$，得 $\frac32=\frac12\times2\times\sqrt3\times\sin A$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt3}{2}$. 因为 0°<A<180°，所以 A=60°或120°，故选A.

7. A 【解析】如图所示，假设B地开始受台风影响时，台风中心移动到E处，则在△AEB中，AB=900，AE=3×30=90，BE=t，则由余弦定理可得 $t^2=900^2+90^2-2\times900\times90\times\cos60°=900^2+90^2-900\times90$，解得 $t=90\sqrt{91}$. 故选A.

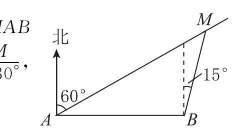


8. C 【解析】由 $A=\frac{2\pi}{3}$，得 $\sin A=\frac{\sqrt3}{2}$，$\cos A=-\frac12$，又 b=1，$S_{\triangle ABC}=\sqrt3$，∴ $\frac12bc\sin A=\frac12\times1\times c\times\frac{\sqrt3}{2}=\sqrt3$，解得 c=4，根据余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=1+16+4=21$，解得 $a=\sqrt{21}$，则根据正弦定理得 $\frac{a+b-2c}{\sin A+\sin B-2\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt3}{2}}=2\sqrt7$. 故选C.

9. $\frac{27\pi}{5}$ 【解析】不妨记该三角形为△ABC，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且 a=6，b=c=12，则由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{12^2+12^2-6^2}{2\times12\times12}=\frac78$，∴ $\sin A=\sqrt{1-\left(\frac78\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$. 由 $\frac12(a+b+c)\cdot r=\frac12bc\sin A$（r为△ABC内切圆的半径），得 $r=\frac{3\sqrt{15}}{5}$，∴ $S_{内切圆}=\pi r^2=\frac{27\pi}{5}$.

10. $\frac{\sqrt3}{4}$ 【解析】∵ $a\cos B=b\cos A$，∴由正弦定理可得 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$，可得 $\sin(A-B)=0$，∵0<A<π，0<B<π，∴−π<A−B<π，∴A−B=0，∴a=b=1，∴ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1+3-1}{2\times1\times\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{2}$，∴ $\sin A=\frac12$，∴ $S_{\triangle ABC}=\frac12bc\sin A=\frac12\times1\times\sqrt3\times\frac12=\frac{\sqrt3}{4}$.

11. $30\sqrt2$ 【解析】如图所示，依题意有 AB=15×4=60(km)，∠MAB=30°，∠AMB=45°，在△AMB中，由正弦定理得 $\frac{60}{\sin45°}=\frac{BM}{\sin30°}$，得 $BM=30\sqrt2$(km).



12. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】由正弦定理可知 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，其中R为△ABC外接圆的半径，∵ $a\cos B+b\cos A=c\sin C$，∴ $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin C\sin C$，即 $\sin(A+B)=\sin^2C$，∵A+B=π−C，∴ $\sin(A+B)=\sin C=\sin^2C$，又 0<C<π，∴ $\sin C\neq0$，∴ sin C=1，∴ $C=\frac{\pi}{2}$，∴ $S=\frac{ab}{2}=\frac14(b^2+c^2-a^2)$. ∵ $b^2+a^2=c^2$，∴ $\frac14(b^2+c^2-a^2)=\frac12b^2=\frac{ab}{2}$，∴a=b，∴△ABC为等腰直角三角形，∴ $B=\frac{\pi}{4}$.

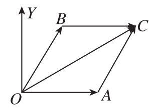
13. 解：设∠ACD=α，∠CDB=β. 在△CBD中，由余弦定理得 $\cos\beta=\frac{20^2+21^2-31^2}{2\times20\times21}=-\frac17$，$\sin\beta=\frac{4\sqrt3}{7}$. ∴ $\sin\alpha=\sin(\beta-60°)=\sin\beta\cos60°-\sin60°\cos\beta=\frac{4\sqrt3}{7}\times\frac12+\frac{\sqrt3}{2}\times\frac17=\frac{5\sqrt3}{14}$. 在△ACD中，由正弦定理得 $\frac{21}{\sin60°}=\frac{AD}{\sin\alpha}$，∴ $AD=\frac{21\sin\alpha}{\sin60°}=15$(千米)，即这人再走15千米才可到达城A.

14. 解：(1)在△ABC中，A，B，C∈(0，π)，由 $\cos A=\frac{5}{13}$，得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$，由 $\cos C=\frac45$ 得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac45\right)^2}=\frac35$，则 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{12}{13}\times\frac45+\frac{5}{13}\times\frac35=\frac{63}{65}$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\frac{2}{\frac{12}{13}}=\frac{b}{\frac{63}{65}}$，从而 $b=\frac{21}{10}$.

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac12ab\sin C=\frac12\times2\times\frac{21}{10}\times\frac35=\frac{63}{50}$.

15. 60°　$20\sqrt3$ 【解析】如图所示，由题意知四边形OACB为菱形，$|\overrightarrow{OA}|=20$，$|\overrightarrow{AC}|=20$，∠OAC=120°，由余弦定理知 $|\overrightarrow{OC}|^2=20^2+20^2-2\times20\times20\times\cos120°=1200$，故 $|\overrightarrow{OC}|=$

$20\sqrt{3}$，$\angle COY=30°+30°=60°$.



