

## 单元测评(一)

# 第一章

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷60分,第Ⅱ卷90分,共150分,考试时间120分钟.

## 第 I 卷 (选择题 共 60 分)

**一、选择题**(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若  $p \wedge q$  是假命题, 则 ( )  
A.  $p$  是真命题,  $q$  是假命题  
B.  $p, q$  均为假命题  
C.  $p, q$  中至少有一个是假命题  
D.  $p, q$  中至少有一个是真命题
2. 已知  $p: \forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) \leq n$ , 则  $\neg p$  为 ( )  
A.  $\forall n \in \mathbf{N}^*, f(n) > n$  B.  $\forall n \notin \mathbf{N}^*, f(n) > n$   
C.  $\exists n \in \mathbf{N}^*, f(n) > n$  D.  $\exists n \notin \mathbf{N}^*, f(n) > n$
3. 命题“若  $a^2 + b^2 = 0$ , 则  $a = 0$  且  $b = 0$ ”的逆否命题是 ( )  
A. 若  $a^2 + b^2 = 0$ , 则  $a = 0$  且  $b \neq 0$   
B. 若  $a^2 + b^2 \neq 0$ , 则  $a \neq 0$  且  $b \neq 0$   
C. 若  $a = 0$  且  $b = 0$ , 则  $a^2 + b^2 \neq 0$   
D. 若  $a \neq 0$  或  $b \neq 0$ , 则  $a^2 + b^2 \neq 0$
4. 已知命题  $p$ : 若直线  $a$  与平面  $\alpha$  内的两条直线垂直, 则直线  $a$  与平面  $\alpha$  垂直, 命题  $q$ : 存在两个相交平面垂直于同一条直线. 则下列命题是真命题的为 ( )  
A.  $p \wedge q$  B.  $p \vee q$   
C.  $(\neg p) \vee q$  D.  $p \wedge (\neg q)$
5. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 3^n + a$ , 则“ $a = -1$ ”是“ $\{a_n\}$  为等比数列”的 ( )  
A. 充要条件 B. 必要不充分条件  
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知命题  $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0 + \frac{1}{x_0} < 2$ , 命题  $q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$ , 则下列命题为真命题的是 ( )
- A.  $p \wedge q$  B.  $(\neg p) \wedge q$   
C.  $p \wedge (\neg q)$  D.  $(\neg p) \wedge (\neg q)$
7. 不等式  $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$  成立的一个必要不充分条件是 ( )
- A.  $x < 0$  或  $x > 2$  B.  $x \leq -2$  或  $x \geq 0$   
C.  $x < -1$  或  $x > 4$  D.  $x \leq -\frac{1}{2}$  或  $x \geq 3$

8. “若 $\triangle ABC$ 有一内角为 $\frac{\pi}{3}$ ,则 $\triangle ABC$ 的三内角成等差数列”的逆命题 ( )
- A. 与原命题同为假命题  
B. 与原命题的否命题同为假命题  
C. 与原命题的逆否命题同为假命题  
D. 与原命题同为真命题
9. 下列说法中正确的个数是 ( )
- ①命题“若 $x^2=1$ ,则 $x=1$ ”的否命题为“若 $x^2 \neq 1$ ,则 $x \neq 1$ ”;  
②若 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 \leq 0$ ,则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ;  
③ $\triangle ABC$ 中,“ $\sin A > \sin B$ ”是“ $A > B$ ”的充要条件;  
④若 $p \vee q$ 为真命题,则 $p, q$ 均为真命题.
- A. 0  
B. 1  
C. 2  
D. 3
10. 命题 $p: \forall x \in (-\infty, 0), 2^x > 3^x$ ,则 ( )
- A.  $p$ 是假命题,  $\neg p: \exists x_0 \in (-\infty, 0), 2^{x_0} \leq 3^{x_0}$   
B.  $p$ 是假命题,  $\neg p: \forall x \in (-\infty, 0), 2^x > 3^x$   
C.  $p$ 是真命题,  $\neg p: \exists x_0 \in (-\infty, 0), 2^{x_0} \leq 3^{x_0}$   
D.  $p$ 是真命题,  $\neg p: \forall x \in (-\infty, 0), 2^x > 3^x$
11. 下列说法正确的是 ( )
- A. 若 $p, q$ 为两个命题,则“ $p$ 且 $q$ 为真”是“ $p$ 或 $q$ 为真”的必要不充分条件  
B. 若 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 \leq 0$ ,则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x > 0$   
C. 若命题 $p$ 为真命题,命题 $q$ 为假命题,则命题 $p \wedge (\neg q), (\neg p) \vee q$ 都是真命题  
D. 命题“若 $\neg p$ ,则 $q$ ”的逆否命题是“若 $p$ ,则 $\neg q$ ”
12. 设 $p$ :函数 $f(x) = \lg\left(ax^2 - x + \frac{1}{4}a\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ , $q$ :不等式 $3^x - 9^x < a$ 对任意的正实数均成立.若“ $p$ 或 $q$ ”为真命题,“ $p$ 且 $q$ ”为假命题,则实数 $a$ 的取值范围是 ( )
- A.  $(1, +\infty)$   
B.  $[0, 1]$   
C.  $[0, +\infty)$   
D.  $(0, 1)$

请将选择题答案填入下表：

[illegible]

## 第Ⅱ卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分,把答案填在题中横线上)

13. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ ”的否定是\_\_\_\_\_.
14. 若“ $m-1 < x < m+1$ ”是“ $x^2 - 2x - 3 > 0$ ”的充分不必要条件, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
15. 由命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + m \leq 0$ ”是假命题, 求得实数  $m$  的取值范围是  $(a, +\infty)$ , 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.

16. 设  $p$ : 方程  $x^2 + 2mx + 1 = 0$  有两个不相等的正根,  $q$ : 方程  $x^2 + 2(m-2)x - 3m + 10 = 0$  无实根, 则使  $p \vee q$  为真,  $p \wedge q$  为假的实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- 三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)
17. (10 分) 写出由下述各命题构成的“ $p$  或  $q$ ”“ $p$  且  $q$ ”“非  $p$ ”形式的命题, 并判断所构成的命题的真假.
- (1)  $p$ : 连续三个整数的乘积能被 2 整除,  $q$ : 连续三个整数的乘积能被 3 整除;
- (2)  $p$ : 对角线互相垂直的四边形是菱形,  $q$ : 对角线互相平分的四边形是菱形.

菱形.

18. (12分) 已知  $p$ : 关于  $x$  的不等式  $x^2 + 2ax + 4 > 0$  对任意的  $x \in \mathbf{R}$  恒成立,  $q$ : 函数  $f(x) = (3 - 2a)^x$  是增函数. 若“ $p$  或  $q$ ”为真命题, “ $p$  且  $q$ ”为假命题, 求实数  $a$  的取值范围.



19. (12 分)已知  $p:x^2-5x+14\leqslant 0,q:[x-(1+a)][x-(1-a)]\leqslant 0(a>0)$ . 若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件,求实数  $a$  的取值范围.

20. (12 分)已知函数  $f(x)=\begin{cases}-x-1(x<-2),\\x+3(-2\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}).\end{cases}$   
  
(1)求函数  $f(x)$  的最小值;  
(2)已知  $m\in\mathbf{R},p$ :关于  $x$  的不等式  $f(x)\geqslant m^2+2m-2$  对任意的  $x\in\mathbf{R}$  恒成立, $q$ :函数  $y=(m^2-1)^x$  是增函数,若“ $p$  或  $q$ ”为真命题,“ $p$  且  $q$ ”为假命题,求实数  $m$  的取值范围.
21. (12 分)已知  $p$ :关于  $x$  的不等式  $x^2+(a-1)x+a^2\leqslant 0$  的解集为  $\varnothing$ ,  
 $q$ :函数  $y=(2a^2-a)^x$  为增函数, $r:a$  满足  $\frac{2a-1}{a-2}\leqslant 1$ .  
  
(1)若  $p\vee q$  是真命题, $p\wedge q$  是假命题,求实数  $a$  的取值范围;  
(2)试判断  $\neg p$  是  $r$  成立的一个什么条件.

22. (12 分)已知  $p:x_1$  和  $x_2$  是方程  $x^2-mx-2=0$  的两个实根,不等式  $a^2-5a-3\geqslant |x_1-x_2|$  对任意的  $m\in[-1,1]$ 恒成立, $q$ :关于  $x$  的不等式  $ax^2+2x-1>0$  有解. 若  $p$  是真命题, $q$  是假命题,求实数  $a$  的取值范围.

## 参考答案

### 单元测评(一)

- C 2. C 3. D 4. C 5. A 6. A 7. A 8. D 9. D 10. C
- B 【解析】A,若 $p, q$ 为两个命题,则“ $p$ 且 $q$ 为真”一定能推出“ $p$ 或 $q$ 为真”,反之则不一定,所以应是充分不必要条件,故错误;B,若 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 \leq 0$ ,则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x > 0$ ,故正确;C,若命题 $p$ 为真命题,命题 $q$ 为假命题,则 $\neg p$ 为假命题, $\neg q$ 为真命题,则命题 $p \wedge (\neg q)$ 为真命题, $(\neg p) \vee q$ 为假命题,故错误;D,命题“若 $\neg p$ ,则 $q$ ”的逆否命题是“若 $\neg q$ ,则 $p$ ”,故错误.
- B 【解析】若 $p$ 为真命题,则 $ax^2 - x + \frac{1}{4}a > 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立.当 $a = 0$ 时,不等式可化为 $-x > 0$ ,不恒成立;当 $a \neq 0$ 时,可得 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 1 - a^2 < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 1$ .若 $q$ 为真命题,则 $9^x - 3^x + a > 0$ 对任意的正实数均成立.设 $t = 3^x (x > 0)$ ,则 $t > 1$ ,若 $t^2 - t + a > 0$ 对于 $t > 1$ 恒成立,则 $1^2 - 1 + a \geq 0$ ,可得 $a \geq 0$ .若“ $p$ 或 $q$ ”为真命题,“ $p$ 且 $q$ ”为假命题,则 $p, q$ 一真一假.若 $p$ 真 $q$ 假,则 $a$ 不存在;若 $p$ 假 $q$ 真,则 $0 \leq a \leq 1$ .综上所述,实数 $a$ 的取值范围是 $[0, 1]$ .
- $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^3 - x_0 + \frac{1}{4} < 0$  【解析】全称命题的否定是特称命题,则命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^3 - x_0 + \frac{1}{4} < 0$ ”.
- $m \geq 4$ 或 $m \leq -2$  【解析】由 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 得 $x > 3$ 或 $x < -1$ , $\therefore “m-1 < x < m+1”$ 是“ $x^2 - 2x - 3 > 0$ ”的充分不必要条件, $\therefore m-1 \geq 3$ 或 $m+1 \leq -1$ ,解得 $m \geq 4$ 或 $m \leq -2$ ,故实数 $m$ 的取值范围是 $m \geq 4$ 或 $m \leq -2$ .
- 1 【解析】 $\therefore$ 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + m \leq 0$ ”是假命题, $\therefore$ 其否定为真命题,即命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + m > 0$ ”是真命题, $\therefore \Delta = 4 - 4m < 0$ ,得 $m > 1$ , $\therefore m$ 的取值范围为 $(1, +\infty)$ ,则 $a = 1$ .
- $(-\infty, -2] \cup [-1, 3]$  【解析】若方程 $x^2 + 2mx + 1 = 0$ 有两个不相等的正根,则 $\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4 > 0, \\ -2m > 0, \end{cases} \therefore m < -1$ .若方程 $x^2 + 2(m-2)x - 3m + 10 = 0$ 无实根,则 $\Delta_1 = 4(m-2)^2 - 4(-3m+10) < 0, \therefore -2 < m < 3$ .由题知, $p, q$ 一真一假.若 $p$ 真 $q$ 假,则 $m \leq -2$ ;若 $p$ 假 $q$ 真,则 $-1 \leq m < 3$ .故实数 $m$ 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [-1, 3]$ .
- 解:(1) $p$ 或 $q$ :连续的三个整数的乘积能被2整除或能被3整除. $p$ 且 $q$ :连续的三个整数的乘积能被2整除且能被3整除.非 $p$ :存在连续的三个整数的乘积不能被2整除. $\therefore$ 连续的三个整数中至少有一个是偶数,且至少有一个是3的倍数, $\therefore p$ 真, $q$ 真, $\therefore “p$ 或 $q”$ 与“ $p$ 且 $q”$ 均为真,“非 $p”$ 为假.(2) $p$ 或 $q$ :对角线互相垂直或平分的四边形是菱形. $p$ 且 $q$ :对角线互相垂直且平分的四边形是菱形.非 $p$ :存在对角线互相垂直的四边形不是菱形. $\therefore p$ 假, $q$ 假, $\therefore “p$ 或 $q”$ 与“ $p$ 且 $q”$ 均为假,“非 $p”$ 为真.18. 解:若 $p$ 为真命题,则 $\Delta = 4a^2 - 16 < 0$ ,解得 $-2 < a < 2$ ;若 $q$ 为真命题,则 $3 - 2a > 1$ ,解得 $a < 1$ .若“ $p$ 或 $q”$ 为真命题,“ $p$ 且 $q”$ 为假命题,则 $p$ 真 $q$ 假或 $p$ 假 $q$ 真,可得 $\begin{cases} -2 < a < 2, \\ a \geq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \leq -2 \text{ 或 } a \geq 2, \\ a \geq 1 \end{cases}$ ,解得 $1 \leq a < 2$ 或 $a \leq -2, \therefore$ 实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [1, 2)$ .19. 解:由 $p: x^2 - 5x - 14 \leq 0$ ,得 $(x-7)(x+2) \leq 0$ ,解得 $-2 \leq x \leq 7$ .由 $q: [x - (1+a)][x - (1-a)] \leq 0 (a > 0)$ ,得 $1-a \leq x \leq 1+a, \therefore p$ 是 $q$ 的充分不必要条件, $\therefore p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ ,即 $\{x | -2 \leq x \leq 7\} \subseteq \{x | 1-a \leq x \leq 1+a\}, \therefore \begin{cases} 1-a \leq -2, \\ 1+a \geq 7, \end{cases}$ 且两个等号不同时成立,解得 $a \geq 6, a > 0$ ,故实数 $a$ 的取值范围是 $[6, +\infty)$ .20. 解:(1)作出函数 $f(x)$ 的图像(图略),由图可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减,在 $[-2, \frac{1}{2}]$ 上单调递增,故 $f(x)$ 的最小值 $f(x)_{\min} = f(-2) = 1$ .(2)若 $p$ 为真,则 $m^2 + 2m - 2 \leq 1$ ,故 $-3 \leq m \leq 1$ ;若 $q$ 为真,则 $m^2 - 1 > 1$ ,故 $m > \sqrt{2}$ 或 $m < -\sqrt{2}$ .若“ $p$ 或 $q”$ 为真,“ $p$ 且 $q”$ 为假,则 $p, q$ 一真一假.①若 $p$ 真 $q$ 假,则 $\begin{cases} -3 \leq m \leq 1, \\ -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $-\sqrt{2} \leq m \leq 1$ ;②若 $p$ 假 $q$ 真,则 $\begin{cases} m > 1 \text{ 或 } m < -3, \\ m < -\sqrt{2} \text{ 或 } m > \sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $m < -3$ 或 $m > \sqrt{2}$ .故实数 $m$ 的取值范围是 $(-\infty, -3) \cup [-\sqrt{2}, 1] \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ .21. 解:若关于 $x$ 的不等式 $x^2 + (a-1)x + a^2 \leq 0$ 的解集为 $\emptyset$ ,则 $\Delta = (a-1)^2 - 4a^2 < 0$ ,即 $3a^2 + 2a - 1 > 0$ ,解得 $a < -1$ 或 $a > \frac{1}{3}$ .若函数 $y = (2a^2 - a)^x$ 为增函数,则 $2a^2 - a > 1$ ,即 $2a^2 - a - 1 > 0$ ,解

得 $a < -\frac{1}{2}$ 或 $a > 1$ .

(1) $\therefore p \vee q$ 是真命题, $p \wedge q$ 是假命题, $\therefore p, q$ 一真一假.

当 $p$ 假 $q$ 真时, $\begin{cases} -1 \leq a \leq \frac{1}{3}, \\ a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } a > 1, \end{cases}$ 即 $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$ ;

当 $p$ 真 $q$ 假时, $\begin{cases} a < -1 \text{ 或 } a > \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{2} \leq a \leq 1, \end{cases}$ 即 $\frac{1}{3} < a \leq 1$ .

$\therefore$ 实数 $a$ 的取值范围是 $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3} < a \leq 1$ .

(2)若 $\frac{2a-1}{a-2} \leq 1$ ,即 $\frac{2a-1}{a-2} - 1 \leq 0$ ,即 $\frac{a+1}{a-2} \leq 0$ ,则 $-1 \leq a < 2$ .

$\therefore \neg p: -1 \leq a \leq \frac{1}{3}$ ,且 $[-1, \frac{1}{3}]$ 是 $[-1, 2)$ 的真子集,

$\therefore \neg p$ 是 $r$ 成立的一个充分不必要条件.

- 解: $\therefore x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - mx - 2 = 0$ 的两个实根, $\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = m, \\ x_1 x_2 = -2, \end{cases}$  $\therefore |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{m^2 + 8}, \therefore$ 当 $m \in [-1, 1]$ 时, $|x_1 - x_2|_{\max} = 3. \therefore$ 由不等式 $a^2 - 5a - 3 \geq |x_1 - x_2|$ 对任意的 $m \in [-1, 1]$ 恒成立,得 $a^2 - 5a - 3 \geq 3$ ,解得 $a \geq 6$ 或 $a \leq -1$ .关于 $x$ 的不等式 $ax^2 + 2x - 1 > 0$ 有解,当 $a > 0$ 时,显然有解;当 $a = 0$ 时, $2x - 1 > 0$ 有解;当 $a < 0$ 时,由 $\Delta = 4 + 4a > 0$ ,解得 $a > -1$ ,此时 $-1 < a < 0. \therefore$ 不等式 $ax^2 + 2x - 1 > 0$ 有解时, $a > -1. \therefore q$ 是假命题, $\therefore a \leq -1$ .故 $p$ 是真命题, $q$ 是假命题时,实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty, -1]$ .

