



全品学练考

LEARN  PRACTISE  TEST

导 学 案

高中数学
选修2-3 新课标 (RJA)

主编：肖德好

本册主编：敬本善

副主编：张 冰

编 者：敬本善 张 冰 孙广仁 刘 冰
王 平 袁玮琼 邓永生 肖 宏

特约主审：赵 博 杨 帆 陈伟强

全品的告白 (代序)

我们只是一线的传递员

课堂是纯净之天籁，静静聆听，动人之处无处不在……



备新课

全方面解读教学目标，研读大量的教学资料，设计全方位教学过程，准备详尽的教学内容。

上新课

用不同方法处理教材，课堂讲解追寻到源头，用不同理念引导学生，教学互动探究到根本。

检新课

批改课时作业和考卷，整理学生的疑惑易错，制订教学计划并实施，评价新课的教学效果。

理解是种态度，理解是种尊重。

教辅无声之课堂，细细品味，美妙之处比比皆是……

全品学练考

导学案

预习教材→探究教材
↓
当堂检测←例题讲评

重点节次细分课时
重点考点多元讲评

练习册

标准训练
+
难点突破

练规范、练速度、练效率
析错因、找方法、针对练

测评卷

标准题型 + 全面考点 + 热点考向

学习是种探索，学习是种坚持。

产品与服务

数学·选修2-3·新课标(RJA)

《全品学练考》



Contents

目录 | 总目录

第一章 计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理	导 1 / 练 37
第 1 课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的概念	导 1 / 练 37
第 2 课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的运用	导 2 / 练 39
1.2 排列与组合	导 4 / 练 41
1.2.1 排列	导 4 / 练 41
第 1 课时 排列的概念及排列数公式	导 4 / 练 41
第 2 课时 排列应用问题	导 6 / 练 43
1.2.2 组合	导 7 / 练 45
第 1 课时 组合的概念及组合数公式	导 7 / 练 45
第 2 课时 组合应用问题	导 9 / 练 47
► 滚动习题(一) [范围 1.1 ~ 1.2]	练 49
1.3 二项式定理	导 10 / 练 51
1.3.1 二项式定理	导 10 / 练 51
1.3.2 “杨辉三角”与二项式系数的性质	导 12 / 练 53
► 本章总结提升	导 14
► 滚动习题(二) [范围 1.1 ~ 1.3]	练 55

第二章 随机变量及其分布

2.1 离散型随机变量及其分布列	导 15 / 练 57
2.1.1 离散型随机变量	导 15 / 练 57
2.1.2 离散型随机变量的分布列	导 15 / 练 57
2.2 二项分布及其应用	导 18 / 练 59

2.2.1 条件概率	导 18 / 练 59
2.2.2 事件的相互独立性	导 19 / 练 61
2.2.3 独立重复试验与二项分布	导 21 / 练 63
▶ 滚动习题(三) [范围 2.1~2.2]	练 65
2.3 离散型随机变量的均值与方差	导 22 / 练 67
2.3.1 离散型随机变量的均值	导 22 / 练 67
2.3.2 离散型随机变量的方差	导 24 / 练 69
2.4 正态分布	导 25 / 练 71
▶ 本章总结提升	导 27
▶ 滚动习题(四) [范围 2.1~2.4]	练 73
第三章 统计案例	
3.1 回归分析的基本思想及其初步应用	导 29 / 练 75
3.2 独立性检验的基本思想及其初步应用	导 32 / 练 77
▶ 本章总结提升	导 35
▶ 滚动习题(五) [范围 3.1~3.2]	练 79
参考答案(导学案)	卷 17
参考答案(练习册)	卷 25

测评卷

单元测评(一) [第一章]	卷 1	模块终结测评(一)	卷 9
单元测评(二)A [第二章]	卷 3	模块终结测评(二)	卷 11
单元测评(二)B [第二章]	卷 5		
单元测评(三) [第三章]	卷 7	参考答案	卷 13

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的概念

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点一 分类加法计数原理

定义:完成一件事有_____不同的方案,在第1类方案中有_____种不同的方法,在第2类方案中有_____种不同的方法,那么完成这件事共有 $N =$ _____种不同的方法.