16. **解**：(1)由题设得$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a^2}{3\sin A}$，即$\frac{1}{2}c\sin B=\frac{a}{3\sin A}$. 由正弦定理得$\frac{1}{2}\sin C\sin B=\frac{\sin A}{3\sin A}$. 故$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$.

(2)由题设及(1)得$\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\frac{1}{2}$，即$\cos(B+C)=-\frac{1}{2}$，所以$B+C=\frac{2\pi}{3}$，故$A=\frac{\pi}{3}$. 由题设得$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{3\sin A}$，即$\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3^2}{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$，可得$bc=8$. 由余弦定理得$b^2+c^2-bc=9$，整理得$(b+c)^2-3bc=9$，可得$b+c=\sqrt{33}$，故$\triangle ABC$的周长为$3+\sqrt{33}$.

滚动习题(一)

1. C ［解析］在$\triangle ABC$中，$\because A=60°$，$B=45°$，$a=10$，$\therefore$根据正弦定理可得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{10\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10\sqrt{6}}{3}$，故选 C.

2. D ［解析］在$\triangle ABC$中，已知$a=9$，$b=2\sqrt{3}$，$C=150°$，则由余弦定理可得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=81+12-2\times9\times2\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=147$，则$c=7\sqrt{3}$. 故选 D.

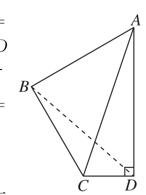
3. A ［解析］由余弦定理得$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2+b^2-7}{2ab}=\frac{1}{2}$，$\therefore a^2+b^2-7=ab$，又$b=3a$，$\therefore 10a^2-7=3a^2$，$\therefore a=1$，$b=3$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，故选 A.

4. D ［解析］选项 A 中，由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\sin B=\frac{16\times\sin 30°}{8}=1$，即$B=90°$，只有一解；选项 B 中，$\sin C=\frac{20\sin 60°}{18}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，且$c>b$，$\therefore C>B$，故有两解；选项 C 中，$\because A=90°$，$a=5$，$c=2$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$，有解. 因此 A，B，C 都不正确，故选 D.

5. B ［解析］$\because b\cos C+c\cos B=a\sin A$，$\therefore$由正弦定理可得$\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin A\sin A$，即$\sin(B+C)=\sin A\sin A$，$\therefore \sin A=1$，$\therefore A=\frac{\pi}{2}$，$\triangle ABC$为直角三角形，故选 B.

6. C ［解析］在$\triangle ABC$中，由$a\cos A=b\cos B$及正弦定理可得$\sin A\cos A=\sin B\cos B$，$\therefore \sin 2A=\sin 2B$，$\because A,B\in(0,\pi)$，$\therefore 2A=2B$或$2A=\pi-2B$，即$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，因此$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形，因此选项 C 的说法错误，故选 C.

7. D ［解析］画出示意图，如图所示. 由题意可得，$\angle BCD=120°$，又$\angle BAD=60°$，$\therefore A,B,C,D$四点共圆，且AC为直径，$\angle ABC=90°$. 连接BD，在$\triangle BAD$中，$AB=4$，$AD=5$，$\angle BAD=60°$，$\therefore$由余弦定理得$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{2}=21$，$\therefore BD=\sqrt{21}$. $\therefore AC=2R=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=2\sqrt{7}$(其中$R$为圆的半径). 故选 D.



8. C ［解析］根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$可得$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=2$，$\therefore c=2a$. 在$\triangle ABC$中，$\because \cos B=\frac{1}{4}$，$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}a^2=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\therefore a^2=1$，$\therefore a=1$，$c=2$. $\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{4}=4$，$\therefore b=2$. 故选 C.

9. $\frac{1}{2}$ ［解析］由正弦定理可得$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

10. $30°$或$150°$ ［解析］由题意可得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，解得$\sin A=\frac{1}{2}$，则$A=30°$或$150°$.

11. $\sqrt{2}$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ［解析］$\because \cos A=\frac{1}{3}$，$\therefore \sin A=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\because b=\frac{2}{3}c$，且$\triangle ABC$的面积是$\sqrt{2}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$，$\therefore \sqrt{2}=\frac{1}{2}c\times\frac{2c}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore c=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{2}$，由余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2+\frac{9}{2}-2\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{2}$，$\therefore a=\frac{3\sqrt{2}}{2}=c$，$\therefore \sin C=\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

12. $30°$ ［解析］$\because D$为BC的中点，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$. 又$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)=\frac{1}{2}(b^2-c^2)$，$\therefore \frac{1}{2}(b^2-c^2)=\frac{a^2-\sqrt{3}ac}{2}$，$\therefore \sqrt{3}ac=a^2+c^2-b^2$. $\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore B=30°$.