### 单元测评(二)A

- A 2. C 3. C 4. B 5. D 6. D 7. C
- B 【解析】由题设, $|MN|$ 为 $M$ 到准线的距离,故 $|MN| = |MF|$ .又直线 $FM$ 的斜率为 $\sqrt{3}$ ,所以 $\angle MFx = 60^\circ$ ,即 $\angle NMF = 60^\circ$ ,因此 $\triangle MNF$ 为等边三角形.过 $F$ 作 $MN$ 的垂线,垂足为 $E$ ,则 $E$ 为线段 $MN$ 的中点,且 $|NE| = p = 2$ ,所以 $|MN| = 4$ ,所以 $M$ 到直线 $NF$ 的距离为 $2\sqrt{3}$ ,故选B.
- D 【解析】将 $y = k(x+2)$ 代入 $y^2 = 8x$ ,得 $k^2 x^2 + (4k^2 - 8)x + 4k^2 = 0$ ,由题知 $\Delta = (4k^2 - 8)^2 - 16k^4 > 0$ ,即 $k^2 < 1$ .设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,则 $x_1 + x_2 = \frac{8-4k^2}{k^2}, x_1 x_2 = 4$ .抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线方程为 $x = -2$ ,由 $|FA| = 2|FB|$ 及抛物线定义得 $x_1 + 2 = 2(x_2 + 2)$ ,即 $x_1 = 2 + 2x_2$ ,代入 $x_1 x_2 = 4$ ,整理得 $x_2^2 + x_2 - 2 = 0$ ,解得 $x_2 = 1$ 或 $x_2 = -2$ (舍去),所以 $x_1 = 4, \frac{8-4k^2}{k^2} = 5$ ,解得 $k^2 = \frac{8}{9}$ .又因为 $k > 0$ ,所以 $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .13.  $\frac{4}{3}$  【解析】依题意知 $m > 1$ ,且 $\frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}} = \frac{1}{2}$ ,即 $4m - 4 = m$ ,所以 $m = \frac{4}{3}$ .14.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  【解析】双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 $A(a, 0)$ ,渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ .若 $\angle MAN = 60^\circ$ ,则 $A$ 到一条渐近线的距离为 $b \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ,可得 $\frac{|ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ,即 $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,可得离心率 $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .15. 5 【解析】依题意,抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 $F(0, 1)$ ,准线方程为 $y = -1$ ,圆 $C: (x+1)^2 + (y-5)^2 = 1$ 的圆心为 $C(-1, 5)$ .过 $C$ 作 $CB$ 垂直于抛物线的准线,垂足为 $B$ ,交圆于 $A$ ,交抛物线于 $M$ ,此时 $|MA| + |MF|$ 最小,则 $(|MA| + |MF|)_{\min} = |MC| + |MB| - 1 = |CB| - 1 = 5$ .16. 1 【解析】依题意,椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 $A(-a, 0), B(a, 0)$ ,所以 $A, B$ 分别为左、右顶点的等轴双曲线 $C$ 的方程为 $x^2 - y^2 = a^2$ .设双曲线上异于 $A, B$ 的点 $P$ 的坐标为 $(x, y)$ ,则直线 $PA, PB$ 的斜率分别为 $k_1 = \frac{y}{x+a}, k_2 = \frac{y}{x-a}$ ,所以 $k_1 k_2 = \frac{y}{x+a} \times \frac{y}{x-a} = \frac{y^2}{x^2 - a^2} = 1$ .17. 解:(1)由双曲线方程 $16x^2 - 9y^2 = 144$ ,可得 $a = 3, b = 4, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ ,则双曲线的实轴长 $2a = 6$ ,虚轴长 $2b = 8$ ,离心率 $e = \frac{5}{3}$ .(2)抛物线 $C$ 的顶点是该双曲线的中心 $(0, 0)$ ,而焦点是该双曲线的左顶点 $(-3, 0)$ .由题意,设抛物线 $C$ 的方程为 $y^2 = -2px (p > 0)$ ,则 $-\frac{p}{2} = -3$ ,解得 $p = 6. \therefore$ 抛物线 $C$ 的方程为 $y^2 = -12x$ .

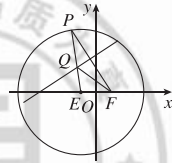
- 解:(1)由椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ,可得 $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$ .由椭圆的定义,得 $|AF_1| + |AF_2| = 2a = 4, |BF_1| + |BF_2| = 2a = 4$ ,又 $|AF_1| + |BF_1| = |AB|, \therefore \triangle ABF_2$ 的周长为 $|AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 4a = 8, \therefore \triangle ABF_2$ 的周长为8.(2)由题可知, $F_1(-1, 0), \therefore$ 直线 $AB$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}, \therefore$ 直线 $AB$ 的斜率为1,故直线 $AB$ 的方程为 $y = x + 1$ .由 $\begin{cases} y = x + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 整理得 $7y^2 - 6y - 9 = 0$ .设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,可知 $y_1 + y_2 = \frac{6}{7}, y_1 \cdot y_2 = -\frac{9}{7}, \therefore |AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{9}{7}\right)} = \frac{24}{7}$ .19. 解:(1)因为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$ ,所以 $-\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$ ,解得 $p = 1$ ,所以抛物线的方程为 $y^2 = 2x$ .(2)证明:设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ .将 $y = k(x-2)$ 代入 $y^2 = 2x$ ,消去 $y$ 并整理得 $k^2 x^2 - 2(2k^2 + 1)x + 4k^2 = 0$ ,所以 $x_1 x_2 = 4$ .由 $y_1^2 = 2x_1, y_2^2 = 2x_2$ ,得 $y_1^2 y_2^2 = 4x_1 x_2 = 16$ ,注意到 $y_1, y_2$ 异号,所以 $y_1 y_2 = -4$ ,所以直线 $OM$ 与直线 $ON$ 的斜率之积为 $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$ ,即 $OM \perp ON$ .20. 解:(1)由题意知 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,所以 $a^2 = 2c^2$ ,所以 $b^2 = c^2$ ,又 $\frac{1}{2a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$ ,所以 $b^2 = 1, a^2 = 2$ ,故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .(2)证明:设 $P(2, t)$ ,由(1)知右焦点 $F(1, 0)$ .当直线 $AB$ 的斜率不存在时,其方程为 $x = 1$ ,因此,设 $A(1, y)$ ,则 $B(1, -y)$ ,所以 $k_{PA} + k_{PB} = \frac{t-y}{2-1} + \frac{t+y}{2-1} = 2t$ ,且 $k_{PF} = \frac{t-0}{2-1} = t$ ,所以 $k_{PA} + k_{PB} = 2k_{PF}$ ,因此,直线 $PA, PF, PB$ 的斜率成等差数列.当直线 $AB$ 的斜率存在时,其方程可设为 $y = k(x-1)$ ,并设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,由 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2 - 4k^2 x + 2k^2 - 2 = 0$ ,所以 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2k^2-2}{1+2k^2}$ ,因此, $k_{PA} + k_{PB} = \frac{t-y_1}{2-x_1} + \frac{t-y_2}{2-x_2} = t \left( \frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} \right) - \left( \frac{y_1}{2-x_1} + \frac{y_2}{2-x_2} \right)$ ,因为 $\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} = \frac{4-(x_1+x_2)}{4-2(x_1+x_2)+x_1 x_2} = \frac{4-\frac{4k^2}{1+2k^2}}{4-2 \times \frac{4k^2}{1+2k^2} + \frac{2k^2-2}{1+2k^2}} = \frac{4(1+k^2)}{2(1+k^2)} = 2$ ,所以 $\frac{y_1}{2-x_1} + \frac{y_2}{2-x_2} = k \left( \frac{x_1-1}{2-x_1} + \frac{x_2-1}{2-x_2} \right) = k \left( \frac{x_1-2+1}{2-x_1} + \frac{x_2-2+1}{2-x_2} \right) = k \left( \frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} - 2 \right) = 0$ ,所以 $k_{PA} + k_{PB} = 2t$ ,又因为 $k_{PF} = \frac{t-0}{2-1} = t$ ,所以 $k_{PA} + k_{PB} = 2k_{PF}$ ,因此,直线 $PA, PF, PB$ 的斜率成等差数列.综上所述,直线 $PA, PF, PB$ 的斜率成等差数列.21. 解:(1)抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ,则直线 $AB$ 的方程为 $y = 2\sqrt{2} \left( x - \frac{p}{2} \right)$ ,与抛物线的方程联立,可得 $4x^2 - 5px + p^2 = 0$ ①,可得 $x_1 + x_2 = \frac{5}{4}p$ .由抛物线的定义可得 $|AB| = x_1 + x_2 + p$ ,由题意得 $\frac{5}{4}p + p = \frac{9}{2}$ ,解得 $p = 2$ ,即抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ .(2)由①及 $p = 2$ 可得 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ,解得 $x = 2$ 或 $x = \frac{1}{2}$ ,即 $A\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right), B(2, 2\sqrt{2})$ .设 $C(x_3, y_3)$ ,则 $\vec{OC} = (x_3, y_3) = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right) + \lambda(2, 2\sqrt{2}) = \left(\frac{1}{2} + 2\lambda, -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\lambda\right)$ ,即有 $x_3 = \frac{1}{2} + 2\lambda, y_3 = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\lambda$ .由 $y_3^2 = 4x_3$ ,得 $[\sqrt{2}(2\lambda-1)]^2 = 4\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right)$ ,即 $(2\lambda-1)^2 = 1 + 4\lambda$ ,解得 $\lambda = 0$ (舍)或 $\lambda = 2$ .
- 解:(1)由椭圆 $E$ 的方程,得 $M(0, \sqrt{3})$ .记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,由题意知, $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ ,若直线 $AB$ 的斜率不存在,则直线 $AB$ 的方程为

$x = x_1$ ,故 $y_1 = -y_2$ ,且 $y_1^2 = y_2^2 = 3\left(1 - \frac{x_1^2}{4}\right)$ ,因此 $k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y_1 - \sqrt{3}}{x_1} \cdot \frac{y_2 - \sqrt{3}}{x_2} = -\frac{y_1^2 - 3}{x_1^2} = \frac{3}{4}$ ,与已知不符,因此直线 $AB$ 的斜率存在.设直线 $AB$ 的方程为 $y = kx + m$ ,与椭圆 $E$ 的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立,得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 3) = 0$ ①,因为直线 $AB$ 与椭圆 $E$ 有两个交点 $A, B$ ,所以方程①有两个非零不等实根,所以 $\Delta > 0, x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2}$ .又 $k_{AM} = \frac{y_1 - \sqrt{3}}{x_1} = \frac{kx_1 + m - \sqrt{3}}{x_1}, k_{MB} = \frac{y_2 - \sqrt{3}}{x_2} = \frac{kx_2 + m - \sqrt{3}}{x_2}$ ,所以由 $k_{AM} \cdot k_{BM} = \frac{1}{4}$ ,得 $4(kx_1 + m - \sqrt{3})(kx_2 + m - \sqrt{3}) = x_1 x_2$ ,即 $(4k^2 - 1)x_1 x_2 + 4k(m - \sqrt{3})(x_1 + x_2) + 4(m - \sqrt{3})^2 = 0$ ,所以 $4(m^2 - 3)(4k^2 - 1) + 4k(m - \sqrt{3})(-8km) + 4(m - \sqrt{3})^2(3 + 4k^2) = 0$ ,化简得 $m^2 - 3\sqrt{3}m + 6 = 0$ ,故 $m = \sqrt{3}$ 或 $m = 2\sqrt{3}$ .结合 $x_1 x_2 \neq 0$ ,知 $m = 2\sqrt{3}$ ,故直线 $AB$ 恒过定点 $(0, 2\sqrt{3})$ .(2)记直线 $AB$ 恒过的定点为 $N$ ,则 $N(0, 2\sqrt{3})$ .由 $\Delta > 0$ 且 $m = 2\sqrt{3}$ ,得 $k < -\frac{3}{2}$ 或 $k > \frac{3}{2}$ .不妨设 $y_2 > y_1$ ,

则 $S_{\triangle ABM} = |S_{\triangle ANM} - S_{\triangle BNM}| = \frac{1}{2}|MN||x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{-8km}{3 + 4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2}} = \frac{6}{\sqrt{4k^2 - 9} + \frac{12}{\sqrt{4k^2 - 9}}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,当且仅当 $4k^2 - 9 = 12$ ,即 $k = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$ 时, $\triangle ABM$ 的面积取得最大值,且最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### 单元测评(二)B

- D 2. D 3. A 4. A 5. D 6. A 7. B 8. A 9. C 10. A
- C 【解析】因为双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为3,所以 $\frac{c}{a} = 3$ ,即 $\frac{b^2 + a^2}{a^2} = 9$ ,所以 $\frac{b^2}{a^2} = 8$ .双曲线的渐近线方程为 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ ,因为抛物线 $C_2: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点 $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ 到双曲线 $C_1$ 的渐近线的距离为 $\frac{2}{3}$ ,所以 $\frac{\frac{p}{2}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{2}{3}$ ,又 $\frac{b^2}{a^2} = 8$ ,所以 $p = 4$ ,则抛物线 $C_2$ 的方程为 $x^2 = 8y$ .13. 2 【解析】由题意设焦距为 $2c$ ,椭圆的长轴长为 $2a$ ,双曲线的实轴长为 $2m$ .设 $P$ 在双曲线的右支上,由双曲线的定义得 $|PF_1| - |PF_2| = 2m$ ①,由椭圆的定义得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ②, $\therefore \vec{PF}_1 \cdot \vec{PF}_2 = 0, \therefore PF_1 \perp PF_2$ ,即 $\angle F_1 P F_2 = 90^\circ$ ,故 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2$ ③,将①式与②式平方后相加,得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 2a^2 + 2m^2$ ④,将④代入③,化简得 $a^2 + m^2 = 2c^2$ ,即 $\frac{1}{c^2} + \frac{1}{m^2} = 2$ ,可得 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 2$ ,因此, $\frac{e_1^2 + e_2^2}{(e_1 \cdot e_2)^2} = \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_1^2} = 2$ .故选C.13. 2 【解析】依题意,设抛物线的焦点为 $F$ ,点 $Q$ 的横坐标是 $x_0 (x_0 \geq 0)$ ,则 $|QF| = x_0 + \frac{p}{2}$ 的最小值是 $\frac{p}{2} = 1$ ,则 $p = 2$ .14.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  【解析】如图所示,根据题意知 $|QP| = |QF|$ ,则 $|QE| + |QF| = |QE| + |QP| = 4 > |EF| = 2$ ,故点 $Q$ 的轨迹是以 $E, F$ 为焦点,长轴长为4的椭圆,所以 $a = 2, c = 1$ ,所以 $b = \sqrt{3}$ ,所以点 $Q$ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .15.  $\frac{\sqrt{21}}{3}$  【解析】不妨设 $M$ 在第一象限, $N$ 在第三象限,易知 $A(-a, 0)$ ,由已知条件知圆的方程为 $x^2 + y^2 = c^2$ .由 $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x, \\ x^2 + y^2 = c^2, \end{cases}$ 得 $M(a, b), N(-a, -b), \therefore \vec{AM} = (2a, b), \vec{AN} = (0, -b)$ ,又 $\angle MAN = 120^\circ, \therefore \cos \langle \vec{AM}, \vec{AN} \rangle = \frac{-b^2}{\sqrt{4a^2 + b^2} \cdot b} = -\frac{1}{2}$ ,





导学案

DAO XUE AN

参考答案

第一章 常用逻辑用语

1.1 命题及其关系

1.1.1 命题 1.1.2 四种命题

【预习探究】

知识点一

- 命题
- 若  $p$ , 则  $q$  如果  $p$ , 那么  $q$  命题的条件 命题的结论
- 真命题 假命题

探究  $\times$

思考 (1) $\times$  (2) $\times$  (3) $\times$  (4) $\surd$  【解析】(1)不能判断真假.  
(2)疑问句不是命题, (3)由于“大树”没有界定, 就不能判断“这是一棵大树”的真假, (4)是命题.

知识点二

互逆命题 原命题 逆命题 若  $q$ , 则  $p$   
互否命题 否命题 若  $\neg p$ , 则  $\neg q$   
互为逆否命题 逆否命题 若  $\neg q$ , 则  $\neg p$

探究 ②和④, ③和⑥ ①和⑥, ②和⑤ ①和③, ④和⑤

【解析】命题③可改写为“若一个四边形是正方形, 则它的四条边相等”, 命题④可改写为“若一个四边形是圆内接四边形, 则它的对角互补”, 命题⑤可改写为“若一个四边形的对角不互补, 则它不内接于圆”, 再依据四种命题间的关系进行判断即可.

【考点类析】

考点一

例 1 (1)①②③④ (2)② 【解析】(1)易知②③④为命题.  
(2)①当  $m=0$  时, 原方程是一元一次方程; ③空集不是其本身的真子集.  
例 2 解: 当  $m=0$  时,  $1>0$  恒成立, 所以  $m=0$  满足题意;  
当  $m>0$ , 且  $\Delta=m^2-12m<0$ , 即  $0<m<12$  时,  $3mx^2+mx+1>0$  恒成立, 所以  $0<m<12$  满足题意; 当  $m<0$  时,  $3mx^2+mx+1>0$  不恒成立. 综上,  $0\leq m<12$ .

考点二

例 3 解: (1)原命题可以写成: 若一个数是实数, 则它的平方是非负数. 这个命题是真命题.  
(2)原命题可以写成: 若两个三角形的底边长相等且高相等, 则这两个三角形是全等三角形. 这个命题是假命题.  
(3)原命题可以写成: 若一个数能被 6 整除, 则它既能被 3 整除也能被 2 整除. 这个命题是真命题.  
(4)原命题可以写成: 若一条直线是弦的垂直平分线, 则这条直线经过圆心且平分弦所对的弧. 这个命题是真命题.

考点三

例 4 解: (1)该命题为假命题.  
逆命题: 若二次函数  $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$  的图像与  $x$  轴有交点, 则  $b^2-4ac<0$ . 它为假命题.  
否命题: 若在二次函数  $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$  中,  $b^2-4ac\geq 0$ , 则该函数图像与  $x$  轴无交点. 它为假命题.  
逆否命题: 若二次函数  $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$  的图像与  $x$  轴无交点, 则  $b^2-4ac\geq 0$ . 它为假命题.  
(2)该命题为假命题.  
逆命题: 若  $m+n\leq 0$ , 则  $m\leq 0$  或  $n\leq 0$ . 它为真命题.  
否命题: 若  $m>0$  且  $n>0$ , 则  $m+n>0$ . 它为真命题.  
逆否命题: 若  $m+n>0$ , 则  $m>0$  且  $n>0$ . 它为假命题.  
(3)该命题为真命题.  
逆命题: 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B$  所对的边分别为  $a, b$ , 若  $A>B$ , 则  $a>b$ . 它为真命题.  
否命题: 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B$  所对的边分别为  $a, b$ , 若  $a\leq b$ , 则  $A\leq B$ . 它为真命题.  
逆否命题: 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B$  所对的边分别为  $a, b$ , 若  $A\leq B$ , 则  $a\leq b$ . 它为真命题.

【当堂自测】

- B 【解析】选项 A 中语句不是陈述句, 因此不是命题. 选项 B 中,  $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0, x\in\mathbf{R}$ , 可以判断真假, 它是命题. 选项 C 中语句是疑问句, 不是命题. 选项 D 中, 虽然是陈述句, 但无法判断真假, 因此不是命题.
- A 【解析】对于 A, 若  $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ , 则  $x=y$ ; 对于 B, 若  $x^2=1$ , 则  $x=\pm 1$ ; 对于 C, 若  $x=y<0$ , 则  $\sqrt{x}$  与  $\sqrt{y}$  无意义; 对于 D, 若  $x=-2, y=-1$ , 满足  $x<y$ , 但  $x^2>y^2$ . 故选 A.
- C 【解析】命题“若  $a+b=1$ , 则  $a^2+b^2\geq \frac{1}{2}$ ”的逆否命题是“若  $a^2+b^2<\frac{1}{2}$ , 则  $a+b\neq 1$ ”, 故选 C.
- B 【解析】由题知不等式  $x^2+ax+a\geq 0$  恒成立,  $\therefore \Delta=a^2-4a\leq 0$ , 即  $0\leq a\leq 4$ . 故选 B.
- 解: 原命题: 若一个数是正偶数, 则这个数不是质数. 它是假命题.  
逆命题: 若一个数不是质数, 则这个数是正偶数. 它是假命题.