[思考] (1)在分类加法计数原理中,两类不同方案中的方法可以相同吗?

(2)同学甲有不同的语文参考书5本,不同的数学参考书6本.现在同学乙想向甲借其中的任意一本书,此问题怎么解决?有多少种不同的借法?

.....

► 知识点二 分步乘法计数原理

定义:完成一件事需要_____步骤,做第1步有_____种不同的方法,做第2步有_____种不同的方法,那么完成这件事共有 $N =$ _____种不同的方法.

[思考] 同学甲有不同的语文参考书5本,不同的数学参考书6本.现在同学乙想向甲借语文、数学参考书各一本,此问题怎么解决?有多少种不同的借法?

.....

考点类析

考点全息 深度挖掘

► 考点一 分类加法计数原理的应用

例1 (1)一个科技小组有3名男同学,5名女同学,从中任选1名同学参加学科竞赛,不同的选派方法共有_____种.

(2)在所有的两位数中,个位数小于十位数的两位数共有_____个.

► 考点二 分步乘法计数原理的应用

例2 (1)在平面直角坐标系内,若点 $P(x,y)$ 的横、纵坐标均在 $\{0,1,2,3\}$ 内取值,则不同的点 P 有_____个.

(2)人们习惯把最后一位是6的多位数叫作“吉祥数”,则无重复数字的四位吉祥数(首位不能是零)共有_____个.

(3)从 $-1,0,1,2$ 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的各项的系数,可组成不同的二次函数共_____个,其中不同的偶函数有_____个.(用数字作答)

► 考点三 两个计数原理的综合应用

[导入] (1)对事件进行分解时,怎样区分是分类,还是分步?

(2)怎样分类、分步,才能做到不重不漏?

.....

例3 现从高一年级的四个班的学生中选34人,其中一、二、三、四班各7人、8人、9人、10人,组成数学课外小组.

(1)从中选1人为负责人,有多少种不同的选法?

(2)每班选1名组长,有多少种不同的选法?

(3)从中推选2人发言,这2人需来自不同的班级,有多少种不同的选法?

.....

.....

.....

【变式】集合 $A=\{1,2,-3\}$, $B=\{-1,-2,3,4\}$, 从 A, B 中各取 1 个元素, 作为点 $P(x,y)$ 的坐标.

(1) 可以得到多少个不同的点?

(2) 这些点中, 位于第一象限的有几个?

.....

.....

.....

.....

.....

【拓展】某外语组有 9 人, 每人至少会英语和日语中的一门, 其中 7 人会英语, 3 人会日语, 从中选出会英语和会日语的各 1 人到边远地区支教, 有多少种不同的选法?

.....

.....

.....

.....

.....

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 从 A 地到 B 地, 可乘汽车、火车、轮船三种交通工具, 如果一天内汽车发 3 次, 火车发 4 次, 轮船发 2 次, 那么一天内乘坐这三种交通工具的不同走法数为 ()
A. $1+1+1=3$ B. $3+4+2=9$
C. $3 \times 4 \times 2=24$ D. 以上都不对
2. 已知 $x \in \{2, 3, 7\}$, $y \in \{-31, -24, 4\}$, 则 xy 的不同的值的个数是 ()
A. 2 B. 3 C. 6 D. 9
3. 某公司员工义务献血, 在体检合格的人中, O 型血有 10 人, A 型血有 5 人, B 型血有 8 人, AB 型血有 3 人. 从 4 种血型的人中各选 1 人去献血, 不同的选法种数为 ()
A. 1200 B. 600
C. 300 D. 26
4. 把 5 枚相同的纪念邮票和 8 枚相同的纪念币作为礼品送给甲、乙两名学生, 要求全部分完且每人至少有一件礼品, 则不同的分法共有 ()
A. 52 种 B. 40 种 C. 38 种 D. 11 种
5. 如果 $x, y \in \mathbf{N}$, 且 $1 \leq x \leq 3$, $x+y < 7$, 则满足条件的不同的有序自然数对 (x, y) 的个数是 ()
A. 15 B. 12 C. 5 D. 4