13. **解**：(1)由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得$b\sin A=a\sin B$，又由$b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，得$a\sin B=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，即$\sin B=\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$，化简可得$\tan B=\sqrt{3}$，又因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$c^2-4c+3=0$，所以$c=1$或$c=3$. 当$c=1$时，$\cos A=\frac{1^2+(\sqrt{13})^2-4^2}{2\sqrt{13}}<0$，则$A$为钝角，不符合题意，故$c=3$. 又$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=3\sqrt{3}$，所以$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD}{AC}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$，所以$AD=\frac{2}{3}b=\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

14. **解**：(1)$\because c=2$，$a^2+b^2-ab=4$，$\therefore a^2+b^2-c^2=ab$，$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，又$0°<C<180°$，$\therefore C=60°$. $\because \triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$，$\therefore ab=4$，由$\begin{cases}a^2+b^2-ab=4,\\ab=4,\end{cases}$解得$a=b=2$.

(2)由$\sin C+\sin(A-B)=2\sin 2B$，得$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin 2B$，得$2\sin A\cos B=4\sin B\cos B$，$\therefore \cos B=0$或$\sin A=2\sin B$.

①当$\cos B=0$时，$B=90°$，由(1)知，$C=60°$，又$c=2$，$\therefore a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

②当$\sin A=2\sin B$时，$a=2b$，代入$a^2+b^2-ab=4$，得$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 综上可得$\triangle ABC$的面积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15. **解**：(1)由题意知$AO=20$，$AB=30t$，设相遇时小艇航行的距离为S，则$S=\sqrt{900t^2+400-2\times30t\times20\times\cos(90°-30°)}=\sqrt{900t^2-600t+400}=\sqrt{900\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+300}$.

故当$t=\frac{1}{3}$时，$S_{\min}=10\sqrt{3}$，$v=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=30\sqrt{3}$，即小艇以$30\sqrt{3}$海里/时的速度匀速行驶，相遇时小艇的航行距离最小.

(2)由余弦定理得$v^2t^2=400+900t^2-2\times20\times30t\times\cos(90°-30°)$，故$v^2=900-\frac{600}{t}+\frac{400}{t^2}$. $\because 0<v\leqslant30$，$\therefore 900-\frac{600}{t}+\frac{400}{t^2}\leqslant900$，即$\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t}\leqslant0$，解得$t\geqslant\frac{2}{3}$. 又$t=\frac{2}{3}$时，$v=30$，故$v=30$时，$t$取得最小值，且最小值为$\frac{2}{3}$，此时，在$\triangle OAB$中，有$OA=OB=AB=20$. 故可设计航行方案如下：航行方向为北偏东$30°$，航行速度为 30 海里/时.

第二章 数列

2.1 数列的概念与简单表示法

1. B ［解析］因为数列 1，3，5，7，9，…的通项公式为$a_n=2n-1$，由题中数列的奇数项为负，得所求数列的通项公式为$a_n=(-1)^n(2n-1)$. 故选 B.

2. A ［解析］①②③逐一写出均为 0，1，0，1，0，1，…，满足题意，④逐一写出为 1，0，1，0，1，0，1，…，不满足题意，故选 A.

3. C ［解析］由题意，令$a_n=-8$，解得$n=7$或$n=-6$(舍去). 故选 C.

4. B ［解析］数列可变为$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{11}$，…，故数列的一个通项公式为$a_n=\sqrt{3n-1}$. 令$2\sqrt{5}=\sqrt{3n-1}$，得$n=7$，故选 B.

5. C ［解析］由题知$a_1=-\frac{1}{4}$，$a_2=5$，$a_3=\frac{4}{5}$，$a_4=-\frac{1}{4}$，故数列$\{a_n\}$是以 3 为周期的数列，则$a_{2019}=a_3=\frac{4}{5}$.

6. C ［解析］由已知得$a_2=a_1+a_1=2a_1=-6$，$\therefore a_1=-3$，$\therefore a_{10}=2a_5=2(a_2+a_3)=2a_2+2(a_1+a_2)=4a_2+2a_1=4\times(-6)+2\times(-3)=-30$.

7. A ［解析］由题得$a_{n+1}=2a_n-1$，则$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$，$\because a_1-1=0$，$\therefore a_{1000}-1=0$，即$a_{1000}=1$，故选 A.

8. B ［解析］数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n-\sqrt{254}}{n-\sqrt{255}}=1+\frac{\sqrt{255}-\sqrt{254}}{n-\sqrt{255}}$，据此可得$1>a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{15}$，且$a_{16}>a_{17}>a_{18}>a_{19}>\cdots>1$，据此可得当$a_n$取得最小值时，$n$的值为 15. 故选 B.

9. 144 ［解析］由数列所给的前几项知，从第三项起，每一项是前面两项的和，所以第 12 项为 144.

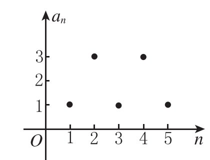
10. $3-4^n$ $\frac{1}{5}$ ［解析］根据通项公式我们可以求出这个数列的任意一项. 因为$a_n=3-2^n$，所以$a_{2n}=3-2^{2n}=3-4^n$，$\frac{a_2}{a_3}=\frac{3-2^2}{3-2^3}=\frac{1}{5}$.

11. 97 ［解析］由题意可得该数阵中第 10 行的第 3 个数在数列$\{a_n\}$中的项数为$1+2+3+\cdots+9+3=48$，而$a_{48}=(-1)^{48}\times96+1=97$，故该数阵中第 10 行的第 3 个数为 97.