否命题: 若一个数不是正偶数, 则这个数是质数. 它是假命题.  
逆否命题: 若一个数是质数, 则这个数不是正偶数. 它是假命题.

1.1.3 四种命题间的相互关系

【预习探究】

知识点一

讨论 解: 是, 从四种命题间的关系图中可以看出这几种关系各有两对.

知识点二

真 真 假 真 真 假 假 假 (1)相同 (2)没有关系  
思考 (1) $\times$  (2) $\surd$  (3) $\surd$  【解析】(1)两个互逆命题的真假性没有关系.  
(2)原命题的逆命题与原命题的否命题互为逆否命题, 真假性相同.  
(3)由于原命题与其逆否命题为等价命题, 原命题的逆命题与原命题的否命题也为等价命题, 故四种形式的命题中真命题的个数不可能为奇数, 只能为 0 或 2 或 4.

【考点类析】

考点一

例 1 B 【解析】A 中, 原命题的否命题为“若  $x^2+y^2=0$ , 则  $x, y$  全为 0”, 是真命题. B 中, 原命题的逆命题为“若两个三角形相似, 则这两个三角形都是正三角形”, 是假命题. C 中, 原命题的逆否命题为“若  $x^2+x-m=0$  无实根, 则  $m\leq 0$ ”, 若方程无实根, 则  $\Delta=1+4m<0$ ,  $\therefore m<-\frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  原命题的逆否命题是真命题. D 中, 原命题的逆否命题为“若  $x$  不是无理数, 则  $x-\sqrt{2}$  不是有理数”,  $\therefore x$  不是无理数,  $\therefore x$  是有理数, 又  $\sqrt{2}$  是无理数,  $\therefore x-\sqrt{2}$  是无理数, 不是有理数,  $\therefore$  原命题的逆否命题是真命题.

例 2 ②③ 【解析】①中, 原命题的否命题为“若  $a\leq b$ , 则  $a^2\leq b^2$ ”, 是假命题. ②中, 原命题的逆命题为“若  $x, y$  互为相反数, 则  $x+y=0$ ”, 是真命题. ③中, 原命题的逆否命题为“若  $x\geq 2$  或  $x\leq -2$ , 则  $x^2\geq 4$ ”, 是真命题.

考点二

导入 真假性 等价性

例 3 证明: 将“若  $m^2+n^2=2$ , 则  $m+n\leq 2$ ”视为原命题, 则它的逆否命题为“若  $m+n>2$ , 则  $m^2+n^2\neq 2$ ”.  
因为  $m+n>2$ , 所以  $m^2+n^2\geq \frac{1}{2}(m+n)^2>\frac{1}{2}\times 2^2=2$ , 所以  $m^2+n^2\neq 2$ , 所以逆否命题为真, 故原命题为真, 问题得证.

变式 证明: 命题“若  $a^2-4b^2-2a+1\neq 0$ , 则  $a\neq 2b+1$ ”的逆否命题为“若  $a=2b+1$ , 则  $a^2-4b^2-2a+1=0$ ”. 由  $a=2b+1$ , 得  $a^2-4b^2-2a+1=(2b+1)^2-4b^2-2\times(2b+1)+1=4b^2+4b+1-4b^2-4b-2+1=0$ . 显然原命题的逆否命题为真命题, 所以原命题也为真命题. 故原命题得证.

拓展 解: 方法一: 原命题的逆否命题为“若  $a\geq 2$ , 则关于  $x$  的不等式  $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leq 0$  的解集不是空集”.  
抛物线  $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$  开口向上, 判别式  $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)=4a-7$ ,  $\therefore a\geq 2, \therefore 4a-7>0$ , 即抛物线与  $x$  轴有交点.  $\therefore$  关于  $x$  的不等式  $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leq 0$  的解集不是空集, 故原命题的逆否命题为真.  
方法二: 先判断原命题的真假.  
若关于  $x$  的不等式  $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leq 0$  的解集为空集, 则  $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)=4a-7<0, \therefore a<\frac{7}{4}<2$ .  $\therefore$  原命题是真命题.  
由原命题和它的逆否命题同真同假知它的逆否命题为真命题.

【当堂自测】

- C 【解析】与原命题等价的命题为其逆否命题: 若  $x^2-2x-3\neq 0$ , 则  $x\neq 3$ .
- A 【解析】对于 A, 原命题的否命题是“若  $x^2\neq 4$ , 则  $x\neq 2$ ”, 该命题是真命题; 对于 B, 原命题的逆命题是“若  $a$  是无理数, 则  $a+\sqrt{3}$  是有理数”, 该命题是假命题; 对于 C, 命题“若  $x>a^2+b^2$ , 则  $x>2ab$ ”是真命题; 对于 D, 原命题是真命题, 故其逆否命题是真命题. 故选 A.
- A 【解析】设  $p$  为“若  $A$ , 则  $B$ ”, 那么  $q$  为“若  $\neg A$ , 则  $\neg B$ ”,  $r$  为“若  $\neg B$ , 则  $\neg A$ ”. 由于  $q$  和  $r$  的条件和结论互换, 故  $q$  和  $r$  互为逆命题.
- D 【解析】A 中, 逆命题和否命题的真假性相同; B 中, 由  $a>b$  可得  $a+c>b+c$ , 反之也成立, 因此二者等价; C 中, 原命题的逆否命题为“若  $a, b$  不全为 0, 则  $a^2+b^2\neq 0$ ”; D 中说法正确.
- ①②

1.2 充分条件与必要条件

1.2.1 充分条件与必要条件 1.2.2 充要条件

【预习探究】

知识点一

充分 必要 充分不必要 真子集 必要不充分 真子集 充要  $A=B$  既不充分也不必要 包含  
探究 (1) $\times$  (2) $\surd$  (3) $\times$  (4) $\surd$  (5) $\surd$   
【解析】(1)例如:  $p:x>1, q:x>0, p$  是  $q$  的充分条件, 另外, 若  $p:x>2, p$  也是  $q$  的充分条件.  
(3)“若  $p$ , 则  $q$ ”是假命题, 即  $p\nRightarrow q$ , “若  $q$ , 则  $p$ ”是真命题, 即  $q\Rightarrow p, \therefore p$  是  $q$  的必要不充分条件.

知识点二

$\Leftrightarrow$  充分必要条件 充要条件

【考点类析】

考点一

导入 (1) $p\Rightarrow q, q\Rightarrow p$  (2)定义法 集合法

例 1 解: (1) $\therefore$  两个三角形相似 $\Leftrightarrow$ 两个三角形全等, 但两个三角形全等 $\Rightarrow$ 两个三角形相似,  $\therefore p$  是  $q$  的必要不充分条件.  
(2) $\therefore f(x)=x\Rightarrow f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数, 但  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上为增函数 $\Rightarrow f(x)=x, \therefore p$  是  $q$  的充分不必要条件.  
(3) $\therefore p\Rightarrow q$ , 且  $q\Rightarrow p, \therefore p$  是  $q$  的充分必要条件.  
(4) $\therefore p\nRightarrow q$ , 且  $q\nRightarrow p, \therefore p$  是  $q$  的既不充分也不必要条件.  
变式 解: (1) $\therefore$  四边形的对角线相等 $\Rightarrow$ 四边形是平行四边形, 四边形是平行四边形 $\Rightarrow$ 四边形的对角线相等,  $\therefore p$  是  $q$  的既不充分也不必要条件.  
(2)当  $a=0$  时,  $1>0$  满足题意; 当  $a\neq 0$  时, 由  $\begin{cases} \Delta=a^2-4a<0, \\ a>0, \end{cases}$  可得  $0<a<4$ . 所以  $p: 0\leq a<4$ . 故  $p$  是  $q$  的必要不充分条件.  
(3)因为  $A\cup B=A\Leftrightarrow A\cap B=B$ , 所以  $p$  是  $q$  的充要条件.  
(4)由  $\begin{cases} a>2, \\ \beta>2, \end{cases}$  根据同向不等式相加、相乘的性质, 有  $\begin{cases} a+\beta>4, \\ a\beta>4, \end{cases}$  即  $p\Rightarrow q$ . 但  $\begin{cases} a+\beta>4, \\ a\beta>4 \end{cases}\nRightarrow\begin{cases} a>2, \\ \beta>2, \end{cases}$  比如, 当  $a=1, \beta=5$  时,  $\begin{cases} a+\beta=6>4, \\ a\beta=5>4, \end{cases}$  而  $a<2$ , 所以  $q\nRightarrow p$ , 所以  $p$  是  $q$  的充分不必要条件.

考点二

导入 (1)充要 (2)充分不必要 必要不充分 (3)充分 必要

例 2 解: 由  $|4x-3|\leq 1$ , 得  $-\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ , 即  $p: -\frac{1}{2}\leq x\leq 1$ . 由  $x^3-(2a+1)x+a^2+a\leq 0$ , 得  $(x-a)[x-(a+1)]\leq 0$ , 可得  $a\leq x\leq a+1$ , 即  $q: a\leq x\leq a+1$ . 因为  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 所以  $\begin{cases} a+1>1, \\ a\leq \frac{1}{2} \end{cases}$  或  $\begin{cases} a+1\geq 1, \\ a<\frac{1}{2}, \end{cases}$  解得  $0\leq a\leq \frac{1}{2}$ , 所以实数  $a$  的取值范围是  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

变式 (1)D (2) $[-1, 5]$  【解析】(1)由  $x^2-3x-4\leq 0$ , 解得  $-1\leq x\leq 4$ . 由  $x^2-6x+9-m^2\leq 0$ , 可得  $[x-(3+m)][x-(3-m)]\leq 0$ ①.  
当  $m=0$  时, ①式的解集为  $\{x|x=3\}$ ;  
当  $m<0$  时, ①式的解集为  $\{x|3+m\leq x\leq 3-m\}$ ;  
当  $m>0$  时, ①式的解集为  $\{x|3-m\leq x\leq 3+m\}$ .  
若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 则集合  $\{x|-1\leq x\leq 4\}$  是①式的解集的真子集, 可得  $\begin{cases} m<0, \\ 3+m\leq -1, \end{cases}$  (不能同时取等号) 或  $\begin{cases} m>0, \\ 3-m\leq -1, \end{cases}$  (不能同时取等号), 解得  $m\leq -4$  或  $m\geq 4$ .  
经验证, 当  $m=-4$  或  $m=4$  时, ①式的解集均为  $\{x|-1\leq x\leq 7\}$ , 符合题意, 故实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -4]\cup[4, +\infty)$ . 故选 D.  
(2)因为“ $x\in P$ ”是“ $x\in Q$ ”的必要条件, 所以  $Q\subseteq P$ , 所以  $\begin{cases} a-4\leq 1, \\ a+4\geq 3, \end{cases}$  即  $\begin{cases} a\leq 5, \\ a\geq -1, \end{cases}$  所以  $-1\leq a\leq 5$ .

拓展 解:  $x^2-x-2>0$  的解集是  $\{x|x>2 \text{ 或 } x<-1\}$ .  
由  $4x+p<0$ , 得  $x<-\frac{p}{4}$ . 由题意, 得  $-\frac{p}{4}\leq -1$ , 即  $p\geq 4$ .  
所以当  $p\geq 4$  时, “ $4x+p<0$ ”是“ $x^2-x-2>0$ ”的充分条件.

考点三

导入 (1)条件 结论 (2)一定 不一定 (3)充分性 必要性

例 3 证明: 充分性(由  $ac<0$  推证方程有一正根和一负根):  $\therefore ac<0, \therefore$  一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  的判别式  $\Delta=b^2-4ac>0, \therefore$  原方程一定有两不等实根. 不妨设为  $x_1, x_2$ , 则  $x_1x_2=\frac{c}{a}<0, \therefore$  原方程的两根异号, 即一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  有一正根和一负根.  
必要性(由方程有一正根和一负根推证  $ac<0$ ):  
 $\therefore$  一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  有一正根和一负根, 不妨设为  $x_1, x_2, \therefore$  由根与系数的关系得  $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ , 即  $ac<0$ , 此时  $\Delta=b^2-4ac>0$ , 满足原方程有两个不等实根. 综上所述, 一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  有一正根和一负根的充要条件是  $ac<0$ .  
变式 证明: 必要性:  $\therefore \frac{1}{x}<\frac{1}{y}, \therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$ , 即  $\frac{y-x}{xy}<0$ .  
 $\therefore x>y, \therefore y-x<0, \therefore xy>0$ .  
充分性:  $\therefore x>y, xy>0, \therefore \frac{y}{xy}<\frac{x}{xy}$ , 即  $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$ .

【当堂自测】

- B 【解析】 $(2x-1)x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$  或  $x=0$ , 所以充分性不成立; 当  $x=0$  时, 有  $(2x-1)x=0$ , 必要性成立. 故“ $(2x-1)x=0$ ”是“ $x=0$ ”的必要不充分条件. 故选 B.
- C 【解析】联立直线与圆的方程得  $\begin{cases} x-y-k=0, \\ (x-1)^2+y^2=2, \end{cases}$  消去  $y$  得  $2x^2+(-2k-2)x+k^2-1=0$ , 由题意得  $\Delta=(-2k-2)^2-8(k^2-1)>0$ , 整理得  $(k-3)(k+1)<0$ , 解得  $-1< k < 3$ .  $\therefore \{k|0<k<3\}$  是  $\{k|-1<k<3\}$  的一个真子集,  $\therefore$  直线与圆有两个不同的交点的一个充分不必要条件是  $0<k<3$ .
- D 【解析】当数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1<0$  时, 若  $q>1$ , 则数列  $\{a_n\}$  是递减数列; 当数列  $\{a_n\}$  的首项  $a_1<0$  时, 要使数列  $\{a_n\}$  为递增数列, 则  $0<$

$q<1$ . 所以“ $q>1$ ”是“数列  $\{a_n\}$  为递增数列”的既不充分也不必要条件. 故选 D.  
4. (1, 2] 【解析】由  $x^2-4ax+3a^2<0$  (其中  $a>0$ ), 解得  $a<x<3a$ , 即  $p: a<x<3a$ .  $\therefore p$  是  $q$  的必要不充分条件,  $\therefore \begin{cases} a\leq 2, \\ 3<3a, \end{cases}$  解得  $1< a \leq 2$ .  
故实数  $a$  的取值范围是 (1, 2].  
5. 充分不必要 【解析】由已知得  $p: x<-1$  或  $x>1$ , 则  $q$  是  $p$  的充分不必要条件, 所以由互为逆否命题的两个命题等价, 得  $\neg p$  是  $\neg q$  的充分不必要条件.

1.3 简单的逻辑联结词

1.3.1 且 (and) 1.3.2 或 (or) 1.3.3 非 (not)

【预习探究】

知识点一

- $p\wedge q$  “ $p$  且  $q$ ”
- 真命题 假命题

知识点二

- $p\vee q$  “ $p$  或  $q$ ”
- 真命题 假命题

讨论 解: 生活用语中的“或”表示不兼有, 而在数学中所研究的“或”表示可兼有但不一定必须兼有.

思考 必要不充分 【解析】若  $p\vee q$  为真, 则  $p, q$  中至少有一个为真; 若  $p\wedge q$  为真, 则  $p, q$  均为真. 所以“ $p\vee q$  为真”是“ $p\wedge q$  为真”的必要不充分条件.

知识点三

- $\neg p$  “非  $p$ ” “ $p$  的否定”
- 假命题 真命题

讨论 解: 从结构上看, 一个命题的否定只对结论否定, 而它的否命题要对条件和结论都否定; 从真假关系上看, 一个命题和它的否定的真假性一定相反, 而一个命题和它的否命题之间的真假性没有任何关系.

【考点类析】

考点一

例 1 解: (1)这个命题是“ $\neg p$ ”形式的命题, 其中  $p$ : 方程  $2x^2+1=0$  有实根.  
(2)这个命题是“ $p$  或  $q$ ”形式的命题, 其中  $p$ : 12 能被 3 整除,  $q$ : 12 能被 4 整除.  
(3)这个命题是“ $p$  且  $q$ ”形式的命题, 其中  $p$ : 有两个内角是  $45^\circ$  的三角形是等腰三角形,  $q$ : 有两个内角是  $45^\circ$  的三角形是直角三角形.  
例 2 解: (1) $4\in\{2, 3\}$  或  $2\in\{2, 3\}$ .  
(2) $4>4$  且 23 不是偶数.  
(3)5 是 15 的约数.

考点二

导入 真 真 假 假 真 假 假 真 真 假 假 真

例 3 解: (1) $\therefore 1$  是奇数,  $\therefore$  命题  $p$  是真命题.  $\therefore 1$  不是质数,  $\therefore$  命题  $q$  是假命题. 因此  $p\vee q$  为真命题,  $p\wedge q$  为假命题,  $\neg p$  为假命题.  
(2) $\therefore 0\notin\varnothing, \therefore p$  为假命题. 由  $x^2-3x-5<0$ , 得  $\frac{3-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \therefore \{x|x^2-3x-5<0\}=\left\{x\left|\frac{3-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{29}}{2}\right.\right\}\subseteq\mathbf{R}$  成立,  $\therefore q$  为真命题. 故  $p\vee q$  为真命题,  $p\wedge q$  为假命题,  $\neg p$  为真命题.  
(3)易知  $p$  是真命题,  $q$  是真命题,  $\therefore p\vee q$  为真命题,  $p\wedge q$  为真命题,  $\neg p$  为假命题.  
(4)由  $x^2+2x-8<0$ , 得  $(x-2)(x+4)<0, \therefore -4<x<2, \therefore$  不等式  $x^2+2x-8<0$  的解集为  $\{x|-4<x<2\}, \therefore p$  为真命题,  $q$  为假命题.  $\therefore p\vee q$  为真命题,  $p\wedge q$  为假命题,  $\neg p$  为假命题.  
变式 (1)D (2)D 【解析】(1)“ $p$  且  $q$ ”是假命题, 则  $p, q$  中至少有一个为假命题. 非  $p$  是真命题,  $\therefore p$  是假命题.  $\therefore$  命题  $q$  可以是真命题, 也可以是假命题. 故选 D.  
(2)因为命题  $p$ : 对任意的  $x\in\mathbf{R}$ , 总有  $2^x>0$ , 所以根据指数函数的性质得  $p$  是真命题. “ $x>1$ ”不能推出“ $x>2$ ”, 但是“ $x>2$ ”能推出“ $x>1$ ”, 所以“ $x>1$ ”是“ $x>2$ ”的必要不充分条件, 故  $q$  是假命题. 所以  $p\wedge(\neg q)$  为真命题. 故选 D.

考点三

例 4 D 【解析】 $a=b=0$  的否定为  $a, b$  中至少有一个不为 0.