第 2 课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的运用

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点 两个计数原理的联系与区别

	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
联系	都是解决求完成一件事不同的 _____ 问题, 都是对复杂事件的 _____	
区别	完成一件事情, 共有 n 类办法, 关键是“分类”	完成一件事情, 共有 n 个步骤, 关键是“分步”
	各类方法相互独立	各个步骤中的方法相互依存
	任何一类方法 _____ 这件事	各个步骤都完成 _____ 这件事
	可利用“ _____ ”电路来理解	可利用“ _____ ”电路来理解

【思考】以下对两个计数原理的理解是否正确?

(1) 在分类加法计数原理中, 两类不同方案中的方法可以

相同. ()

(2) 在分类加法计数原理中, 每类方案中的方法都能直接完成这件事. ()

(3) 在分步乘法计数原理中, 完成每个步骤的方法是各不相同的. ()

(4) 在分步乘法计数原理中, 事情是分两步完成的, 其中任何一个单独的步骤都能完成这件事. ()

考点类析

考点全息 深度挖掘

► 考点一 运用两个原理解决含有限制条件的实际问题

【导入】如何判断一个计数问题是用分步计数原理还是分类计数原理?

.....

.....

例 1 (1) 中国有十二生肖, 又叫十二属相, 每一个人的出生年份对应了十二种动物(鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪)中的一种, 现有十二生肖的吉祥物各一个, 甲同学喜欢牛和马, 乙同学喜欢牛、狗和羊, 丙同学哪个吉祥物都喜欢, 三位同学按甲、乙、丙的顺序依次选一个作为礼物, 如果让三位同学选取的礼物都满意, 那么不同的选法有 ()

A. 360 种 B. 50 种 C. 60 种 D. 90 种

(2) 一植物园的参观路径如图 1-1-1 所示, 若要全部参观并且路线不重复, 则不同的参观路线共有 ()

A. 6 种
B. 8 种
C. 36 种
D. 48 种

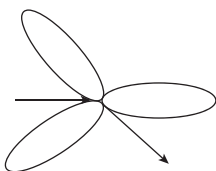


图 1-1-1

【变式】 若一系列函数的解析式相同, 值域相同, 但其定义域不同, 则称这些函数为“同族函数”, 那么函数解析式为 $y=x^2$, 值域为 $\{1, 4\}$ 的“同族函数”共有 ()

A. 7 个 B. 8 个
C. 9 个 D. 10 个

【拓展】 如图 1-1-2 所示, 在连接正八边形的三个顶点而成的三角形中, 与正八边形有公共边的三角形有 _____ 个.

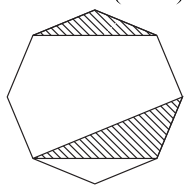


图 1-1-2

► 考点二 占位模型中标准的选择

【导入】 在占位模型中有两类对象: 元素与位置. 解题时怎样选择按元素还是按位置进行分解?

例 2 (1) 4 名同学选报跑步、跳高、跳远三个项目, 每人报一项, 共有多少种报名方法?

(2) 4 名同学选报跑步、跳高、跳远三个项目, 每项限报一人, 且每人至多报一项, 共有多少种报名方法?

(3) 4 名同学争夺跑步、跳高、跳远三项冠军, 共有多少种可能的结果?

【变式】 巧克力工厂为了庆祝成立 10 周年, 推出了三种不同的卡片, 在每块巧克力包装中随机装入一张卡片, 集齐三种卡片即可获得参观巧克力工厂的机会, 查理在不同时间一共买了五块巧克力.