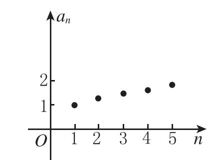
12. $\lambda>-3$ ［解析］$\because$数列$\{a_n\}$是递增数列，$\therefore a_{n+1}-a_n=(n+1)^2+\lambda(n+1)-n^2-\lambda n=2n+1+\lambda>0$对任意的正整数$n$恒成立，即$\lambda>-2n-1$对任意的正整数$n$恒成立，$\therefore \lambda>-3$.

13. **解**：由$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+1$，得$a_2=2\times3+1=7$，$a_3=2\times7+1=15$，$a_4=2\times15+1=31$，$a_5=2\times31+1=63$，$a_6=2\times63+1=127$.
由$a_1=3$，$a_2=7$，$a_3=15$，$a_4=31$，$a_5=63$，$a_6=127$，
可以看出，$a_1+1=2^2$，$a_2+1=2^3$，$a_3+1=2^4$，$a_4+1=2^5$，$a_5+1=2^6$，$a_6+1=2^7$，故可以猜想$a_n+1=2^{n+1}$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n+1}-1$.

14. **解**：(1)$\because a_n=(-1)^n+2$，$\therefore a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=1$，$a_4=3$，$a_5=1$.
$\therefore$数列的前 5 项是 1，3，1，3，1.
图像如图①所示.



①



②

(2)数列$\{a_n\}$的前 5 项依次是 1，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{8}{5}$，$\frac{5}{3}$. 图像如图②所示.

15. D ［解析］易得规律$\begin{array}{ccc}4n+1 & & 4n+4\\ \downarrow & & \uparrow\\ 4n+2 & \rightarrow & 4n+3\end{array}$，所以$\begin{array}{ccc}2001 & & 2004\\ \downarrow & & \uparrow\\ 2002 & \rightarrow & 2003\end{array}$，故选 D.

16. **解**：设$f(n)=\frac{9n^2-9n+2}{9n^2-1}=\frac{(3n-1)(3n-2)}{(3n-1)(3n+1)}=\frac{3n-2}{3n+1}$.

(1)令$n=10$，得第 10 项$a_{10}=f(10)=\frac{28}{31}$.

(2)令$\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{98}{101}$，得$9n=300$. 此方程无正整数解，所以$\frac{98}{101}$不是该数列中的项.

(3)证明：因为$a_n=\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{3n+1-3}{3n+1}=1-\frac{3}{3n+1}$，又$n\in\mathbf{N}^*$，所以$0<\frac{3}{3n+1}<1$，所以$0<a_n<1$. 即数列中的各项都在区间(0，1)内.

2.2 等差数列

第 1 课时 等差数列的概念与通项公式

1. A ［解析］$\because a_{n+1}-a_n=2$，$a_1=1$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是等差数列，首项为 1，公差为 2，则$a_{50}=1+2\times(50-1)=99$，故选 A.

2. D ［解析］因为数列$\{a_n\}$是等差数列，所以$\begin{cases}a_1+2d=9,\\a_1+8d=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=-1,\\a_1=11,\end{cases}$故选 D.

3. D ［解析］在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_3=4$，则公差$d=a_3-a_2=2$，$a_{10}=a_2+8d=18$，故选 D.

4. C ［解析］由等差中项的定义知$x=\frac{a+b}{2}$，$x^2=\frac{a^2-b^2}{2}$，$\therefore \frac{a^2-b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，即$a^2-2ab-3b^2=0$，故$a=-b$或$a=3b$.

5. A ［解析］由$a_n=90-2n>0$，解得$n<45$，即该数列的前 44 项为正数，故选 A.

6. B ［解析］依题意得$2\lg(2^x-1)=\lg 2+\lg(2^x+3)$，即$(2^x-1)^2=2(2^x+3)$，即$(2^x)^2-4\cdot2^x-5=0$，即$(2^x-5)(2^x+1)=0$，解得$2^x=5$或$2^x=-1$(舍去)，所以$x=\log_2 5$. 故选 B.

7. C ［解析］由数列$\left\{\frac{1}{2a_n}\right\}$为等差数列，得公差$d=\frac{\frac{1}{2a_7}-\frac{1}{2a_3}}{7-3}=\frac{1}{16}$，所以$\frac{1}{2a_{11}}=\frac{1}{2a_7}+\frac{1}{16}\times(11-7)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，所以$a_{11}=\frac{2}{3}$，故选 C.

8. C ［解析］根据题意设每天派出的人数组成数列$\{a_n\}$，分析可得数列$\{a_n\}$是首项$a_1=64$，公差为 7 的等差数列，则第三天派出的人数$a_3=64+2\times7=78$，又每人每天分发大米 3 升，所以第 3 天共分发大米$78\times3=234$(升)，故选 C.

9. 3 ［解析］设这四个数组成等差数列$\{a_n\}$，其中$a_1=-1$，$a_4=8$，则公差$d=\frac{8-(-1)}{4-1}=3$.

10. 5 ［解析］由题知$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$，$b_n=-2+(n-1)\times4=4n-6$. 令$a_n=b_n$，得$3n-1=4n-6$，解得$n=5$.