考点四

例 5 解: 若方程  $x^2+mx+1=0$  有两个不等的负实根, 则  $\begin{cases} \Delta=m^2-4>0, \\ -m<0, \end{cases}$  解得  $m>2$ .  
若方程  $4x^2+4(m-2)x+1=0$  无实根, 则  $\Delta=16(m-2)^2-16=16(m^2-4m+3)<0$ , 解得  $1<m<3$ .  
若  $p\vee q$  为真,  $p\wedge q$  为假, 则  $p, q$  一真一假.  
若  $p$  为真,  $q$  为假, 则  $\begin{cases} m\leq 2, \\ 1<m<3, \end{cases}$  解得  $1<m\leq 2$ .  
若  $p$  为假,  $q$  为真, 则  $\begin{cases} m>2, \\ 1<m<3, \end{cases}$  解得  $2<m<3$ .  
综上所述, 实数  $m$  的取值范围是 (1, 2] $\cup$ [3,  $+\infty$ ).  
变式 解: (1)函数  $f(x)$  是增函数, 所以若  $q$  为真, 则  $\begin{cases} f(-1)<0, \\ f(2)>0, \end{cases}$  解得  $-\frac{7}{4}<a<3$ .  
(2)若  $p$  为真, 则  $a^2-4\left(a+\frac{5}{4}\right)<0$ , 即  $a^2-4a-5<0$ , 解得  $-1<a<5$ . 因为  $p\wedge q$  为假,  $p\vee q$  为真, 所以  $p, q$  一真一假.



若  $p$  真  $q$  假, 则  $3 \leq a < 5$ ; 若  $p$  假  $q$  真, 则  $-\frac{7}{4} < a \leq -1$ .

综上,  $a$  的取值范围是  $\left(-\frac{7}{4}, -1\right] \cup [3, 5)$ .

**拓展解:** 易知方程  $x^2 + (a^2 - 5a + 4)x - 1 = 0$  中  $\Delta > 0$ , 设方程  $x^2 + (a^2 - 5a + 4)x - 1 = 0$  的两根为  $x_1, x_2$ , 由题意不妨设  $x_1 < 1, x_2 > 1$ , 所以  $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$ , 即  $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$ . 又因为  $x_1 + x_2 = -(a^2 - 5a + 4), x_1 x_2 = -1$ , 所以  $a^2 - 5a + 4 < 0$ , 所以  $1 < a < 4$ , 即  $p: 1 < a < 4$ . 若函数  $y = -\log_{a^2 - 2a - 2}(x + 2)$  在  $(-2, +\infty)$  上是减函数, 则  $a^2 - 2a - 2 > 1$ , 解得  $a < -1$  或  $a > 3$ , 即  $q: a < -1$  或  $a > 3$ . 因为  $p \vee q$  为真,  $p \wedge q$  为假, 所以  $p, q$  必为一真一假. 当  $p$  真  $q$  假时,  $a$  的取值范围为  $1 < a \leq 3$ ; 当  $p$  假  $q$  真时,  $a$  的取值范围为  $a < -1$  或  $a \geq 4$ . 综上所述,  $a$  的取值范围为  $1 < a \leq 3$  或  $a < -1$  或  $a \geq 4$ .

【当堂自测】

1. A 【解析】“ $xy \neq 0$ ”是指“ $x \neq 0$  且  $y \neq 0$ ”, 故选 A.
2. D 【解析】若  $ab = 0$ , 则  $a = 0$  或  $b = 0$ , 因此命题  $p$  是假命题.  $3 > 2$  成立, 因此命题  $q$  为真命题, 所以“ $p$  或  $q$ ”为真命题, “ $p$  且  $q$ ”为假命题. 故选 D.
3. A 【解析】易知  $p \vee q$  为真, 所以  $p, q$  中至少有一个为真命题, 故选 A.
4. B 【解析】对于 A,  $p: 5 > 2$  是真命题,  $q: 7 > 8$  是假命题, 故  $p \wedge q$  是假命题; 对于 B,  $p: 3 > 4$  是假命题,  $q: 3 < 4$  是真命题, 故  $p \vee q$  是真命题; 对于 C,  $9 \leq 7$  是假命题; 对于 D, 方程  $x^2 - 3x + 4 = 0$  有实根是假命题. 故选 B.
5. D 【解析】命题  $s$  是“ $p \wedge q$ ”形式的命题, ①正确; 命题  $s$  是真命题, ②正确, ④正确; 命题  $\neg s$ : 函数  $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$  不是周期函数或不是奇函数, ③不正确.
6. B 【解析】若方程  $x^2 + 2x + a = 0$  有实数根, 则  $\Delta = 4 - 4a \geq 0$ , 解得  $a \leq 1$ . 若函数  $f(x) = (a^2 - a)x$  是增函数, 则  $a^2 - a > 0$ , 解得  $a < 0$  或  $a > 1$ .  $\therefore p \wedge q$  为假命题,  $p \vee q$  为真命题.  $\therefore p, q$  中一真一假. ①当  $p$  真  $q$  假时,  $0 \leq a \leq 1$ ; ②当  $p$  假  $q$  真时,  $a > 1$ . 由 ①②得, 所求  $a$  的取值范围是  $a \geq 0$ .

## 1.4 全称量词与存在量词

### 1.4.1 全称量词 1.4.2 存在量词

【预习探究】

知识点一

1. “ $\forall$ ” 全称命题 2.  $\forall x \in M, p(x)$  “对任意  $x$  属于  $M$ , 有  $p(x)$  成立”

知识点二

1. “ $\exists$ ” 特称命题 2.  $\exists x_0 \in M, p(x_0)$  “存在  $M$  中的元素  $x_0$ , 使  $p(x_0)$  成立”  
**结论** (1)  $\forall \exists$  (2)  $\forall x \in M, p(x) \quad \exists x_0 \in M, p(x_0)$   
**思考** ②③⑥ 【解析】对于①, 全称量词可以省略, 存在量词不可以省略, 故①中说法错误; 对于②, 有存在量词“有的”, 故②中说法正确; 对于③, 结合全称量词和存在量词的含义可知③中说法正确; 对于④, “有些”“某个”“有的”等短语是存在量词, 故④中说法错误; 对于⑤, “菱形的对角线互相垂直”是省略全称量词的全称命题, 故⑤中说法错误; 对于⑥, 含有全称量词“任何一个”, 故⑥中说法正确.

【考点类析】

考点一

- 例 1 (1)B (2)D 【解析】(1) 只有②③含有全称量词. 故选 B.
- (2) 只有选项 D 含有存在量词. 故选 D.
- 例 2 解: 命题(1)完整的表述应为“所有梯形的对角线相等”, 很显然为全称命题. 命题(2)为特称命题. 命题(3)完整的表述为“所有的二次函数都存在零点”, 故为全称命题. 命题(4)是命题“过任意两条平行线有且只有一个平面”的简写, 故为全称命题.

考点二

- 例 3 C 【解析】对于①, 这是全称命题,  $\therefore \Delta = 9 - 32 = -23 < 0$ ,  $\therefore \forall x \in \mathbf{R}, 2x^2 - 3x + 4 > 0$  是真命题; 对于②, 这是全称命题, 当  $x = -1$  时,  $2x + 1 < 0$ , 故该命题为假命题; 对于③, 这是特称命题, 当  $x_0 = 0$  时,  $x_0^2 \leq x_0$  成立, 该命题为真命题; 对于④, 这是特称命题, 当  $x_0 = 1$  时,  $x_0$  为 29 的约数, 该命题为真命题. 故选 C.

考点三

- 导入 (1)  $a > f(x)_{\max} \quad a > f(x)_{\min}$
- 例 4 解: (1) ①证明: 当  $a = -3$  时,  $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$ , 因为  $\Delta = 36 - 4 \times (-9) \times (-1) = 0$ , 所以对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x) \leq 0$ . ②因为  $f(x) \leq 4x$  恒成立, 所以  $3ax^2 + 2x - 1 \leq 0$  恒成立, 所以  $\begin{cases} a < 0, \\ \Delta \leq 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} a < 0, \\ 4 + 12a \leq 0, \end{cases}$  解得  $a \leq -\frac{1}{3}$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ .

- (2) 因为  $f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4, x \in [0, 3]$ , 所以  $f(x)_{\min} = f(1) = 4, f(x)_{\max} = f(3) = 8$ . 若  $m > f(x)$  有解, 则只需  $m > f(x)_{\min}$ , 即  $m > 4$ .  
**变式解:** 由题意得,  $\forall x \in \mathbf{R}, m \leq \sin x + \cos x$  恒成立, 因为  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$ , 所以  $m \leq -\sqrt{2}$ . 由题意得,  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,

$x^2 + mx + 1 > 0$  恒成立, 所以  $\Delta = m^2 - 4 < 0$ , 所以  $-2 < m < 2$ . 故  $m$  的取值范围为  $-2 < m \leq -\sqrt{2}$ .

【当堂自测】

1. A
2. B 【解析】根据全称命题与特称命题的定义, 易知 B, D 中的命题均是特称命题.  $\therefore$  “至少有一个实数  $x_0$ , 使  $x_0^2 \leq 0$ ”是真命题, “存在一个负数  $x_0$ , 使  $\frac{1}{x_0} > 2$ ”是假命题, 故选 B.
3. B 【解析】当  $x = 1$  时,  $(x - 1)^2 = 0$ , 所以命题“ $\forall x \in \mathbf{N}^+, (x - 1)^2 > 0$ ”为假命题. 易知 A, C, D 中的命题均为真命题. 故选 B.
4. A 【解析】空间中过直线外一点有无数条直线与该直线垂直, 因此 A 为假命题.
5. ①②③ ④ 【解析】①可表述为“每一个正方形的四条边相等”, 是全称命题; ②可表述为“凡是有两个角相等的三角形都是等腰三角形”, 是全称命题; ③可表述为“所有正数的平方根不等于 0”, 是全称命题; ④是特称命题.
6.  $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$  【解析】依题意有,  $0 < a^2 - 1 < 1$ , 即  $\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ a^2 - 1 < 1, \end{cases}$  即  $\begin{cases} a < -1 \text{ 或 } a > 1, \\ -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \end{cases}$  即  $-\sqrt{2} < a < -1$  或  $1 < a < \sqrt{2}$ .

## 1.4.3 含有一个量词的命题的否定

【预习探究】

知识点一

- $\exists x_0 \in M, \neg p(x_0) \quad \forall x \in M, \neg p(x)$
- 知识点二  
**思考** (1)  $\checkmark$  (2)  $\checkmark$  (3)  $\times$   
**【解析】** (1) 命题  $p$  与  $\neg p$  互为否定.  
(2) 命题  $p$  与其否定  $\neg p$  一真一假.  
(3) 特称命题的否定是全称命题, 只是对“ $p(x)$ ”进行否定, 而将“存在量词”改为“全称量词”, 不能将其理解为“同时否定”.

【考点类析】

考点一

- 例 1 解: (1)  $\neg p$ : 存在一个能被 3 整除的整数不是奇数.  
(2)  $\neg p$ : 存在一个四边形, 它的四个顶点不共圆.  
(3)  $\neg p$ : 存在  $x_0 \in \mathbf{Z}, x_0^2$  的个位数字等于 3.  
**变式解:** (1) 三个给定产品中至少有一个不是次品.  
(2) 数列 1, 2, 3, 4, 5 中至少有一项不是偶数.  
(3) 存在非零实数  $a, b$ , 使方程  $ax = b$  的解不唯一或无解.  
(4) 存在被 5 整除的整数, 其末位数字不是 0.

考点二

- 例 2 解: (1)  $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 2 > 0, \neg p$  是真命题.  
(2)  $\neg q$ : 所有的三角形都不是等边三角形,  $\neg q$  是假命题.  
(3)  $\neg r$ : 每一个质数都不含有三个正因数,  $\neg r$  是真命题.  
**变式解:** (1) 命题的否定: 每个二次函数的图像都开口向下.  
(2) 命题的否定: 任何一个平行四边形的对边都平行.  
(3) 命题的否定: 每一个平行四边形都不是菱形.

考点三

- 例 3 解: (1) 由题易知  $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + ax + 2 \geq 0$  为真命题, 则方程  $x^2 + ax + 2 = 0$  的判别式  $\Delta = a^2 - 8 \leq 0$ , 即  $-2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$ , 所以实数  $a$  的取值范围为  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ .

- (2) 若命题  $q$  为真命题, 则关于  $x$  的方程  $x^2 - ax + 1 = 0$  在  $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$  上有解, 当  $x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right]$  时, 由  $x^2 - ax + 1 = 0$ , 得  $a = x + \frac{1}{x}$ , 因为  $x + \frac{1}{x} \leq -2$ , 当且仅当  $x = -1$  时取等号, 且  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  在  $[-3, -1]$  上单调递增, 在  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right]$  上单调递减,  $f(-3) = -\frac{10}{3}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$ , 所以当  $x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right]$  时  $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{10}{3}, -2\right]$ , 所以实数  $a$  的取值范围为  $\left[-\frac{10}{3}, -2\right]$ .
- (3) 由题意知,  $\neg p, q$  一真一假.

- 若  $\neg p$  真  $q$  假, 则  $\begin{cases} -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}, \\ a > -2 \text{ 或 } a < -\frac{10}{3}, \end{cases}$  得  $-2 < a \leq 2\sqrt{2}$ .  
若  $\neg p$  假  $q$  真, 则  $\begin{cases} a > 2\sqrt{2} \text{ 或 } a < -2\sqrt{2}, \\ -\frac{10}{3} \leq a \leq -2, \end{cases}$  得  $-\frac{10}{3} \leq a < -2\sqrt{2}$ .

- 所以实数  $a$  的取值范围为  $\left[-\frac{10}{3}, -2\sqrt{2}\right) \cup (-2, 2\sqrt{2}]$ .  
**变式解:** 若  $y = a^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 则  $a > 1$ . 若不等式  $ax^2 - ax + 1 > 0$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则  $\Delta < 0$ , 即  $a^2 - 4a < 0$ , 所以  $0 < a < 4$ . 又命题  $p \wedge q$  为假,  $p \vee q$  为真, 所以  $p, q$  中一个为真, 一个为假. ①若  $p$  真  $q$  假, 则  $a \geq 4$ ; ②若  $p$  假  $q$  真, 则  $0 < a \leq 1$ . 所以  $a$  的取值范围为  $(0, 1] \cup [4, +\infty)$ .

【当堂自测】

1. C 【解析】命题“对任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ”的否定是“存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $x_0^2 - 2x_0 + 1 < 0$ ”. 故选 C.

2. B 【解析】命题  $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, 2x_0 + 1 \leq 0$  的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2x + 1 > 0$ ”, 故选 B.
3. 存在一个四面体没有内切球 【解析】命题“任意四面体均有内切球”的否定是“存在一个四面体没有内切球”.
4.  $p \vee q, \neg p$  【解析】 $\therefore x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \therefore p$  是假命题.

- 当  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  时,  $\sin x_0 + \cos x_0 = \sqrt{2}$ , 故  $q$  是真命题. 因此  $p \vee q$  是真命题,  $\neg p$  是真命题.
5.  $(-\infty, -1] \cup [6, +\infty)$  【解析】由题意知,  $\neg p: \forall m \in [-1, 1], a^2 - 5a - 3 \geq m + 2$  是真命题, 由  $m \in [-1, 1]$ , 得  $1 \leq m + 2 \leq 3, \therefore a^2 - 5a - 3 \geq 3$ , 即  $a^2 - 5a - 6 \geq 0, \therefore a \geq 6$  或  $a \leq -1$ .

## 本章总结提升

【单元回眸】

知识辨析

1.  $\checkmark$  2.  $\checkmark$  3.  $\times$  4.  $\times$  5.  $\checkmark$  6.  $\checkmark$   
7.  $\times$  8.  $\times$  9.  $\times$  10.  $\times$

【整合创新】

题型一

- 例 1 (1)A (2)B 【解析】(1) 对于 A, 若  $x > |y|$ , 又  $|y| \geq y$ , 所以  $x > y$ , 所以命题“若  $x > y$ , 则  $x > |y|$ ”的逆命题“若  $x > |y|$ , 则  $x > y$ ”是真命题; 对于 B, 命题“若  $x > 1$ , 则  $x^2 > 1$ ”的否命题为“若  $x \leq 1$ , 则  $x^2 \leq 1$ ”, 该命题为假命题; 对于 C, 命题“若  $x = 1$ , 则  $x^2 + x - 2 = 0$ ”的否命题是“若  $x \neq 1$ , 则  $x^2 + x - 2 \neq 0$ ”, 该命题为假命题; 对于 D, 命题“若  $x^2 > 0$ , 则  $x > 1$ ”是假命题, 故其逆否命题也为假命题. 故选 A.  
(2) “若  $xy = 0$ , 则  $x = 0$ ”的否命题为“若  $xy \neq 0$ , 则  $x \neq 0$ ”, A 中说法错误; 对于 B, 原命题的逆命题是“若  $x, y$  互为相反数, 则  $x + y = 0$ ”, 是真命题, B 中说法正确; “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $2x_0^2 - 1 < 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $2x^2 - 1 \geq 0$ ”, C 中说法错误; “若  $\cos x = \cos y$ , 则  $x = y$ ”为假命题, 所以其逆否命题也为假命题, D 中说法错误. 故选 B.

- 变式** (1)D (2)①④ 【解析】(1) 命题“若  $-1 < x < 1$ , 则  $x^2 < 1$ ”的逆否命题是“若  $x^2 \geq 1$ , 则  $x \geq 1$  或  $x \leq -1$ ”. 故选 D.  
(2) 对于①,  $f(1) = -3, f(2) = \ln 2 > 0, \therefore f(1) \cdot f(2) < 0$ , 且  $f(x)$  在  $(1, 2)$  上是增函数,  $\therefore$  函数  $f(x)$  只有一个零点且在区间  $(1, 2)$  内, 故①是真命题; 对于②, 关于  $x$  的不等式  $ax^2 + 2ax + 1 > 0$  恒成立, 则  $a = 0$  或  $\begin{cases} a > 0, \\ 0 \leq \Delta < 1, \end{cases}$  故②是假命题; 对于③,  $\therefore |\sin x| \leq |x|$ , 当且仅当  $x = 0$  时取等号,  $\therefore$  函数  $y = x$  的图像与函数  $y = \sin x$  的图像只有一个交点, 故③是假命题; 对于④, 设  $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \therefore t \in [1, \sqrt{2}], y = \sin x \cos x + \sin x + \cos x =$

- $\cos x = \frac{t^2 - 1}{2} + t = \frac{1}{2}(t + 1)^2 - 1, \therefore$  最小值是 1, 故④是真命题.

题型二

- 例 2 (1)C (2)B (3)B 【解析】(1) 命题  $p$ : 负数的立方都是负数, 是真命题. 命题  $q$ : 正数的对数都是负数, 是假命题, 例如  $\lg 10 = 1$ . 结合选项知  $(\neg p) \vee (\neg q)$  是真命题. 故选 C.  
(2) 易知若  $p \vee q$  是假命题, 则  $p, q$  均为假命题.

- (3) 依题意, 函数  $y = \frac{1}{x}$  在定义域上不具有单调性, 所以  $p$  是假命题. 命题  $q$ : 数列  $a, a^2, a^3, \dots$  是等比数列, 当  $a = 0$  时, 不成立. 所以  $q$  是假命题, 所以  $p \vee q$  为假,  $p \wedge q$  为假,  $\neg p$  为真. 故选 B.