(1) 查理由五块巧克力得到的卡片共有多少种情况?

(2) 查理能够获得参观巧克力工厂的机会共有多少种情况?

【拓展】 如果一个三位正整数 $a_1a_2a_3$, 满足 $a_1 < a_2$ 且 $a_2 > a_3$, 则称这样的三位数为凸数(如 120, 343, 275 等), 那么所有凸数的个数为 ()

A. 240 B. 204
C. 729 D. 920

► 考点三 涂色问题

【导入】 (1) 涂色问题中的基本要求是什么?

(2) 怎样解决涂色问题中的计数方法?

例 3 如图 1-1-3 所示, 有 A, B, C, D 四个区域, 用红、黄、蓝三种颜色涂色, 要求任意两个相邻区域的颜色各不相同, 共有 _____ 种不同的涂法.

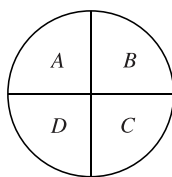


图 1-1-3

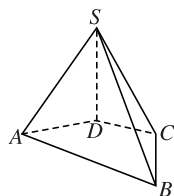


图 1-1-4

【变式】 如图 1-1-4 所示, 将一个四棱锥的每一个顶点染上 1 种颜色, 并使同一条棱上的两个端点异色, 如果只有 5 种颜色可供使用, 则不同染色方法的种数为 _____.

【拓展】 一个同心圆形花坛, 分为两部分, 中间小圆部分种植草坪和绿色灌木, 周围的圆环分为 $n(n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$ 等份, 种植红、黄、蓝三色不同的花, 要求相邻两部分种植不同颜色的花.

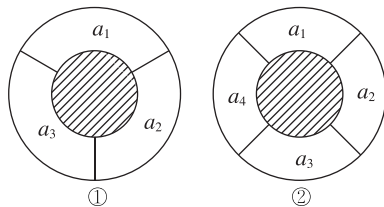


图 1-1-5

(1) 如图 1-1-5①, 圆环分成 3 等份, 分别为 a_1, a_2, a_3 , 则有多少种不同的种植方法?

(2) 如图 1-1-5②, 圆环分成 4 等份, 分别为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 则有多少种不同的种植方法?

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 某班有男生 26 人,女生 24 人,从中选 1 人为数学课代表,则不同选法的种数为 ()
- A. 50 B. 26 C. 24 D. 616

2. 从集合 $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 中任意选出三个不同的数,使这三个数成等比数列,这样的等比数列的个数为 ()
- A. 3 B. 4
C. 6 D. 8
3. 某市汽车牌照号码可以上网自编,但规定从左数第 2 个号码只能从字母 B, C, D 中选择,其他四个号码可以从 $0 \sim 9$ 这 10 个数字中选择(数字可以重复).若某车主第 1 个号码(从左到右)只想在数字 $3, 5, 6, 8, 9$ 中选择,其他号码只想在 $1, 3, 6, 9$ 中选择,则他可选的车牌号码的所有可能情况有 ()
- A. 180 种 B. 360 种
C. 720 种 D. 960 种
4. 如图 1-1-6 所示,用 6 种不同的颜色给图中的 4 个格子涂色,每个格子涂一种颜色,要求相邻的两个格子颜色不同,则不同的涂色方法共有 _____ 种.(用数字作答)

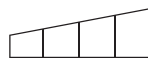


图 1-1-6

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

第 1 课时 排列的概念及排列数公式

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点一 排列及其特征

1. 排列:一般地,从 _____ 个不同元素中取出 $m (m \leq n)$ 个元素,按照 _____ 排成一行,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.
2. 由排列的定义可知,排列与元素的 _____ 有关,也就是说与位置有关的问题才能归结为排列问题.

[思考] (1)同一个排列中,同一个元素能重复出现吗?

(2)定义中的“按一定顺序”怎么理解?

[探究] 从甲、乙、丙三位同学中选举两人担任正副班长,有多少种不同的选法?与顺序有关吗?