11. $\frac{8}{3}<d\leqslant3$ ［解析］由题意得$\begin{cases}a_9\leqslant0,\\a_{10}>0,\end{cases}$即$\begin{cases}-24+8d\leqslant0,\\-24+9d>0,\end{cases}$解得$\frac{8}{3}<d\leqslant3$.

12. 2 0 ［解析］由题意可得$a_1=f(1)=a$，$a_2=f(2)=a^2$，$a_3=f(3)=3a+b$，$a_4=f(4)=4a+b$. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}a^2-a=d,\\3a+b-a^2=d,\\4a+b-3a-b=d,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=0,\\d=2.\end{cases}$

13. **解**：因为每升高 100 m 温度降低 0.7 ℃，所以从山脚开始，每升高 100 m 温度的值构成一个等差数列.
由题意知，山脚处的温度为首项$a_1=26$，山顶处的温度为末项$a_n=14.8$，所以$26+(n-1)\times(-0.7)=14.8$，解得$n=17$. 故此山的山顶处相对于山脚处的高度为$(17-1)\times100=1600$

(m).

14. **解**:(1)证明:$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{4-\frac{4}{a_n}-2}=\frac{a_n}{2a_n-4}$,$b_{n+1}-b_n=\frac{a_n}{2a_n-4}-\frac{1}{a_n-2}=\frac{1}{2}$,∴数列$\{b_n\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列.

(2)由题知 $b_1=\frac{1}{a_1-2}=\frac{1}{2}$,$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$,

∴$\frac{n}{2}=\frac{1}{a_n-2}$,∴$a_n=\frac{2(n+1)}{n}$.

15. $\sqrt{4n-3}$ [解析]由 $a_{n+1}^2-a_n^2=4$,知数列$\{a_n^2\}$成等差数列,又$a_1^2=1$,∴$a_n^2=1+(n-1)\times4=4n-3$. 又 $a_n>0$,∴$a_n=\sqrt{4n-3}$.

16. **解**:(1)证明:∵$x_n=f(x_{n-1})=\frac{3x_{n-1}}{x_{n-1}+3}$($n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$),∴$\frac{1}{x_n}=\frac{x_{n-1}+3}{3x_{n-1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{x_{n-1}}$,∴$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{3}$($n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$),∴$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是等差数列.

(2)由(1)知$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+(n-1)\times\frac{1}{3}=2+\frac{n-1}{3}=\frac{n+5}{3}$,∴$\frac{1}{x_{2015}}=\frac{2015+5}{3}=\frac{2020}{3}$,∴$x_{2015}=\frac{3}{2020}$.

第 2 课时　等差数列的性质与应用

1. C [解析]因为数列$\{a_n\}$为等差数列,所以 $a_9=a_3+6d$,即 $18=6+6d$,所以 $d=2$.
2. B [解析]由题意和等差数列的性质可得 $a_4+a_{12}=a_7+a_9=16$,故选 B.
3. D [解析]由等差数列的性质可得 $2a_5=a_3+a_7$,所以 $a_7=2a_5-a_3=19$. 故选 D.
4. A [解析]设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $a_1+a_4+a_7=45$,$a_2+a_5+a_8=29$,得$(a_2+a_5+a_8)-(a_1+a_4+a_7)=29-45=-16=3d$,又$(a_3+a_6+a_9)-(a_2+a_5+a_8)=3d=-16$,所以 $a_3+a_6+a_9=(a_2+a_5+a_8)+(-16)=29-16=13$,故选 A.
5. C [解析]由等差数列的性质,可知 $a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=5a_8=120$,则 $a_8=a_1+7d=24$,又因为 $a_9-\frac{1}{3}a_{11}=a_1+8d-\frac{1}{3}(a_1+10d)=\frac{2}{3}a_1+\frac{14}{3}d=\frac{2}{3}(a_1+7d)=16$,故选 C.
6. A [解析]因为 $a_4+a_6=a_2+a_8=2a_5$,所以由已知条件可得$3a_5=9$,即 $a_5=3$,则方程可变为$x^2+6x+10=0$,因为 $\Delta=6^2-4\times1\times10=-4<0$,所以该方程无实根,故选 A.
7. A [解析]∵$\{a_n\}$为等差数列,$a_1=0$,$a_m=a_1+a_2+\cdots+a_9$,∴$0+(m-1)d=9a_5=36d$,又公差 $d\neq0$,∴$m=37$,故选 A.
8. D [解析]$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=a_1+2d+a_4+2d+a_7+2d+\cdots+a_{97}+2d=a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}+33\times2d=50+66d=-82$. 故选 D.
9. 33 [解析]根据等差数列的性质,得 $a_1+a_3+a_5=3a_3=27$,所以 $a_3=9$,又 $d=2$,所以 $a_4=a_3+d=11$. 所以 $a_2+a_4+a_6=3a_4=3\times11=33$.
10. $a_n=23-2n$ [解析]设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,∵$a_1+a_5+a_9=39$,$a_3+a_7+a_{11}=27$,∴$(a_3+a_7+a_{11})-(a_1+a_5+a_9)=6d=-12$,∴$d=-2$,∴$a_1+a_5+a_9=3a_1+12d=39$,解得 $a_1=21$. ∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=21+(n-1)\times(-2)=23-2n$.
11. 1 或 2 [解析]∵a,b,c 成等差数列,∴$2b=a+c$,∴$\Delta=4b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geqslant0$. ∴二次函数 $y=ax^2-2bx+c$ 的图像与 x 轴的交点个数为 1 或 2.
12. 6 [解析]∵$a_5+a_7=2a_6=4$,$a_6+a_8=2a_7=-2$,∴$a_6=2$,$a_7=-1$,∴$d=a_7-a_6=-3$,∴$a_n=a_6+(n-6)d=2+(n-6)\times(-3)=-3n+20$. 令 $a_n\geqslant0$,解得 $n\leqslant\frac{20}{3}$,即 $n=1,2,3,\cdots,6$,故该数列的正数项共有 6 项.
13. **解**:设这五个数依次为 $a-2d$,$a-d$,a,$a+d$,$a+2d$,则由题意可得 $\begin{cases}(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=25,\\(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=165,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=5,\\d=\pm2,\end{cases}$所以这五个数为 1,3,5,7,9 或 9,7,5,3,1.
14. **解**:(1)证明:由$\frac{1}{2a_{n+1}}=\frac{1}{2a_n}+1$,可得$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$,