- 变式解:** 若方程  $x^2 + 2mx + 1 = 0$  有两个不等正根, 则  $\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4 > 0, \\ -2m > 0, \end{cases}$  得  $m < -1$ . 若方程  $x^2 + 2(m - 2)x - 3m + 10 = 0$  无实根, 则  $\Delta_1 = 4(m - 2)^2 - 4(-3m + 10) < 0$ , 得  $-2 < m < 3$ . 由  $p \vee q$  为真,  $p \wedge q$  为假, 可知命题  $p, q$  一真一假, 当  $p$  真  $q$  假时,  $\begin{cases} m < -1, \\ m \geq 3 \text{ 或 } m \leq -2, \end{cases}$  此时  $m \leq -2$ ; 当  $p$  假  $q$  真时,  $\begin{cases} m \geq -1, \\ -2 < m < 3, \end{cases}$  此时  $-1 \leq m < 3$ . 综上, 实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -2] \cup (-1, 3)$ .

题型三

- 例 3 (1)A (2)A (3)C 【解析】(1) 当  $\left|\theta - \frac{\pi}{12}\right| < \frac{\pi}{12}$  时, 可解得  $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ , 即  $0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$ , 故充分性成立; 由  $\sin \theta < \frac{1}{2}$  可取  $\theta = 0$ , 但此时不满足条件  $\left|\theta - \frac{\pi}{12}\right| < \frac{\pi}{12}$ , 故必要性不成立. 故选 A.

- (2) 若存在负数  $\lambda$ , 使得  $m = \lambda n$ , 则  $m \cdot n = \lambda n \cdot n = \lambda n^2 < 0$  成立, 所以为充分条件; 当“ $m \cdot n < 0$ ”时,  $m$  与  $n$  不一定共线, 所以“存在负数  $\lambda$ , 使得  $m = \lambda n$ ”不一定成立, 所以为不必要条件. 综上所述, “存在负数  $\lambda$ , 使得  $m = \lambda n$ ”是“ $m \cdot n < 0$ ”的充分而不必要条件, 故选 A.

- (3) 由题意, 得  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ , 则  $S_1 + S_6 - 2S_3 = (4a_1 + 6d) + (6a_1 + 15d) - 2(5a_1 + 10d) = d$ . 因此当  $d > 0$  时,  $S_1 + S_6 - 2S_3 > 0$ , 则  $S_1 + S_6 > 2S_3$ ; 当  $S_1 + S_6 > 2S_3$  时,  $S_1 + S_6 - 2S_3 > 0$ , 则  $d > 0$ . 所以“ $d > 0$ ”是“ $S_1 + S_6 > 2S_3$ ”的充分必要条件. 因此选 C.

- 例 4 A 【解析】由直线  $l: y = kx + 1$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  相交于 A, B

两点, 易知  $k \neq 0$ , 且圆心  $O$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} < 1$ , 所以

$|AB| = 2\sqrt{1-d^2} = 2\sqrt{1-\frac{1}{1+k^2}} = 2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}$ . 若  $k = 1$ , 则  $|AB| = \sqrt{2}, d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $\triangle OAB$  的面积为  $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ . 反过来, 若  $\triangle OAB$  的面积为  $\frac{1}{2}$ , 则  $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \times 2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}} = \frac{\sqrt{k^2}}{1+k^2} = \frac{1}{2}$ , 解得  $k = \pm 1$ . 故“ $k = 1$ ”是“ $\triangle OAB$  的面积为  $\frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件.

**变式解:** 由  $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$ , 得  $1 - m \leq x \leq 1 + m$ . 由  $\begin{cases} 1 - \frac{x-1}{3} \leq 2, \\ 1 - m \leq -2, \end{cases}$  得  $-2 \leq x \leq 10$ . 由  $\neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件知,  $p$  是  $q$  的充分不必要条件,  $\therefore \begin{cases} m > 0, \\ 1 - m \leq -2, \end{cases}$  且不等式组中的等号不能同时成立, 得  $m \geq 9$ .

题型四

- 例 5 (1)B (2)D (3)B 【解析】(1) 因为  $x > 0$  时,  $x + 1 > 1$ , 所以  $\ln(x + 1) > 0$ , 所以  $p$  为真命题. 若  $a > b$ , 可取  $a = 1, b = -2$ , 此时  $a^2 < b^2$ , 所以  $q$  为假命题, 所以  $\neg q$  为真命题. 所以  $p \wedge (\neg q)$  为真命题, 故选 B.  
(2) 由全称命题的否定是特称命题. 特称命题的否定是全称命题得, 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}^+$ , 使得  $n \geq x^2$ ”的否定形式是“ $\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^+$ , 都有  $n < x^2$ ”.

- (3) 对于 A, 命题“若  $x^2 > 4$ , 则  $x > 2$ ”的否命题为“若  $x^2 \leq 4$ , 则  $x \leq 2$ ”, 故 A 中说法错误; 对于 B, 命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 > 1$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 1$ ”, 故 B 中说法正确; 对于 C,  $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > 0$  恒成立, 故 C 中说法错误; 对于 D, 易知“ $\sin x = \frac{1}{2}$ ”是“ $x = \frac{\pi}{6}$ ”的必要不充分条件, 所以

“ $x \neq \frac{\pi}{6}$ ”是“ $\sin x \neq \frac{1}{2}$ ”的必要不充分条件, 故 D 中说法错误. 故选 B.

**变式解:** 若  $p$  为真, 则对  $\forall x \in \mathbf{R}, 9^t - 3^t - a \geq 0$  恒成立, 令  $t = 3^t (t > 0)$ , 则  $t^2 - t - a \geq 0 (t > 0)$  恒成立, 所以  $a \leq t^2 - t (t > 0)$  恒成立, 所以当  $t > 0$  时,  $a \leq (t^2 - t)_{\min} = -\frac{1}{4}$ , 所以  $a \leq -\frac{1}{4}$ .

若  $q$  为真, 则  $x^2 + (2a + 1)x + a^2 + 2 \leq 0$  有解, 则  $\Delta = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + 2) \geq 0$ , 所以  $a \geq \frac{7}{4}$ .

5. 因此,到两坐标轴的距离的积等于 5 的点的轨迹方程不是  $xy=5$ .  
(3)第二、四象限两坐标轴夹角平分线上的点的坐标都满足方程  $x+y=0$ ;反之,以方程  $x+y=0$  的解为坐标的点都在第二、四象限两坐标轴夹角的平分线上.因此,第二、四象限两坐标轴夹角平分线上的点的轨迹方程是  $x+y=0$ .

考点二

【导入】(1) $f(x_0,y_0)=0$   $f(x_0,y_0) \neq 0$  (2) $f(x_0,y_0)=0$   $f(x_0,y_0) \neq 0$

【例 3 解】(1) $\because 1^2 + (-2-1)^2 = 10, (\sqrt{2})^2 + (3-1)^2 = 6 \neq 10$ ,  
点  $P(1,-2)$  在方程  $x^2 + (y-1)^2 = 10$  表示的曲线上,  
点  $Q(\sqrt{2},3)$  不在方程  $x^2 + (y-1)^2 = 10$  表示的曲线上.

(2) $\because$  点  $M\left(\frac{m}{2}, -m\right)$  在方程  $x^2 + (y-1)^2 = 10$  表示的曲线上,

$\therefore \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (-m-1)^2 = 10$ ,解得  $m=2$  或  $m=-\frac{18}{5}$ .

【变式 解】 $\because$  曲线  $y^2 - xy + 2x + k = 0$  过点  $(a,-a)$ ,  $\therefore a^2 + a^2 + 2a + k = 0$ ,  $\therefore k = -2a^2 - 2a = -2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ ,  $\therefore k \leq \frac{1}{2}$ ,  $\therefore k$  的取值

范围是  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ .

【拓展 证明】因为  $P(x_0,y_0)$  是两曲线的交点,所以点  $P$  的坐标既满足方程  $f(x,y)=0$ ,又满足方程  $g(x,y)=0$ ,即  $f(x_0,y_0)=0$  且  $g(x_0,y_0)=0$ ,故  $f(x_0,y_0) + \lambda g(x_0,y_0)=0$ ,所以  $P(x_0,y_0)$  的坐标是方程  $f(x,y) + \lambda g(x,y)=0$  的解,故点  $P$  在曲线  $f(x,y) + \lambda g(x,y)=0$  上.

考点三

【导入】(1)直接法 定义法 代入法 自变量  
(2)①曲线上任意一点  $M$  的坐标 ②  $P=\{M|p(M)\}$   
③列出方程  $f(x,y)=0$  ④最简形式 ⑤都在曲线上

【例 4 解】建立平面直角坐标系,使  $x$  轴与  $l$  重合,点  $A$  在  $y$  轴上(如图所示),则  $A(0,3)$ .  
设  $\triangle ABC$  的外心为  $P(x,y)$ ,因为点  $P$  在线段  $BC$  的垂直平分线上,所以不妨令  $B(x+2,0)$ ,  $C(x-2,0)$ .又点  $P$  在线段  $AB$  的垂直平分线上,所以  $|PA|=|PB|$ ,即  $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{2^2 + y^2}$ ,化简得  $x^2 - 6y + 5 = 0$ .  
于是  $\triangle ABC$  外心的轨迹方程为  $x^2 - 6y + 5 = 0$ .

【变式 解】设点  $P(x,y)$ ,由  $M(-1,0), N(1,0)$ ,得  $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM} = (2, 0)$ ,  $\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP} = (-1-x, -y)$ ,  $\overrightarrow{PN} = -\overrightarrow{NP} = (1-x, -y)$ ,  $\therefore \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = 2(x+1)$ ,  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = x^2 + y^2 - 1$ ,  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 2(1-x)$ .  
由  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ ,  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP}$  成公差小于零的等差数列,得

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = -\frac{1}{2}[2(x+1) + 2(1-x)], \\ 2(1-x) - 2(x+1) < 0, \end{cases}$   
即  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ x > 0, \end{cases}$   $\therefore$  点  $P$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = 3(x > 0)$ .

【拓展 解】方法一(直接法):  
如图所示,连接  $QC$ ,因为  $Q$  是  $OP$  的中点,所以  $\angle OQC = 90^\circ$ . 设  $Q(x,y)$ ,由题意,得  $|OQ|^2 + |QC|^2 = |OC|^2$ ,即  $x^2 + y^2 + x^2 + (y-3)^2 = 9$ ,所以

$OP$  的中点  $Q$  的轨迹方程为  $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} (y \neq 0)$ .

方法二(定义法):  
如图所示,连接  $QC$ ,因为  $Q$  是  $OP$  的中点,所以  $\angle OQC = 90^\circ$ ,则  $Q$  在以  $OC$  为直径的圆上,

故  $Q$  点的轨迹方程为  $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} (y \neq 0)$ .

方法三(代入法):  
设  $P(x_1,y_1), Q(x,y)$ ,易知  $y \neq 0$ ,

由题意得  $\begin{cases} x = \frac{x_1}{2}, \\ y = \frac{y_1}{2}, \end{cases}$  即  $\begin{cases} x_1 = 2x, \\ y_1 = 2y. \end{cases}$  又因为  $x_1^2 + (y_1 - 3)^2 = 9$ ,所以  $4x^2 +$

$4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$ ,即  $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} (y \neq 0)$ .

【当堂自测】

- 【解析】曲线  $C$  上点的坐标都是方程  $f(x,y)=0$  的解,但以方程  $f(x,y)=0$  的解为坐标的点不一定都在曲线  $C$  上,故 A、C、D 都为假命题,B 为真命题.
- 【解析】 $\because 4x^2 - y^2 + 6x - 3y = (2x+y)(2x-y) + 3(2x-y) = (2x-y)(2x+y+3)=0$ ,  $\therefore$  原方程表示的图形是直线  $2x-y=0$  和直线  $2x+y+3=0$ .
- 【解析】设  $P$  点的坐标为  $(x,y)$ ,则  $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ ,整理得  $8x^2 + 8y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ . 故选 C.
- 【解析】设动点  $C$  的坐标为  $(x_0,y_0)$ ,点  $P$  的坐标为  $(x,y)$ ,则  $x = \frac{x_0+3}{2}, y = \frac{y_0+0}{2}$ ,即  $x_0 = 2x-3, y_0 = 2y$ . 又动点  $C(x_0,y_0)$  在曲线  $x^2 + y^2 = 1$  上,  $\therefore (2x-3)^2 + 4y^2 = 1$  即为所求.
- $x^2 + y^2 - 3x = 0 \left(\frac{5}{3} < x \leq 3\right)$  【解析】设  $M(x,y)$ ,圆  $x^2 + y^2 - 6x +$

$5=0$  的圆心为  $C(3,0)$ ,半径为 2,则  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$ ,即  $(x,y) \cdot (x-3,$

$y) = 0$ ,  $\therefore x^2 + y^2 - 3x = 0$ . 由  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} x = \frac{5}{3}, \\ y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$

$\therefore$  所求轨迹方程为  $x^2 + y^2 - 3x = 0 \left(\frac{5}{3} < x \leq 3\right)$ .

## 2.2 椭圆

### 2.2.1 椭圆及其标准方程

【预习探究】

知识点一

- 和 大于  $|F_1F_2|$  椭圆的焦点 椭圆的焦距
- $2a$   $2c$   $|MF_1| + |MF_2| = 2a (2a > 2c)$

探究 椭圆 线段 不存在

知识点二

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$   $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$   $(-c, 0), (c, 0)$   
 $(0, -c), (0, c)$   $a^2 = b^2 + c^2$

【讨论 解】焦点在哪个坐标轴上,哪一个变量对应的分母就大,即  $x^2$  对应的分母大,焦点就在  $x$  轴上,  $y^2$  对应的分母大,焦点就在  $y$  轴上.  
 $a, b, c$  三个参数的关系:椭圆的标准方程中,  $a$  表示椭圆上的点  $M$  到两焦点的距离的和的一半,可借助图形帮助记忆,  $a, b, c$  (都是正数)恰构成一个直角三角形的三条边,  $a$  是斜边,所以  $a > b, a > c$ , 且  $a^2 = b^2 + c^2$  (如图所示).

【考点类析】

考点一

【导入】(1)椭圆 (2)  $2a$

【例 1】(1)B (2)B 【解析】(1)由椭圆的定义得  $|PF_1| + |PF_2| = 8$ .  
 $\because |PF_1| - |PF_2| = 2$ ,  $\therefore |PF_1| = 5, |PF_2| = 3$ , 又  $|F_1F_2| = 2c = 4$ , 故  $\triangle PF_1F_2$  为直角三角形.

(2)若方程  $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{6-m} = 1$  表示椭圆,则  $\begin{cases} m-2 > 0, \\ 6-m > 0, \\ m-2 \neq 6-m, \end{cases}$  解得  $2 <$

$m < 6$  且  $m \neq 4$ ,所以“ $2 < m < 6$ ”是“方程  $\frac{x^2}{m-2} + \frac{y^2}{6-m} = 1$  表示椭圆”的必要不充分条件,故选 B.

【变式】(1)A (2)  $4a$  【解析】(1) $\because |AB| + |AC| = 8 - |BC| = 6 > |BC| = 2$ ,  $\therefore$  顶点  $A$  在以  $B, C$  为焦点的椭圆上,设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,则  $a = 3, b = 2\sqrt{2}$ . 又  $\because A, B, C$  三点不共线,  $\therefore$  顶点

$A$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1 (x \neq \pm 3)$ .

(2) $\because |AF_1| + |AF_2| = 2a, |BF_1| + |BF_2| = 2a$ ,  $\therefore \triangle ABF_2$  的周长为  $|AB| + |BF_2| + |AF_2| = |AF_1| + |BF_1| + |AF_2| + |BF_2| = 4a$ .

考点二

【导入】分类讨论 一般形式

【例 2 解】(1) $\because$  椭圆的焦点在  $y$  轴上,  $\therefore$  设它的标准方程为  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ .  $\because 2a = 26, \therefore a = 13$ . 又  $c = 5, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 144$ ,  
 $\therefore$  所求椭圆方程为  $\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{144} = 1$ .

(2)设椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $\because 2c = 2, \therefore a^2 = b^2 +$

$4$ , 又椭圆经过点  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ,  $\therefore \frac{1}{b^2+1} + \frac{9}{4b^2} = 1$ ,得  $b^2 = 3, \therefore a^2 = 4$ ,

$\therefore$  椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

【变式 解】(1)方法一(分类讨论法):若焦点在  $x$  轴上,则设椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ . 由已知条件得  $\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{14}{4b^2} = 1, \end{cases}$  解得

$\begin{cases} a^2 = 8, \\ b^2 = 4, \end{cases}$  所以所求椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

若焦点在  $y$  轴上,则设椭圆的标准方程为  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ .

由已知条件得  $\begin{cases} \frac{4}{b^2} + \frac{2}{a^2} = 1, \\ \frac{1}{b^2} + \frac{14}{4a^2} = 1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} b^2 = 8, \\ a^2 = 4, \end{cases}$  则  $a^2 < b^2$ , 与  $a > b > 0$  矛盾,舍去. 综上,所求椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

方法二(一般方程法):设椭圆的一般方程为  $Ax^2 + By^2 = 1 (A > 0, B >$

$0, A \neq B)$ . 将  $(2, -\sqrt{2}), \left(-1, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$  代入,得  $\begin{cases} 4A + 2B = 1, \\ A + \frac{14}{4}B = 1, \end{cases}$  解得

$\begin{cases} A = \frac{1}{8}, \\ B = \frac{1}{4}, \end{cases}$  所以所求椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2)因为所求椭圆与椭圆  $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$  的焦点相同,所以所求椭圆的焦点在  $y$  轴上,且  $c^2 = 25 - 9 = 16$ . 设它的标准方程为  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ . 因为  $c^2 = 16$ ,所以  $a^2 - b^2 = 16$  ①.

又点  $(\sqrt{3}, -\sqrt{5})$  在椭圆上,所以  $\frac{(-\sqrt{5})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$ ,即  $\frac{5}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1$  ②.

由①②得  $b^2 = 4, a^2 = 20$ ,所以所求椭圆的标准方程为  $\frac{y^2}{20} + \frac{x^2}{4} = 1$ .

考点三

【导入】(1)定义法 (2)直接法 (3)相关点法

【例 3 解】以两个定点  $A, B$  所在的直线为  $x$  轴,线段  $AB$  的垂直平分线为  $y$  轴,建立平面直角坐标系(如图所示). 由于  $|AB| = 2a$ ,所以不妨设  $A(-a, 0), B(a, 0)$ ,并设动点  $M(x, y)$ . 因为  $|MA| : |MB| = 2 : 1$ ,所以  $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} : \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2 : 1$ ,

即  $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ ,化简得  $\left(x - \frac{5a}{3}\right)^2 + y^2 =$

$\frac{16}{9}a^2$ ,所以所求动点  $M$  的轨迹方程为  $\left(x - \frac{5a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}a^2$ .

【变式 解】设  $M(x, y), P(x_1, y_1)$ .  $\because M$  为线段  $AP$  的中点,  $\therefore \begin{cases} x_1 = 2x - 6, \\ y_1 = 2y - 2. \end{cases}$

又  $\because \frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1$ ,  $\therefore$  点  $M$  的轨迹方程为  $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = \frac{1}{4}$ .

【当堂自测】

- D 【解析】 $\because a^2 = b^2 + c^2, \therefore b^2 = 13 - 12 = 1$ ,故选 D.
- D 【解析】设椭圆的两个焦点为  $F_1, F_2$ ,不妨令  $|PF_1| = 2$ .  $\because a = 5, \therefore |PF_2| = 2a - |PF_1| = 2 \times 5 - 2 = 8$ .