∴数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项,2 为公差的等差数列.

(2)由(1)知$\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$,∴$a_n=\frac{1}{2n-1}$.
15. $15\sqrt{3}$ [解析]设△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,不妨设 $A=120°$,$c<b$,则 $a=b+4$,$c=b-4$,于是 $\cos120°=\frac{b^2+(b-4)^2-(b+4)^2}{2b(b-4)}=-\frac{1}{2}$,得 $b=10$,所以 $c=6$,所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin120°=15\sqrt{3}$.
16. **解**:在数列$\{a_n\}$中,$a_1=5$,公差 $d_1=8-5=3$,∴$a_n=a_1+(n-1)d_1=3n+2$. 在数列$\{b_n\}$中,$b_1=3$,公差 $d_2=7-3=4$,∴$b_n=b_1+(n-1)d_2=4n-1$. 令 $a_r=b_m$($r,m\in\mathbf{N}^*$),则 $3r+2=4m-1$,即 $r=\frac{4m}{3}-1$. ∵$m,r\in\mathbf{N}^*$,令 $m=3k$($k\in\mathbf{N}^*$),得 $r=4k-1$.

由已知得$\begin{cases}1\leqslant3k\leqslant100,\\1\leqslant4k-1\leqslant100,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{101}{4}$.

又 $k\in\mathbf{N}^*$,∴$k=1,2,3,\cdots,25$,∴两个数列共有 25 个相同的项.

2.3　等差数列的前 n 项和

第 1 课时　等差数列的前 n 项和公式

1. C [解析]因为 $2a_{n+1}=1+2a_n$,所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$,所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列,所以 $S_{10}=10\times1+\frac{10\times9}{2}\times\frac{1}{2}=10+\frac{45}{2}=\frac{65}{2}$.
2. B [解析]在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4+a_8=16$,则 $a_1+a_{11}=a_4+a_8=16$,所以该数列的前 11 项和 $S_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=\frac{11}{2}\times16=88$,故选 B.
3. A [解析]$\frac{S_{11}}{S_9}=\frac{\frac{11(a_1+a_{11})}{2}}{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}=\frac{11a_6}{9a_5}=\frac{11}{9}\times\frac{9}{11}=1$.
4. C [解析]设每天多织布 d 尺,由题意得 $30\times5+\frac{30\times29}{2}d=390$,解得 $d=\frac{16}{29}$,则每天多织布$\frac{16}{29}$尺,故选 C.
5. B [解析]设 $a_1+a_3+\cdots+a_{99}=S$,则 $a_2+a_4+\cdots+a_{100}=S+50d$. 依题意,有 $S+S+50d=145$. 又 $d=\frac{1}{2}$,可得 $S=60$. ∴$a_2+a_4+\cdots+a_{100}=60+25=85$,故选 B.
6. A [解析]设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d($d\neq0$),∵$a_{10}=S_4$,∴$a_1+9d=4a_1+\frac{4\times3}{2}d$,解得 $a_1=d$,故$\frac{S_8}{a_9}=\frac{8a_1+\frac{8\times7}{2}d}{a_1+8d}=\frac{36d}{9d}=4$,故选 A.
7. C [解析]由题知 $a_m=S_m-S_{m-1}=2$,$a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=3$,所以公差 $d=a_{m+1}-a_m=1$. 由 $S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=0$,得 $a_1=-2$,所以 $a_m=-2+(m-1)\times1=2$,解得 $m=5$. 故选 C.
8. C [解析]∵点 $P(a_n,a_{n+1})$($n\in\mathbf{N}^*$)在直线 $x-y+1=0$ 上,∴$a_{n+1}-a_n=1$,∴数列$\{a_n\}$为等差数列,其中首项 $a_1=1$,公差为 1,∴$a_n=n$,∴数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$,∴$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,∴$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$. 故选 C.
9. 21 [解析]由等差数列$\{a_n\}$的性质,得 $a_1+a_7=2a_4$,则 $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=21$.
10. 6 [解析]当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=4$;当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=6n-2$. 又 $a_1=4$ 满足上式,∴$a_n=6n-2$. 又∵$\{a_n\}$为等差数列,∴$4+(n-1)d=6n-2$,∴$d=6$.
11. $\frac{5}{3}$　$\frac{55}{6}$ [解析]设每人所得成等差数列$\{a_n\}$,不妨设 $d>0$. 则 $a_1+a_2=\frac{1}{7}(a_3+a_4+a_5)$,$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=100$,∴$2a_1+d=\frac{1}{7}(3a_1+9d)$,$5a_1+\frac{5\times4}{2}d=100$,联立解得 $a_1=\frac{5}{3}$,$d=\frac{55}{6}$.
12. -1 [解析]∵$a_n=4n-\frac{5}{2}$,∴$a_1=\frac{3}{2}$. 又$\{a_n\}$为等差数列,∴公差 $d=4$,∴$an^2+bn=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{3}{2}n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2-\frac{1}{2}n$,∴$a=2$,$b=-\frac{1}{2}$,∴$ab=-1$.
13. **解**:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,则$\begin{cases}a_1+9d=30,\\a_1+19d=50,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=12,\\d=2.\end{cases}$

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=10+2n$.

(2)由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,$S_n=242$,可得 $12n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=242$,解得 $n=11$ 或 $n=-22$(舍去),∴$n=11$.
14. **解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则$\begin{cases}a_1=3,\\a_1+4d+a_1+5d=24,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\d=2,\end{cases}$所以 $a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$.

(2)由(1)知 $S_n=\frac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2)$,则 $b_n=\frac{S_n}{n}=n+2$,则 $b_{n+1}-b_n=1$,所以数列$\{b_n\}$是以 3 为首项,1 为公差的等差数列,则 $T_n=\frac{n\times(3+n+2)}{2}=\frac{n^2+5n}{2}$.
15. 1000 [解析]数列$\{a_n+b_n\}$的前 100 项的和为$\frac{100(a_1+a_{100})}{2}+\frac{100(b_1+b_{100})}{2}=50(a_1+a_{100}+b_1+b_{100})=50\times20=1000$.
16. **解**:(1)设该等差数列为$\{a_n\}$,则 $a_1=a$,$a_2=4$,$a_3=3a$,由已知有$a+3a=8$,则 $a_1=a=2$,公差 $d=4-2=2$,所以 $S_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}\cdot d=2k+\frac{k(k-1)}{2}\times2=k^2+k$. 由 $S_k=110$,得 $k^2+k-110=0$,解得 $k=10$ 或 $k=-11$(舍去),故 $a=2$,$k=10$.

(2)由(1)得 $S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$,则 $b_n=\frac{S_n}{n}=n+1$,故$b_{n+1}-b_n=(n+2)-(n+1)=1$,即数列$\{b_n\}$是首项为 2,公差为 1 的等差数列,所以 $T_n=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}$.

第 2 课时　等差数列的前 n 项和的性质及应用

1. B [解析]由等差数列前 n 项和的性质可知 S_n,$S_{2n}-S_n$,$S_{3n}-S_{2n}$,…成等差数列,所以 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 成等差数列,即$2(S_6-S_3)=(S_9-S_6)+S_3$,所以 $2(S_6-9)=(81-S_6)+9$,得$S_6=36$,所以 $S_9-S_6=a_7+a_8+a_9=45$.
2. A [解析]因为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 有最大值,且$\frac{a_{11}}{a_{10}}<-1$,所以 $a_{10}>0$,$a_{11}<0$,$d<0$,可得 $a_{10}+a_{11}<0$,所以 $S_{19}=\frac{19(a_1+a_{19})}{2}=19a_{10}>0$,$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_{10}+a_{11})<0$,则使 $S_n>0$ 成立的最大自然数 n 的值为 19.
3. C [解析]方法一:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,∵$S_3=S_{10}$,∴$3a_1+\frac{3\times(3-1)}{2}d=10a_1+\frac{10\times(10-1)}{2}d$,即 $a_1+6d=0$,即$a_7=0$,∵$a_1>0$,∴当 S_n 取最大值时,n 的值为 6 或 7,故选 C.