3. D 【解析】 $\because$  方程  $x^2 + ky^2 = 2$ ,即  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{2}{k}} = 1$  表示焦点在  $y$  轴上的椭圆,  $\therefore \frac{2}{k} > 2$ ,故  $0 < k < 1$ . 故选 D.

4. B 【解析】由椭圆方程,得  $a = 3, b = 2, c = \sqrt{5}$ .  $\because |PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$  且  $|PF_1| : |PF_2| = 2 : 1, \therefore |PF_1| = 4, |PF_2| = 2, \therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2, \therefore \triangle PF_1F_2$  是直角三角形,故  $\triangle F_1PF_2$  的面积为  $\frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ .

5. C 【解析】由椭圆  $\frac{x^2}{8-m} + \frac{y^2}{m-2} = 1$  的长轴在  $y$  轴上,得  $a^2 = m - 2, b^2 = 8 - m, c^2 = a^2 - b^2 = 2m - 10$ . 由焦距为 4,即  $2c = 4$ ,得  $c = 2$ ,即有  $2m - 10 = 4$ ,解得  $m = 7$ .

## 2.2.2 椭圆的简单几何性质

### 第 1 课时 椭圆的简单几何特征

【预习探究】

知识点

- $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$   $F_1(0, -c), F_2(0, c)$   $|x| \leq a, |y| \leq b$   
 $|x| \leq b, |y| \leq a$   $x$  轴、 $y$  轴和原点  $(\pm a, 0), (0, \pm b)$   $(0, \pm a),$   
 $(\pm b, 0)$   $\frac{c}{a}$
- (2)扁 圆

【思考】(1) $\times$  (2) $\times$  (3) $\times$  【解析】(1) $a$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的长半轴长.  
(2)椭圆的离心率反映了椭圆的扁圆程度,离心率越大,椭圆就越扁;离心率越小,椭圆就越圆.  
(3)因为  $2a = 10, 2b = 8$ ,所以  $a = 5, b = 4$ . 当焦点在  $x$  轴上时,椭圆的方程为  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ;当焦点在  $y$  轴上时,椭圆的方程为  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{25} = 1$ .

【探究】B 【解析】椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ,显然焦点在  $y$  轴上,  $a = 5, b = 3, c = 4, \therefore$  长轴长为 10,短轴长为 6,  $e = \frac{4}{5}$ .

【考点类析】

考点一

【导入 解】范围:  $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$ . 对称性:椭圆关于  $x$  轴、 $y$  轴、原点都对称.  
特殊点:顶点  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$ .

【例 1 解】(1)由椭圆  $C_1: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ,可得其长半轴长为 10,短半轴

长为 8,焦点坐标为  $(6, 0), (-6, 0)$ ,离心率  $e = \frac{3}{5}$ .

(2)椭圆  $C_2: \frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$ . 性质如下:

①范围:  $-8 \leq x \leq 8, -10 \leq y \leq 10$ ; ②对称性:关于  $x$  轴、 $y$  轴、原点对称; ③顶点:长轴端点  $(0, 10), (0, -10)$ ,短轴端点  $(-8, 0), (8, 0)$ ; ④焦点:  $(0, 6), (0, -6)$ ; ⑤离心率:  $e = \frac{3}{5}$ .

【变式 解】将椭圆方程变形为  $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ ,得  $a = 5, b = 4$ ,所以  $c = 3$ ,

故椭圆的长轴长和短轴长分别为  $2a = 10, 2b = 8$ ,离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ ,焦点坐标为  $(0, -3), (0, 3)$ ,顶点坐标为  $(0, -5), (0, 5), (-4, 0), (4, 0)$ .

【拓展 解】椭圆的方程  $m^2x^2 + 4my^2 = 1 (m > 0)$  可转化为  $\frac{x^2}{\frac{1}{m^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4m^2}} = 1 (m > 0)$ .  $\because m^2 < 4m^2, \therefore \frac{1}{m^2} > \frac{1}{4m^2}, \therefore$  椭圆的焦点在  $x$  轴上,并且长半

轴长  $a = \frac{1}{m}$ ,短半轴长  $b = \frac{1}{2m}$ ,半焦距  $c = \frac{\sqrt{3}}{2m}, \therefore$  椭圆的长轴长  $2a = \frac{2}{m}$ ,短轴长  $2b = \frac{1}{m}$ ,焦点坐标为  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2m}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2m}, 0\right)$ ,顶点坐标为  $\left(\frac{1}{m}, 0\right), \left(-\frac{1}{m}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{2m}\right), \left(0, \frac{1}{2m}\right)$ ,离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2m}}{\frac{1}{m}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

考点二

【例 2】(1)C (2)A (3)D 【解析】(1)由题意可得  $\begin{cases} 2a + 2b = 18, \\ 2c = 6, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$  得

$\begin{cases} a^2 = 25, \\ b^2 = 16, \end{cases}$  当椭圆的焦点位于  $x$  轴上时,其标准方程为  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ; 当  $c^2 = 9$ .

椭圆的焦点位于  $y$  轴上时,其标准方程为  $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{25} = 1$ . 故选 C.

(2)根据已知条件知  $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 20, \therefore |PF_1| \cdot |PF_2| = 2, \therefore |PF_1|^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| + |PF_2|^2 = (|PF_1| + |PF_2|)^2 = 4a^2 = 24, \therefore a^2 = 6, \therefore b^2 = 6 - 5 = 1, \therefore$  椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$ . 故选 A.

(3)依题意知  $c = 3, b = 3, \therefore a^2 = b^2 + c^2 = 18, \therefore$  焦点在  $x$  轴上,  $\therefore$  所求椭圆方程为  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ . 故选 D.

【例 3 解】(1) $4x^2 + 9y^2 = 36$  可化为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \therefore$  焦点坐标为  $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0), c = \sqrt{5}$ .  $\because$  所求椭圆与椭圆  $4x^2 + 9y^2 = 36$  有相同焦点,  $\therefore$  可设所求椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,且  $a^2 - b^2 = 5$ ,又点  $(3, -2)$  在椭圆上,  $\therefore \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1$ ,解得  $a^2 = 15, b^2 = 10, \therefore$  所求椭圆的标准方程为

$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$ .

(2)依题意画出图形如图所示,其中  $F$  为焦点,  $B_1, B_2$  为短轴端点,易知  $\triangle B_1B_2F$  为等腰直角三角形,  $OF$  为斜边  $B_1B_2$  的中线,且  $|OF| = c, |B_1B_2| = 2b, \therefore b = c = 3, \therefore a^2 = 18$ ,故所求椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

考点三

【导入】(1)略 (2)焦距与长轴长的比  $(0, 1)$

【例 4 解】设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ .  $\because F_1(-c, 0), \therefore P(-c, y_P)$ ,代入椭圆方程得  $\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_P^2}{b^2} = 1, \therefore y_P^2 = \frac{b^4}{a^2}, \therefore |PF_1| = \frac{b^2}{a} = |F_1F_2|$ ,即  $\frac{b^2}{a} = 2c$ . 又  $\because b^2 = a^2 - c^2, \therefore \frac{a^2 - c^2}{a} =$



$AB_1$  与  $BC_1$  所成的角或所成角的补角. 在  $\triangle BC_1D$  中,  $BC_1 = \sqrt{2}$ ,  $DC_1 = \sqrt{5}$ ,  $BD = \sqrt{4+1-2\times 2\times 1\times \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ , 所以  $\cos \angle BC_1D = \frac{2+5-3}{2\times \sqrt{2}\times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ . 故异面直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .

(2) 过点  $B$  作  $BE \perp AC$  于  $E$ , 以  $A$  为原点, 分别以  $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$  的方向为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的正方向建立空间直角坐标系.  $\therefore$  正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB=AA_1=4$ , 点  $D$  是  $AA_1$  的中点,  $\therefore B(2\sqrt{3}, 2, 0), C_1(0, 4, 4), D(0, 0, 2), A_1(0, 0, 4)$ ,  $\therefore \overrightarrow{DB} = (2\sqrt{3}, 2, -2), \overrightarrow{DC_1} = (0, 4, 2), \overrightarrow{DA_1} = (0, 0, 2)$ . 设平面  $BDC_1$  的法向量为  $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ ,  $\therefore \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DC_1} = 0$ ,  $\therefore \begin{cases} 2\sqrt{3}x + 2y - 2z = 0, \\ 4y + 2z = 0, \end{cases}$  取  $z = 2$ , 则  $y = -1, x = \sqrt{3}$ .  $\therefore$  平面  $BDC_1$  的一个法向量为  $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3}, -1, 2)$ ,  $\therefore$  点  $A_1$  到平面  $BDC_1$  的距离  $d = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DA_1}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|0+0+4|}{\sqrt{3+1+4}} = \sqrt{2}$ . 故选 A.

**例 7 解:** (1) 证明: 设  $AC, BD$  的交点为  $E$ , 连接  $ME$ . 因为  $PD \parallel$  平面  $MAC$ , 平面  $MAC \cap$  平面  $PDB = ME$ , 所以  $PD \parallel ME$ . 因为  $ABCD$  是正方形, 所以  $E$  为  $BD$  的中点, 所以  $M$  为  $PB$  的中点. (2) 取  $AD$  的中点  $O$ , 连接  $OP, OE$ . 因为  $PA = PD$ , 所以  $OP \perp AD$ . 又因为平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $OP \subset$  平面  $PAD$ , 所以  $OP \perp$  平面  $ABCD$ . 因为  $OE \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $OP \perp OE$ . 因为  $ABCD$  是正方形, 所以  $OE \perp AD$ . 如图建立空间直角坐标系  $O-xyz$ , 则  $P(0, 0, \sqrt{2}), D(2, 0, 0), B(-2, 4, 0)$ , 所以  $\overrightarrow{BD} = (4, -4, 0), \overrightarrow{PD} = (2, 0, -\sqrt{2})$ . 设平面  $BDP$  的法向量为  $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ , 则  $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 4x - 4y = 0, \\ 2x - \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$  令  $x = 1$ , 则  $y = 1, z = \sqrt{2}$ . 于是  $\boldsymbol{n} = (1, 1, \sqrt{2})$ . 平面  $PAD$  的一个法向量为  $\boldsymbol{p} = (0, 1, 0)$ , 所以  $\cos \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p} \rangle = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{n}| |\boldsymbol{p}|} = \frac{1}{2}$ . 由题知二面角  $B-PD-A$  为锐角, 所以它的大小为  $\frac{\pi}{3}$ .

(3) 由题意知  $M(-1, 2, \frac{\sqrt{2}}{2}), C(2, 4, 0)$ , 则  $\overrightarrow{MC} = (3, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ . 设直线  $MC$  与平面  $BDP$  所成角为  $\alpha$ , 则  $\sin \alpha = |\cos \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{MC} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{MC}|}{|\boldsymbol{n}| |\overrightarrow{MC}|} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ , 所以直线  $MC$  与平面  $BDP$  所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ . **变式 解:** 如图, 以  $A$  为原点, 分别以  $AB, AC, AP$  方向为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正方向建立空间直角坐标系. 依题意可得  $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(0, 4, 0), P(0, 0, 4), D(0, 0, 2), E(0, 2, 2), M(0, 0, 1), N(1, 2, 0)$ . (1) 证明:  $\overrightarrow{DE} = (0, 2, 0), \overrightarrow{DB} = (2, 0, -2)$ . 设  $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$  为平面  $BDE$  的法向量, 则  $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 2y = 0, \\ 2x - 2z = 0. \end{cases}$  不妨取  $z = 1$ , 可得  $\boldsymbol{n} = (1, 0, 1)$ . 又  $\overrightarrow{MN} = (1, 2, -1)$ , 可得  $\overrightarrow{MN} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ . 因为  $MN \not\subset$  平面  $BDE$ , 所以  $MN \parallel$  平面  $BDE$ . (2) 易知  $\boldsymbol{n}_1 = (1, 0, 0)$  为平面  $CEM$  的一个法向量.

设  $\boldsymbol{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  为平面  $EMN$  的法向量, 则  $\begin{cases} \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{EM} = 0, \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = 0, \end{cases}$  因为  $\overrightarrow{EM} = (0, -2, -1), \overrightarrow{MN} = (1, 2, -1)$ , 所以  $\begin{cases} -2y_2 - z_2 = 0, \\ x_2 + 2y_2 - z_2 = 0. \end{cases}$  不妨取  $y_2 = 1$ , 可得  $\boldsymbol{n}_2 = (-4, 1, -2)$ . 因此有  $\cos \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| |\boldsymbol{n}_2|} = -\frac{4}{\sqrt{21}}$ , 于是  $\sin \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{105}}{21}$ , 所以二面角  $C-EM-N$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{105}}{21}$ . (3) 依题意, 设  $AH = h(0 \leq h \leq 4)$ , 则  $H(0, 0, h)$ , 进而可得  $\overrightarrow{NH} = (-1, -2, h), \overrightarrow{BE} = (-2, 2, 2)$ . 由已知, 得  $|\cos \langle \overrightarrow{NH}, \overrightarrow{BE} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{NH}| |\overrightarrow{BE}|} = \frac{|2h-2|}{\sqrt{h^2+5} \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{21}$ , 整理得  $10h^2 - 21h + 8 = 0$ , 解得  $h = \frac{8}{5}$  或  $h = \frac{1}{2}$ . 所以, 线段  $AH$  的长为  $\frac{8}{5}$  或  $\frac{1}{2}$ .



## 参考答案

### 第一章 常用逻辑用语

#### 1.1 命题及其关系

##### 1.1.1 命题

##### 1.1.2 四种命题

- C 2. D 3. B 4. A 5. C 6. A 7. B
- $a > 0$  二元一次不等式  $x + ay - 1 \geq 0$  表示直线  $x + ay - 1 = 0$  的右上方区域 (包含边界) 真 **【解析】** 当  $a > 0$  时, 把  $(0, 0)$  代入  $x + ay - 1 \geq 0$ , 得  $-1 \geq 0$  不成立,  $\therefore x + ay - 1 \geq 0$  表示直线  $x + ay - 1 = 0$  的右上方区域 (包括边界),  $\therefore$  该命题为真命题.
- 若  $a \neq b$ , 则  $a^2 - b^2 \neq 0$  **【解析】** 逆否命题即调换结论和条件的位置, 并且将两者都否定. 根据这个原则得到题干中原命题的逆否命题为: 若  $a \neq b$ , 则  $a^2 - b^2 \neq 0$ .
- (1, 2) **【解析】** 若命题  $p$  为真命题, 则由  $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq m$  的解集为  $\mathbf{R}$ , 可知  $m \leq 1$ ; 若命题  $q$  为真命题, 则  $7-3m > 1$ , 即  $m < 2$ . 因为命题  $p$  和  $q$  中有且只有一个为真命题, 则  $p$  真  $q$  假或  $p$  假  $q$  真, 即  $\begin{cases} m \leq 1, \\ m \geq 2, \end{cases}$  或  $\begin{cases} m > 1, \\ m < 2, \end{cases}$  所以  $1 < m < 2$ , 故实数  $m$  的取值范围是  $(1, 2)$ .
- ② **【解析】** ①中命题的逆命题是: 若四点中任何三点都不共线, 则这四点不共面. 我们用正方体  $AC_1$  做模型来观察, 上底面  $A_1B_1C_1D_1$  中四点  $A_1, B_1, C_1, D_1$ , 任何三点都不共线, 但  $A_1, B_1, C_1, D_1$  四点共面. 所以①中命题的逆命题为假命题. ②中命题的逆命题是: 若两条直线是异面直线, 则两条直线没有公共点. 由异面直线的定义可知, 异面直线的两条直线没有公共点, 所以②中命题的逆命题是真命题.
- 解:** (1)  $\therefore$  当  $c = 0$  时,  $ac^2 = bc^2$ ,  $\therefore$  该命题为假命题. 逆命题: 若  $ac^2 > bc^2$ , 则  $a > b$ . 它为真命题. 否命题: 若  $a \leq b$ , 则  $ac^2 \leq bc^2$ . 它为真命题. 逆否命题: 若  $ac^2 \leq bc^2$ , 则  $a \leq b$ . 它为假命题. (2) 易知该命题为真命题. 逆命题: 若一个四边形是圆的内接四边形, 则该四边形的对角互补. 它为真命题. 否命题: 若一个四边形的对角不互补, 则该四边形不是圆的内接四边形. 它为真命题. 逆否命题: 若一个四边形不是圆的内接四边形, 则该四边形的对角不互补. 它为真命题.
- 解:** 其逆否命题为: 已知  $a, x$  为实数, 若  $a < 1$ , 则关于  $x$  的不等式  $x^2 + (2a+1)x + a^2 + 2 \leq 0$  的解集是空集.  $\therefore a < 1, \therefore \Delta = (2a+1)^2 - 4 \times (a^2 + 2) = 4a + 1 - 8 = 4a - 7 < 0$ , 即不等式  $x^2 + (2a+1)x + a^2 + 2 \leq 0$  的解集是空集,  $\therefore$  原命题的逆否命题是真命题.
- D** **【解析】** 对于①, 逆命题为“若  $x, y$  互为倒数, 则  $xy = 1$ ”, 是真命题; 对于②, 否命题为“面积不相等的三角形不是全等三角形”, 是真命题; 对于③, 逆否命题为“若  $x^2 - 2x + m = 0$  没有实数解, 则  $m > 0$ ”, 为真命题; 对于④, 逆否命题为“若  $A \subseteq B$ , 则  $A \cap B \neq B$ ”, 当  $B \subseteq A$  时满足条件, 但  $A \cap B = B$ , 故为假命题.
- 解:** 由  $2m+1 > 0$ , 得  $m > -\frac{1}{2}$ . 由  $\frac{m+3}{2m-1} > 0$ , 得  $m < -3$  或  $m > \frac{1}{2}$ . 又  $m > -\frac{1}{2}$ , 所以  $m > \frac{1}{2}$ . 由  $m^2 - 5m + 6 < 0$ , 得  $2 < m < 3$ , 又  $m > \frac{1}{2}$ , 所以  $2 < m < 3$ . 由此可知, 原命题可变为“如果  $m > \frac{1}{2}$ , 那么  $2 < m < 3$ ”, 显然原命题是假命题. 逆命题为“当  $2m+1 > 0$  时, 如果  $m^2 - 5m + 6 < 0$ , 那么  $\frac{m+3}{2m-1} > 0$ ”, 即“如果  $2 < m < 3$ , 那么  $m > \frac{1}{2}$ ”, 它是真命题. 否命题为“当  $2m+1 > 0$  时, 如果  $\frac{m+3}{2m-1} \leq 0$ , 那么  $m^2 - 5m + 6 \geq 0$ ”, 因为  $\begin{cases} 2m+1 > 0, \\ \frac{m+3}{2m-1} \leq 0, \end{cases}$  所以  $\begin{cases} m > -\frac{1}{2}, \\ -3 \leq m < \frac{1}{2}, \end{cases}$  所以  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ , 由  $\begin{cases} 2m+1 > 0, \\ m^2 - 5m + 6 \geq 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} m > -\frac{1}{2}, \\ m \leq 2 \text{ 或 } m \geq 3, \end{cases}$  即  $-\frac{1}{2} < m \leq 2$  或  $m \geq 3$ , 所以否命题可表述为“如果  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ , 那么  $-\frac{1}{2} < m \leq 2$  或  $m \geq 3$ ”, 它是真命题. 逆否命题为“当  $2m+1 > 0$  时, 如果  $m^2 - 5m + 6 \geq 0$ , 那么  $\frac{m+3}{2m-1} \leq 0$ ”, 则逆否命题可表述为“如果  $-\frac{1}{2} < m \leq 2$  或  $m \geq 3$ , 那么  $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ ”, 它是假命题.
- 1.1.3 四种命题间的相互关系

- C 2. D 3. C 4. C 5. A 6. B 7. B
- 若  $a^x \leq a^y$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 则  $x \leq y$  **【解析】** “若  $x > y$ , 则  $a^x > a^y$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )”的逆否命题是“若  $a^x \leq a^y$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 则  $x \leq y$ ”.
- 真 **【解析】** 依题意知原命题的否命题为“若  $a \leq b$ , 则  $ac^2 \leq bc^2$ ”, 该命

题是真命题.