方法二:∵$S_3=S_{10}$,∴ $a_4+a_5+\cdots+a_{10}=0$,∵ $a_4+a_{10}=a_5+a_9=a_6+a_8=2a_7$,∴ $a_7=0$,又∵$a_1>0$,∴$a_6>0$,∴当 S_n 取最大值时,n 的值为 6 或 7,故选 C.
4. C [解析]∵S_{10},$S_{20}-S_{10}$,$S_{30}-S_{20}$成等差数列,∴$2(S_{20}-S_{10})=S_{10}+S_{30}-S_{20}$,∴$140=30+S_{30}-100$,∴$S_{30}=210$.
5. B [解析]$\frac{a_5}{b_5}=\frac{S_{2\times5-1}}{T_{2\times5-1}}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$,故选 B.
6. B [解析]∵$S_6>S_7$,∴$a_7<0$,∵$S_7>S_5$,∴$a_6+a_7>0$,∴$a_6>0$,∴$d<0$,故①中结论正确. 又 $S_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=11a_6>0$,故②中结论正确. $S_{12}=\frac{12}{2}(a_1+a_{12})=6(a_6+a_7)>0$,故③中结论不正确. $\{S_n\}$中的最大项为 S_6,故④中结论不正确. 故选 B.
7. A [解析]在等差数列中 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6,$S_{12}-S_9$ 构成新的等差数列,不妨设 $S_3=1$,则 $S_6=3$,∴$S_6-S_3=2$,$S_9-S_6=3$,$S_{12}-S_9=4$,则 $S_9=6$,$S_{12}=10$,∴$\frac{S_6}{S_{12}}=\frac{3}{10}$.
8. B [解析]设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则由已知 $a_1+a_3+a_5=105$,$a_2+a_4+a_6=99$,得$\begin{cases}3a_1+6d=105,\\3a_1+9d=99,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=39,\\d=-2,\end{cases}$则 $a_n=41-2n$. 令 $a_n=41-2n\geqslant0$,得 $n\leqslant\frac{41}{2}$,又 $n\in\mathbf{N}^*$,∴当 $1\leqslant n\leqslant20$ 时,$a_n>0$,当 $n\geqslant21$ 时,$a_n<0$,故当 $n=20$ 时,S_n 达到最大值. 故选 B.
9. 45 [解析]方法一:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,∵ $S_3=9$,$S_6=36$,∴$\begin{cases}S_3=3a_1+\frac{3\times(3-1)}{2}d=9,\\S_6=6a_1+\frac{6\times(6-1)}{2}d=36,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$∴$a_7+a_8+a_9=a_1+6d+a_1+7d+a_1+8d=3a_1+21d=3\times1+21\times2=45$.

方法二:∵$\{a_n\}$为等差数列,所以 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 构成新的等差数列,新数列的首项为 9,公差为$(36-9)-9=18$,∴ $a_7+a_8+a_9=9+18\times2=45$.
10. 5　-9 [解析]由 $a_2+a_8=6$,$S_5=-5$ 可得$\begin{cases}2a_1+8d=6,\\5a_1+\frac{5\times4}{2}d=-5,\end{cases}$解得 $a_1=-5$,$d=2$,则 $a_6=a_1+5d=-5+10=5$,$S_n=-5n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-6n=(n-3)^2-9$,故当 $n=3$ 时,S_n 的最小值为-9.
11. 10 [解析]在等差数列$\{a_n\}$中,所有奇数项的和 $S_{奇}=\frac{(n+1)(a_1+a_{2n+1})}{2}=165$,所有偶数项的和 $S_{偶}=\frac{n(a_2+a_{2n})}{2}=150$. ∵$a_1+a_{2n+1}=a_2+a_{2n}$,∴$\frac{n+1}{n}=\frac{165}{150}=\frac{11}{10}$,∴$n=10$.
12. 6 或 7 [解析]由$|a_5|=|a_9|$且 $d>0$ 得 $a_5<0$,$a_9>0$,且 $a_5+a_9=0$,即 $2a_1+12d=0$,即 $a_1+6d=0$,即 $a_7=0$,故使得 S_n 取得最小值的正整数 n 的值为 6 或 7.
13. **解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d,由已知条件得$\begin{cases}a_1+2d=-10,\\4a_1+6d=-44,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-14,\\d=2,\end{cases}$∴$a_n=2n-16$.

(2)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-14n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n^2-15n=\left(n-\frac{15}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{2}\right)^2$,∴当 $n=7$ 或 $n=8$ 时,S_n 取得最小值-56.
14. **解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,∵$a_{16}+a_{17}+a_{18}=3a_{17}=-36$,∴$a_{17}=-12$,∴$d=\frac{a_{17}-a_9}{17-9}=\frac{24}{8}=3$,∴$a_9=a_1+8\times3=-36$,解得 $a_1=-60$,∴$S_n=-60n+\frac{n(n-1)}{2}\times3=\frac{3}{2}(n^2-41n)=\frac{3}{2}\left(n-\frac{41}{2}\right)^2-\frac{5043}{8}$,∴当 $n=20$ 或 $n=21$ 时,S_n 取得最小值-630.

(2)令 $S_n=\frac{3}{2}(n^2-41n)<0$,得 $n<41$,∴$S_n<0$ 时 n 的最大值为 40.

(3)∵$a_1=-60$,$d=3$,∴$a_n=-60+(n-1)\times3=3n-63$,由 $a_n=3n-63\geqslant0$,得 $n\geqslant21$. ∵$a_{20}=3\times20-63=-3<0$,$a_{21}=3\times21-63=0$,∴数列$\{a_n\}$中,前 20 项都小于 0,第 21 项等于 0,第 22 项及以后各项都大于 0. 故当 $n\leqslant21$ 时,$T_n=-S_n=-\frac{n(-60+3n-63)}{2}=-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n$;当 $n>21$ 时,$T_n=S_n-2S_{21}=\frac{n(-60+3n-63)}{2}-2S_{21}=\frac{3}{2}n^2-\frac{123}{2}n+1260$.

综上,$T_n=\begin{cases}-\frac{3}{2}n^2+\frac{123}{2}n(n\leqslant12,n\in\mathbf{N}^*),\\\frac{3}{2}n^2-\frac{123}{2}n+1260(n>21,n\in\mathbf{N}^*).\end{cases}$