- ②④ **【解析】** 对于①,  $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$ , 故①中命题为假命题; 对于②, 否命题为“若  $x^2 + y^2 \neq 0$ , 则  $x, y$  不全为 0”, 是真命题; 对于③, 逆命题为“若两个三角形是相似三角形, 则这两个三角形全等”, 是假命题; 对于④, 原命题为真, 而逆否命题与原命题是两个等价命题,  $\therefore$  逆否命题也为真命题. 故答案为②④.
- ② **【解析】** ①的逆命题是: 若两条直线互相垂直, 则这两条直线的斜率之积等于  $-1$ . 显然当其中一条直线斜率不存在时不成立, 所以①的逆命题是假命题. ②的逆命题是: 若  $A, B, C, D$  四点在一条直线上, 则  $\overrightarrow{AB}$  与  $\overrightarrow{CD}$  是共线向量. 易知②的逆命题是真命题.
- 解:** (1) 逆命题: 如果圆心距等于两圆半径之和, 那么两圆外切, 是真命题; 否命题: 如果两圆不外切, 那么圆心距不等于两圆半径之和, 是真命题; 逆否命题: 如果圆心距不等于两圆半径之和, 那么两圆不外切, 是真命题. (2) 逆命题: 在同一平面内, 若两条直线平行, 则这两条直线平行于同一条直线, 是真命题. 否命题: 在同一平面内, 若两条直线不平行于同一条直线, 则这两条直线不平行, 是真命题. (3) 逆命题: 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a^2 - 4b > 0$ , 若方程  $x^2 + ax + b = 0$  的两个实根  $x_1, x_2$  满足  $x_1 < 1 < x_2$ , 则  $a + b + 1 < 0$ . 否命题: 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a^2 - 4b > 0$ , 若  $a + b + 1 \geq 0$ , 则方程  $x^2 + ax + b = 0$  的两个实根  $x_1, x_2$  不满足  $x_1 < 1 < x_2$ . 逆否命题: 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a^2 - 4b > 0$ , 若方程  $x^2 + ax + b = 0$  的两个实根  $x_1, x_2$  不满足  $x_1 < 1 < x_2$ , 则  $a + b + 1 \geq 0$ . 下面对真假进行判断: 令  $f(x) = x^2 + ax + b$ .  $\therefore f(1) = a + b + 1 < 0$ ,  $f(x)$  的图像为开口向上的抛物线,  $\therefore x^2 + ax + b = 0$  的两个实根  $x_1, x_2$  满足  $x_1 < 1 < x_2$ , 故原命题为真命题, 则逆否命题也为真命题.  $\therefore$  方程  $x^2 + ax + b = 0$  的两实根满足  $x_1 < 1 < x_2$ ,  $\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$ , 又  $x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = b$ ,  $\therefore a + b + 1 < 0$ , 故逆命题为真命题, 否命题也为真命题.
- 解:** 由  $|5x-1| > a > 0$ , 得  $5x-1 < -a$  或  $5x-1 > a$ , 即  $x < \frac{1-a}{5}$  或  $x > \frac{1+a}{5}$ . 由  $\frac{1}{2x^2-3x+1} > 0$ , 得  $2x^2 - 3x + 1 > 0$ , 解得  $x < \frac{1}{2}$  或  $x > 1$ . 为使“ $A$ , 则  $B$ ”为真命题, 而其逆命题为假命题, 则需  $A \subseteq B$ . 令  $a = 4$ , 得  $p: x < -\frac{3}{5}$  或  $x > 1$ , 满足题意, 故可以选取  $a = 4$ , 此时原命题是“若  $|5x-1| > 4$ , 则  $\frac{1}{2x^2-3x+1} > 0$ ”. ( $a$  的取值不唯一)
- B **【解析】** 由于“ $M \subseteq P$ ”为假命题, 故  $M$  中至少有一个元素不属于  $P$ ,  $\therefore$  ②④正确.  $M$  中可能有属于  $P$  的元素, 也可能都不是  $P$  的元素, 故①③错误. 选 B.
- 解:** 因为“ $A \cap B = \emptyset$ ”是假命题, 所以  $A \cap B \neq \emptyset$ . 设全集  $U = \{m | \Delta = (-4m)^2 - 4(2m+6) \geq 0\}$ , 则  $U = \left\{ m \mid m \leq -1 \text{ 或 } m \geq \frac{3}{2} \right\}$ . 假设方程  $x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0$  的两根  $x_1, x_2$  均非负, 则有  $\begin{cases} m \in U, \\ x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \in U, \\ 4m \geq 0, \\ 2m + 6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{3}{2}$ . 又集合  $\left\{ m \mid m \geq \frac{3}{2} \right\}$  关于全集  $U$  的补集是  $\{m | m \leq -1\}$ , 所以实数  $m$  的取值范围是  $\{m | m \leq -1\}$ .
- 1.2 充分条件与必要条件
- 1.2.1 充分条件与必要条件
- 1.2.2 充要条件

- B 2. A 3. A 4. B 5. A 6. B 7. A
- $2 \leq m < 3$  **【解析】** 由题意, 函数  $f(x) = |\log_2 x| = \begin{cases} \log_2 x, x \geq 1, \\ -\log_2 x, 0 < x < 1, \end{cases}$  要使  $f(x)$  在区间  $(m-2, 2m)$  内有定义且不是单调函数, 则有  $0 \leq m-2 < 1 < 2m$ ,  $\therefore 2 \leq m < 3$ .
- 充要条件 **【解析】** 当  $a = 0$  时, 函数  $f(x) = x^2$  是偶函数, 充分性成立. 若函数  $f(x) = x^2 + ax$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 为偶函数, 则  $f(-x) = (-x)^2 - ax = x^2 - ax = f(x) = x^2 + ax$ , 则  $ax = 0$  对  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则  $a = 0$ . 必要性成立. 故“ $a = 0$ ”是“函数  $f(x) = x^2 + ax$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) 为偶函数”的充要条件.
- $m \geq 1$  **【解析】** 由  $x^2 + x - 2 > 0$ , 解得  $x > 1$  或  $x < -2$ .  $\therefore p$  的一个充分不必要条件是  $q$ ,  $\therefore q \Rightarrow p, \therefore m \geq 1$ .
- ④ **【解析】** ①当  $x > 2$  且  $y > 3$  时,  $x + y > 5$  一定成立, 反之不一定成立, 所以“ $x > 2$  且  $y > 3$ ”是“ $x + y > 5$ ”的充分不必要条件, 故①为假命题; ②不等式的解集为  $\mathbf{R}$  的充要条件是  $a < 0$  且  $b^2 - 4ac < 0$ , 故②为假命题; ③当  $a = 2$  时, 两直线平行, 反之, 若两直线平行, 则  $\frac{a}{1} = \frac{2}{1}$ , 所以  $a = 2$ , 因此, “ $a = 2$ ”是“直线  $ax + 2y = 0$  平行于直线  $x + y = 1$ ”的充要条件, 故③为假命题. ④  $\lg x + \lg y = \lg(xy) = 0$ , 所以  $xy = 1$  且  $x > 0, y > 0$ , 所以  $xy = 1$  必成立, 反之不然, 因此“ $xy = 1$ ”是“ $\lg x + \lg y = 0$ ”的必要不充分条件, 故④为真命题. 综上所述可知, 真命题的序号为④.
- 解:** (1)  $\therefore |x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ , 但  $x = y \Rightarrow |x| = |y|, \therefore p$  是  $q$  的必要不充分条件. (2)  $\therefore \triangle ABC$  是直角三角形  $\Leftrightarrow \triangle ABC$  是等腰三角形,  $\triangle ABC$  是等腰三角形  $\Leftrightarrow \triangle ABC$  是直角三角形,  $\therefore p$  是  $q$  的既不充分也不必要条件.

(3)  $\therefore$  四边形的对角线互相平分  $\Leftrightarrow$  四边形是矩形, 四边形是矩形  $\Rightarrow$  四边形的对角线互相平分,  $\therefore p$  是  $q$  的必要不充分条件. (4) 若圆  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 与直线  $ax + by + c = 0$  相切, 则圆心  $(0, 0)$  到直线  $ax + by + c = 0$  的距离等于  $r$ , 即  $r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \therefore c^2 = (a^2 + b^2)r^2$ ; 反过来, 若  $c^2 = (a^2 + b^2)r^2$ , 则  $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = r$  成立, 说明圆  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 的圆心  $(0, 0)$  到直线  $ax + by + c = 0$  的距离等于  $r$ , 即圆  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 与直线  $ax + by + c = 0$  相切. 故  $p$  是  $q$  的充要条件. 13. **证明:** 充分性:  $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac, \therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0, \therefore (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0, \therefore a = b = 0, b = c = 0, a = c = 0$ , 即  $a = b = c, \therefore \triangle ABC$  是等边三角形. 必要性:  $\therefore \triangle ABC$  是等边三角形,  $\therefore a = b = c, \therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = a^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 0, \therefore a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ . 综上所述,  $\triangle ABC$  是等边三角形的充要条件是  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$  (其中  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的三条边).

14. A **【解析】** 当  $\triangle ABC$  是等边三角形时,  $a = b = c, \therefore l = \max \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} \cdot \min \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} = 1 \times 1 = 1, \therefore “l = 1”$  是“ $\triangle ABC$  为等边三角形”的必要条件.  $\therefore a \leq b \leq c, \therefore \max \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} = \frac{c}{a}$ . 又  $\therefore l = 1, \therefore \min \left\{ \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a} \right\} = \frac{a}{c}$ , 即  $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$  或  $\frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ , 得  $b = c$  或  $b = a$ , 可知  $\triangle ABC$  为等腰三角形, 而不能推出  $\triangle ABC$  为等边三角形,  $\therefore “l = 1”$  不是“ $\triangle ABC$  为等边三角形”的充分条件. 故选 A. 15. **解:** 设  $p, q$  对应的集合分别为  $A, B$ , 则集合  $A$  表示的平面区域如图中阴影部分所示, 集合  $B$  表示到原点距离大于  $r$  的点的集合, 即圆  $x^2 + y^2 = r^2$  外的点的集合. 问题可转化为利用  $A \subseteq B$  求解. 因为  $A \subseteq B$  表示区域  $A$  内的点到原点的最短距离大于  $r$ , 所以结合图像可知, 只需直线  $3x + 4y - 12 = 0$  上的点到原点的最短距离大于或等于  $r$ . 因为原点  $O$  到直线  $3x + 4y - 12 = 0$  的距离  $d = \frac{|-12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}$ , 所以实数  $r$  的取值范围为  $0 < r \leq \frac{12}{5}$ .

### 1.3 简单的逻辑联结词

#### 1.3.1 且 (and) 1.3.2 或 (or) 1.3.3 非 (not)

- B 2. A 3. D 4. C 5. D 6. C 7. A
- 若  $a \geq b$ , 则  $2^a \geq 2^b$  若  $a < b$ , 则  $2^a > 2^b$  **【解析】** 命题“若  $p$ , 则  $q$ ”的否命题是“若  $\neg p$ , 则  $\neg q$ ”, 命题的否定是“若  $p$ , 则  $\neg q$ ”.
- 0 **【解析】** 由于  $\neg p$  是假命题, 所以  $p$  是真命题, 由  $S_n = n^2 + m$ , 得  $a_n = \begin{cases} 1 + m, n = 1, \\ 2n - 1, n > 1, \end{cases}$  若数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 则  $1 + m = 2 \times 1 - 1$ , 解得  $m = 0$ .
- $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$  **【解析】** 当  $p$  是真命题时, 有  $1 - 2 + m < 0$ , 即  $m < 1$ . 当  $q$  是真命题时, 有  $2 + m \neq 0$ , 即  $m \neq -2$ . 又  $p \wedge q$  为真命题, 所以  $p$  是真命题且  $q$  是真命题, 所以  $m < 1$  且  $m \neq -2$ , 所以实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$ .
- $[1, 3]$  **【解析】** 由  $(x+2)(x-3) \leq 0$ , 解得  $-2 \leq x \leq 3$ . 由  $|x+1| \geq 2$ , 解得  $x \geq 1$  或  $x \leq -3$ .  $\therefore “p \wedge q”$  为真,  $\therefore \begin{cases} -2 \leq x \leq 3, \\ x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -3, \end{cases}$  解得  $1 \leq x \leq 3$ , 则实数  $x$  的取值范围是  $[1, 3]$ .
- 解:** (1) 这个命题是“ $p$  且  $q$ ”形式的命题, 其中  $p$ : 函数  $y = \cos x$  是周期函数,  $q$ : 函数  $y = \cos x$  是奇函数. (2) 这个命题是“ $p$  或  $q$ ”形式的命题, 其中  $p$ : 若  $x \in \{x | x < 1\}$ , 则  $x$  是不等式  $(x-1)(x-2) > 0$  的解,  $q$ : 若  $x \in \{x | x > 2\}$ , 则  $x$  是不等式  $(x-1)(x-2) > 0$  的解. (3) 这个命题是“非  $p$ ”形式的命题, 其中  $p$ : 不等式  $x^2 + x + 2 < 0$  有解.
- 解:** 若方程  $x^2 + 2x + m = 0$  没有实数根, 则  $\Delta = 4 - 4m < 0$ , 解得  $m > 1$ . 若函数  $f(x) = \lg \left( mx^2 - x + \frac{1}{16} \right)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $mx^2 - x + \frac{1}{16} > 0$  对  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 即  $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = 1 - 4m < 0 \end{cases}$ , 解得  $m > \frac{1}{4}$ .  $\therefore p \vee q$  为真命题,  $p \wedge q$  为假命题,  $\therefore p, q$  一真一假. 若  $p$  真  $q$  假, 则  $m > 1$  且  $m \leq 2$ , 即  $1 < m \leq 2$ . 若  $p$  假  $q$  真, 则  $m \leq 1$  且  $m > 2$ , 无解. 综上, 实数  $m$  的取值范围是 <



$$y = -\frac{3}{a-1}x + \frac{a-7}{a-1}, \text{ 因为 } p \text{ 为真命题, 所以 } \begin{cases} -\frac{a}{2} = -\frac{3}{a-1}, \\ -a \neq \frac{a-7}{a-1}, \end{cases} \text{ 解得}$$

$a=3$  或  $a=-2$ .  
 (2) 若  $q$  为真命题, 则  $\Delta = a^2 - 9 \geq 0$  恒成立, 解得  $a \leq -3$  或  $a \geq 3$ .  
 因为命题  $p \wedge q, p \vee q$  均为假命题, 所以命题  $p, q$  都是假命题,  
 所以  $\begin{cases} a \neq 3, \\ a \neq -2, \end{cases}$  解得  $-3 < a < -2$  或  $-2 < a < 3$ ,  
 故实数  $a$  的取值范围是  $(-3, -2) \cup (-2, 3)$ .

## 1.4 全称量词与存在量词

### 1.4.1 全称量词

### 1.4.2 存在量词

1. D 2. C 3. A 4. C 5. C 6. B 7. B  
 8.  $\exists x_0 < 0, (1+x_0)(1-9x_0) > 0$

9.  $a < 2$  【解析】 $\because \forall x \in \mathbf{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$ , 当且仅当  $x = \frac{1}{x}$ , 即  $x = 1$  时取等号,  $\therefore$  要使  $a < x + \frac{1}{x}$  恒成立, 只需  $a < \left(x + \frac{1}{x}\right)_{\min}$ , 即  $a < 2$ .

10.  $(-\infty, -5]$  【解析】 $\because$  命题“ $\exists x_0 \in (1, 2), x_0^2 + mx_0 + 4 \geq 0$ ”是假命题,  $\therefore \forall x \in (1, 2)$ , 不等式  $x^2 + mx + 4 < 0$  恒成立. 设  $f(x) = x^2 + mx + 4, x \in (1, 2)$ , 则有  $\begin{cases} f(1) = m + 5 < 0, \\ f(2) = 2m + 8 < 0, \end{cases}$  解得  $m \leq -5$ ,  $\therefore$  实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -5]$ .

11.  $(-4, -2)$  【解析】满足条件①时, 由  $g(x) = 2^x - 2 < 0$ , 可得  $x < 1$ , 要使  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) < 0$  或  $g(x) < 0$ , 必须使  $x \geq 1$  时,  $f(x) = m(x-2m)(x+m+3) < 0$  恒成立, 当  $m=0$  时,  $f(x) = m(x-2m)(x+m+3) = 0$  不满足条件, 所以二次函数  $f(x)$  的图像必须开口向下, 也就是  $m < 0$ , 要满足条件, 必须使方程  $f(x) = 0$  的两根  $2m, -m-3$  都小于 1, 即  $\begin{cases} 2m < 1, \\ -m-3 < 1, \end{cases}$  可得  $m \in (-4, 0)$ . 满足条件②时, 因为  $x \in (-\infty, -4)$  时,  $g(x) < 0$ , 所以要使  $\exists x_0 \in (-\infty, -4), f(x_0)g(x_0) < 0$ , 只要  $\exists x_0 \in (-\infty, -4), f(x_0) > 0$  即可, 只要使  $-4$  比  $2m, -m-3$  中较小的一个大即可. 当  $m \in (-1, 0)$  时,  $2m > -m-3$ , 只要  $-4 > -m-3$ , 解得  $m > 1$ , 与  $m \in (-1, 0)$  的交集为空集; 当  $m = -1$  时, 两根相等, 为  $-2$ ,  $f(x) \leq 0$  恒成立, 不符合; 当  $m \in (-4, -1)$  时,  $2m < -m-3$ , 所以只要  $-4 > 2m$ , 所以  $m \in (-4, -2)$ . 综上可知  $m \in (-4, -2)$ .

12. 解: (1)(2)是全称命题, (3)(4)是特称命题.  
 (1)中,  $\because a^a > 0$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 恒成立,  $\therefore$  命题(1)是真命题.  
 (2)中, 当  $x_1 = 0, x_2 = \pi$  时,  $x_1 < x_2$ , 但  $\tan 0 = \tan \pi$ ,  $\therefore$  命题(2)是假命题.  
 (3)中,  $y = |\sin x|$  是周期函数,  $\pi$  就是它的一个周期,  $\therefore$  命题(3)是真命题.  
 (4)中, 对  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 > 0$ ,  $\therefore$  命题(4)是假命题.  
 13. 解: (1)对任意的  $x \in [0, 1]$ , 不等式  $2x - 2 \geq m^2 - 3m$  恒成立,  $\therefore -2 \geq m^2 - 3m$ , 解得  $1 \leq m \leq 2$ .  
 (2)由(1)知, 若  $p$  为真命题, 则  $1 \leq m \leq 2$ . 当  $a = 1$  时, 若存在  $x_0 \in [-1, 1]$ , 使得  $m \leq ax_0$  成立, 则  $m \leq 1$ .  $\therefore p \wedge q$  为假,  $p \vee q$  为真,  $\therefore p, q$  必一真一假,  $\therefore \begin{cases} 1 \leq m \leq 2, \\ m > 1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} m < 1 \text{ 或 } m > 2, \\ m \leq 1, \end{cases}$  解得  $1 < m \leq 2$  或  $m < 1$ ,  $\therefore m$  的取值范围是  $(-\infty, 1) \cup (1, 2]$ .

14.  $p_2, p_4$  【解析】因为幂函数  $y = x^a$  ( $a > 0$ ) 在  $(0, +\infty)$  上是增函数, 所以命题  $p_1$  是假命题; 因为对数函数  $y = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ ) 是减函数, 所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $0 < \log_a \frac{1}{2} < \log_a \frac{1}{3}$ , 所以  $0 < \frac{1}{\log_a \frac{1}{2}} < \frac{1}{\log_a \frac{1}{3}}$ , 即  $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$ , 所以命题  $p_2$  是真命题; 取  $x = \frac{1}{2}$ , 则  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1, \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$ , 所以命题  $p_3$  是假命题; 因为函数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  在  $(0, \frac{1}{3})$  上单调递减, 所以有  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$ , 函数  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  在  $(0, \frac{1}{3})$  上单调递减, 所以  $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$ , 所以命题  $p_4$  是真命题. 故真命题为  $p_2, p_4$ .

15. 解: 易知  $f(t) \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ . 由题意, 令  $g(m) = (x-2)m + x^2 - 4x + 4 = (x-2)m + (x-2)^2$ , 则  $g(m) > 0$  对任意  $m \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$  恒成立, 所以  $\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \\ g(3) > 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) + (x-2)^2 > 0, \\ 3(x-2) + (x-2)^2 > 0, \end{cases}$  解得  $x > 2$  或  $x < -1$ . 故实数  $x$  的取值范围是  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ .

### 1.4.3 含有一个量词的命题的否定

1. C 2. B 3. B 4. C 5. C 6. B 7. C  
 8.  $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x \neq \lg x$  【解析】特称命题的否定是全称命题, 所以命题

“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \sin x_0 = \lg x_0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x \neq \lg x$ ”.  
 9.  $\exists x_0 > 0, \sin x_0 < -1$  【解析】全称命题的否定是特称命题,  $\therefore$  “ $\forall x > 0, \sin x \geq -1$ ”的否定是“ $\exists x_0 > 0, \sin x_0 < -1$ ”.  
 10.  $(-3, +\infty)$  【解析】由已知得  $\neg p: \forall x \in [1, 2], x^2 + 2ax + 2 - a \leq 0$ . 设  $f(x) = x^2 + 2ax + 2 - a, x \in [1, 2]$ . 若  $\neg p$  为真, 则  $\begin{cases} f(1) \leq 0, \\ f(2) \leq 0, \end{cases}$  所以  $\begin{cases} 1 + 2a + 2 - a \leq 0, \\ 4 + 4a + 2 - a \leq 0, \end{cases}$  解得  $a \leq -3$ . 因为  $p$  为真, 所以  $\neg p$  为假, 所以  $a > -3$ , 即  $a$  的取值范围是  $(-3, +\infty)$ .  
 11.  $(2, 3)$  【解析】由题意可知  $p \wedge q$  为真命题, 所以  $p, q$  都是真命题, 所以  $\begin{cases} 0 < 3 - c < 1, \\ 2c - 3 > 0, \end{cases}$  解得  $2 < c < 3$ , 故实数  $c$  的取值范围为  $(2, 3)$ .  
 12. 解: 由题意可知,  $p$  为真命题. 由  $x^2 - 2ax + 2 \geq a$ , 得  $x^2 - 2ax + 2 - a \geq 0$ , 令  $f(x) = x^2 - 2ax + 2 - a$ , 所以  $\Delta \leq 0$  或  $\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 4(2-a) > 0, \\ f(-1) \geq 0, \end{cases}$  即  $-2 \leq a \leq 1$  或  $-3 \leq a < -2$ , 所以  $-3 \leq a \leq 1$ . 故所求实数  $a$  的取值范围是  $[-3, 1]$ .

13. 解: (1)  $\neg p: \exists a_0 \in (0, b] (b \in \mathbf{R} \text{ 且 } b > 0)$ , 函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  的最小正周期大于  $4\pi$ .

(2) 由于  $\neg p$  是假命题, 所以  $p$  是真命题, 所以  $\forall a \in (0, b], \frac{2\pi}{a} \leq 4\pi$ , 即  $a \leq 2$  恒成立, 所以  $0 < b \leq 2$ , 所以实数  $b$  的最大值是 2.

14. ②③ 【解析】命题“若  $a = \frac{\pi}{4}$ , 则  $\tan a = 1$ ”为真命题, 所以其逆否命题为真命题, 所以①错误. 命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$  的否定  $\neg p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, \sin x_0 > 1$ , 所以②正确. 若函数  $y = \sin(2x + \varphi)$  为偶函数, 则  $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 所以“ $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ”是“函数  $y = \sin(2x + \varphi)$  为偶函数”的充要条件, 所以③正确. 因为  $\sin x_0 + \cos x_0 \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}, \sin 1 > \sin 4$ , 所以命题  $p, q$  均为假命题, 所以  $(\neg p) \wedge q$  为假命题, 所以④错误. 故正确说法的序号是②③.  
 15. 解: (1)  $\neg p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, mx_0^2 + 1 \leq 0, \neg q: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + mx + 1 > 0$ .  
 (2) 由题意知  $\neg p$  真或  $\neg q$  真, 当  $\neg p$  真时  $m < 0$ ; 当  $\neg q$  真时  $\Delta = m^2 - 4 < 0$ , 解得  $-2 < m < 2$ . 因此, 当  $(\neg p) \vee (\neg q)$  为真命题时  $m < 2$ .

## 滚动习题 (一)

1. A 2. A 3. B 4. D 5. D 6. C 7. B  
 8. A 【解析】当  $a > 1$  时,  $\Delta = 4 - 4a < 0$ , 即  $x^2 + 2x + a > 0$  恒成立, 故函数  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x + a)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 即命题  $p$  是真命题. 当  $a > 1$  时, 由  $|x| < 1$ , 得  $-1 < x < 1$ , 则  $x < a$ , 但  $x < a \nRightarrow -1 < x < 1$ , 因此  $|x| < 1$  是  $x < a$  的充分不必要条件, 故命题  $q$  是真命题, 故命题  $p$  或  $q$  是真命题, 因而选 A.  
 9.  $\forall x \in \mathbf{R}, x > 1$  且  $x^2 \leq 4$  【解析】特称命题的否定是全称命题, 所以命题“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0 \leq 1$  或  $x_0^2 > 4$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, x > 1$  且  $x^2 \leq 4$ ”.  
 10. 假 【解析】 $\because$  命题  $p: \text{若 } e^x > 1$ , 则  $x > 0$ ,  $\therefore$  命题  $p$  是真命题.  $\because$  命题  $q: \text{若 } a > b$ , 则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , 当  $a = 1, b = -2$  时, 满足  $a > b$ , 但  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ,  $\therefore$  命题  $q$  为假命题,  $\therefore$  命题  $p \wedge q$  为假命题.  
 11.  $(-\infty, -2)$  【解析】因为函数  $f(x) = x^2 + mx + 1$  的图像过点  $(0, 1)$ , 所以若命题“ $\exists x_0 > 0, f(x_0) < 0$ ”为真, 则函数  $f(x) = x^2 + mx + 1$  的图像的对称轴必在  $y$  轴的右侧, 且与  $x$  轴有两个交点, 所以  $\Delta = m^2 - 4 > 0$ , 且  $-\frac{m}{2} > 0$ , 所以  $m < -2$ , 即  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -2)$ .

12.  $[4, +\infty)$  【解析】由  $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ , 得  $-1 \leq x \leq 4$ , 设  $A = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$ .  $\because \neg q$  是  $\neg p$  的充分不必要条件,  $\therefore p$  是  $q$  的充分不必要条件, 则  $|x - 3| \leq m$  有解, 则  $m > 0$  ( $m = 0$  时不符合条件), 则  $-m \leq x - 3 \leq m$ , 得  $3 - m \leq x \leq 3 + m$ , 设  $B = \{x | 3 - m \leq x \leq 3 + m\}$ . 易知  $A \subseteq B$ , 则  $\begin{cases} m > 0, \\ 3 - m \leq -1, \text{ 且不等式组中等号不能同时取得, 得 } \\ 3 + m \geq 4, \end{cases}$  故  $m$  的取值范围是  $[4, +\infty)$ .

13. 解: 由题意得,  $p: \frac{1}{2} \leq x \leq 1, q: a \leq x \leq a + 1$ .  $\because \neg p$  是  $\neg q$  的必要不充分条件,  $\therefore p$  是  $q$  的充分不必要条件,  $\therefore a + 1 \geq 1$  且  $a \leq \frac{1}{2}$  (等号不能同时取得),  $\therefore 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ . 故实数  $a$  的取值范围为  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

14. 解: 若方程  $x^2 - 2mx + 4 = 0$  有两个不等的正根, 则  $\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 16 > 0, \\ 2m > 0, \end{cases}$  解得  $m > 2$ . 若方程  $x^2 + 2(m-2)x + 1 = 0$  无实根, 则  $\Delta = 4(m-2)^2 - 4 = 4(m^2 - 4m + 3) < 0$ , 解得  $1 < m < 3$ .  $\because p \wedge q$  为假,  $p \vee q$  为真,  $\therefore p, q$  一真一假.  
 若  $p$  真  $q$  假, 则  $\begin{cases} m > 2, \\ m \leq 1 \text{ 或 } m \geq 3, \end{cases}$  解得  $m \geq 3$ .  
 若  $p$  假  $q$  真, 则  $\begin{cases} m \leq 2, \\ 1 < m < 3, \end{cases}$  解得  $1 < m \leq 2$ .  
 综上所述, 实数  $m$  的取值范围是  $m \geq 3$  或  $1 < m \leq 2$ .  
 15. 解: (1) 由  $x^2 - 4x + 3 < 0$ , 得  $1 < x < 3$ .

由  $\frac{x-3}{x-2} \leq 0$ , 得  $2 < x \leq 3$ .  $\therefore p \wedge q$  为真,  $\therefore p$  真,  $q$  真,  $\therefore \begin{cases} 1 < x < 3, \\ 2 < x \leq 3, \end{cases}$  解得  $2 < x < 3$ , 即  $x$  的取值范围为  $(2, 3)$ .  
 (2)  $\neg q$ : 实数  $x$  满足  $x \leq 2$  或  $x > 3$ ,  $\neg p$ : 实数  $x$  满足  $x^2 - 4ax + 3a^2 \geq 0$ , 由  $x^2 - 4ax + 3a^2 \geq 0$ , 得  $x \leq a$  或  $x \geq 3a$ .  $\because \neg p$  是  $\neg q$  的充分不必要条件, 所以  $a \leq 2$  且  $3a > 3$ , 解得  $1 < a \leq 2$ .  $\therefore a$  的取值范围为  $(1, 2]$ .

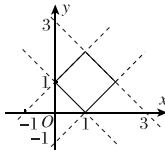
## 第二章 圆锥曲线与方程

### 2.1 曲线与方程

#### 2.1.1 曲线与方程

#### 2.1.2 求曲线的方程

1. B 2. A 3. C 4. D 5. D 6. C 7. A  
 8. 2 【解析】方程  $|x-1| + |y-1| = 1$  可写成  $\begin{cases} x > 1, \\ y \geq 1, \end{cases}$  或  $\begin{cases} x > 1, \\ x-y=1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x \leq 1, \\ y \geq 1, \end{cases}$  或  $\begin{cases} x \leq 1, \\ x-y=1 \end{cases}$  图形如图所示, 它是边长为  $\sqrt{2}$  的正方形, 其面积为 2.



9. ③ 【解析】对于①, 方程  $\frac{y}{x-2} = 1$  表示斜率为 1, 在  $y$  轴上的截距为  $-2$  的直线 (除掉点  $(2, 0)$ ), 所以①错误; 对于②, 到  $x$  轴距离为 2 的点的轨迹方程为  $y = -2$  或  $y = 2$ , 所以②错误; 对于③, 方程  $(x^2 - 4)^2 + (y^2 - 4)^2 = 0$  表示  $(-2, 2), (-2, -2), (2, -2), (2, 2)$  四个点, 所以③正确.

10.  $x^2 + y^2 = 16$  【解析】设  $P(x, y)$ , 则  $\overrightarrow{PM} = (-2-x, -y), \overrightarrow{PN} = (2-x, -y)$ , 于是  $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = (-2-x)(2-x) + y^2 = 12$ , 化简得  $x^2 + y^2 = 16$ , 即点  $P$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = 16$ .  
 11.  $-1$  【解析】 $\because A(1, 1), B(2, m)$  都在方程  $ax^2 + xy - 2 = 0$  表示的曲线上,  $\therefore \begin{cases} a + 1 - 2 = 0, \\ 4a + 2m - 2 = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 1, \\ m = -1. \end{cases}$   
 12. 解: 设  $C(x_1, y_1)$ , 重心  $G(x, y)$ , 由重心坐标公式得  $3x = -2 + 0 + x_1, 3y = 0 - 2 + y_1$ , 则  $x_1 = 3x + 2, y_1 = 3y + 2$ .  $\because C(x_1, y_1)$  在曲线  $y = 3x^2 - 1$  上移动,  $\therefore 3y + 2 = 3(3x + 2)^2 - 1$ . 整理得  $y = 9x^2 + 12x + 3$ . 故  $\triangle ABC$  的重心的轨迹方程为  $y = 9x^2 + 12x + 3$ .  
 13. 解: 设  $M$  的坐标为  $(x, y)$ , 显然有  $x > 0$ , 且  $y \neq 0$ . 当  $\angle MBA = 90^\circ$  时, 点  $M$  的坐标为  $(2, \pm 3)$ . 当  $\angle MBA \neq 90^\circ$  时,  $x \neq 2$ , 由  $\angle MBA = 2\angle MAB$ , 得  $\tan \angle MBA = \frac{2 \tan \angle MAB}{1 - \tan^2 \angle MAB}$ , 即  $-\frac{|y|}{x-2} = \frac{2|y|}{x+1}$ , 化简可得  $3x^2 - y^2 - 3 = 0$ . 而点  $(2, \pm 3)$  在曲线  $3x^2 - y^2 - 3 = 0$  上, 故轨迹  $C$  的方程为  $3x^2 - y^2 - 3 = 0 (x > 0)$ .

14.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  【解析】设点  $M$  的坐标是  $(x, y)$ ,  $P$  的坐标是  $(x_p, y_p)$ , 因为点  $D$  是  $P$  在  $x$  轴上的射影,  $M$  为  $PD$  上一点, 且  $|MD| = \frac{4}{5}|PD|$ , 所以  $x_p = x$ , 且  $y_p = \frac{5}{4}y$ . 又点  $P$  在圆  $x^2 + y^2 = 25$  上运动, 所以  $x^2 + \left(\frac{5}{4}y\right)^2 = 25$ , 整理得  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ , 即轨迹  $C$  的方程是  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

15. 解: (1) 设动点  $M(x, y)$ , 由已知可得  $\sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + y^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| x + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right|$ , 即  $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = \frac{3}{4} \left( x^2 + \frac{8\sqrt{3}}{3}x + \frac{16}{3} \right)$ , 化简得  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 即所求动点  $M$  的轨迹  $\Gamma$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) 设点  $B(x, y)$ , 点  $P(x_0, y_0)$ , 由  $\begin{cases} x = \frac{x_0 + 1}{2}, \\ y_0 + \frac{1}{2} = y, \end{cases}$  得  $\begin{cases} x_0 = 2x - 1, \\ y_0 = 2y - \frac{1}{2}, \end{cases}$  由点  $P$  在轨迹  $\Gamma$  上, 得  $\frac{(2x-1)^2}{4} + \left(2y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ , 整理得  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 1$ ,  $\therefore$  线段  $PA$  的中点  $B$  的轨迹方程是  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = 1$ .

## 2.2 椭圆

### 2.2.1 椭圆及其标准方程

1. B 2. A 3. D 4. A 5. B 6. A 7. C  
 8.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  【解析】设所求椭圆方程为  $mx^2 + ny^2 = 1, m > 0, n > 0$ ,

$m \neq n$ , 则  $\begin{cases} 9m = 1, \\ 16n = 1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} m = \frac{1}{9}, \\ n = \frac{1}{16}, \end{cases} \therefore$  椭圆的标准方程是  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

9.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  【解析】设所求椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 半焦距为  $c$ . 由题意可得  $\begin{cases} a+c=3, \\ a-c=1, \end{cases} \therefore \begin{cases} a=2, \\ c=1, \end{cases}$  故  $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ ,  $\therefore$  椭圆的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

10. ③ 【解析】对于①,  $\sqrt{2} < 2$ , 故点  $P$  的轨迹不存在; 对于②, 到定点  $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$  距离相等的点的轨迹是线段  $F_1F_2$  的垂直平分线 ( $y$  轴); 对于③, 点  $M(6, 3)$  到定点  $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$  的距离之和为  $3\sqrt{10} + 3\sqrt{2} > 6$ , 故点  $P$  的轨迹为椭圆. 故填③.

11.  $\frac{2019}{1009}$  【解析】依题意, 椭圆的长轴长为 4. 设  $S = |F_1A| + |F_1P_1| + |F_1P_2| + \dots + |F_1P_{2017}| + |F_1B|$  ①, 则  $S = |F_1B| + |F_1P_{2017}| + \dots + |F_1P_2| + |F_1P_1| + |F_1A|$  ②, 由①+②得  $2S = (|F_1A| + |F_1B|) + (|F_1P_1| + |F_1P_{2017}|) + \dots + (|F_1P_{2017}| + |F_1P_1|) + (|F_1B| + |F_1A|) = 2019 \times 4$ ,  $\therefore S = 4038$ ,  $\therefore \frac{1}{2018}(|F_1A| + |F_1P_1| + |F_1P_2| + \dots + |F_1P_{2017}| + |F_1B|) = \frac{1}{2018}S = \frac{2019}{1009}$ .

12. 解: (1) 由  $M$  的纵坐标为 2, 得  $\frac{8x^2}{81} + \frac{4}{36} = 1$ , 即  $x^2 = 9$ ,  $\therefore x = \pm 3$ , 即  $M$  的横坐标为 3 或  $-3$ .

(2) 椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦点在  $x$  轴上且  $c^2 = 9 - 4 = 5$ . 设所求椭圆的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 5} = 1 (a^2 > 5)$ , 把  $M$  点坐标代入椭圆方程得  $\frac{9}{a^2} + \frac{4}{a^2 - 5} = 1$ , 解得  $a^2 = 15$  ( $a^2 = 3$  舍去). 故所求椭圆的方程为  $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$ .

13. 解: 设  $P(x, y)$ , 由题意得  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ \frac{y^2}{45} + \frac{x^2}{20} = 1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = \pm 4, \\ y = \pm 3, \end{cases}$   $\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(4, 3), (-4, 3), (4, -$