► 知识点二 排列数与排列数公式

1. 排列数:从 _____ 个不同元素中取出 _____ ($m \leq n$) 个元素的所有不同排列的个数,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 _____ 表示.

[思考] “排列”和“排列数”有什么区别?

2. 排列数公式: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$, 其中 $n, m \in \mathbf{N}^*$, 且 $m \leq n$.
3. 全排列: n 个不同元素全部取出的一个排列,叫作 n 个元素的一个全排列.这时公式中 $m=n$, 即 $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.
4. 阶乘:正整数 1 到 n 的连乘积,叫作 n 的阶乘,用 $n!$ 表示.所以 n 个不同元素的全排列数公式可以写成 $A_n^n = n!$. 另外,我们规定 $0! = 1$. 因此排列数公式还可以写成

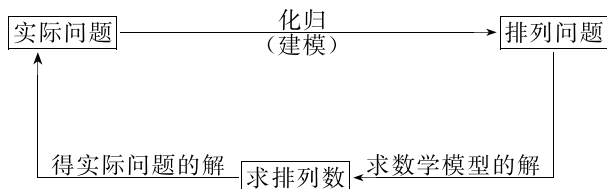
第 2 课时 排列应用问题

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点 排列应用问题

1. 解简单的排列应用问题首先必须认真分析题意,看能否把问题归结为排列问题,即是否满足排列定义中的三个条件(备取元素:互不相同;取出元素:没有重复;按一定顺序排成一列),特别是有顺序.
2. 求排列应用题时,要学会常见条件的应用,根据条件从元素和位置两个方面入手,正确运用分类加法计数原理和分步乘法计数原理.分类时,要注意各类之间不重复、不遗漏.分步时,要注意依次做完各个步骤后,事情才能完成.如果不符合条件的情况较少时,也可以采用排除法.
3. 记住一些常见条件的处理方式,对提高解题能力有很大的帮助.
4. 解排列应用问题的基本思路如图所示:



考点类析

考点全息 深度挖掘

► 考点一 排队问题

[导入] (1)排队问题的特点是什么? 解题时应怎样分析?
(2)排队问题中相邻、不相邻、定序应怎样解决?

例 1 3 名女生和 5 名男生排成一排.

- (1)如果女生全排在一起,有多少种不同排法?
- (2)如果女生都不相邻,有多少种不同排法?
- (3)其中甲必须排在乙前面(可不邻),有多少种不同排法?
- (4)如果女生不站两端,有多少种不同排法?

【变式】 分别求出符合下列要求的不同排法的种数.

- (1)6 名学生排 3 排,前排 1 人,中排 2 人,后排 3 人;
- (2)6 名学生排成一排,甲不在排头也不在排尾;
- (3)6 人排成一排,甲、乙不相邻.

拓展 两家夫妇各带一个小孩一起到动物园游玩,购票后排队依次入园,为安全起见,队伍的首尾一定要排两位爸爸,另外,两个小孩一定要排在一起,则这六个人入园顺序的排法种数为 ()

- A. 48 B. 36 C. 24 D. 12

► 考点二 排数问题

[导入] 排数问题的特点是什么? 解题时怎样分析?

例 2 有 0,1,2,3,4,5 这六个数字.

- (1)能组成多少个无重复数字的四位偶数?
- (2)能组成多少个奇数数字互不相邻的六位数(无重复数字)?

【变式】 用 0,1,2,3,4,5 这六个数字,可以组成多少个符合下列条件的无重复数字的自然数?

- (1)含有 2,3,但它们不相邻的五位数;
- (2)含有 1,2,3,且 1,2,3 必须按照由大到小的顺序排列的六位数.

拓展 由 1,2,3,4,5 这五个数字组成的没有重复数字的五位数排成一递增数列,则首项为 12 345,第 2 项是 12 354, ..., 末项(第 120 项)是 54 321. 问:43 251 是第几项?

拓展 某电视节目的主持人邀请年龄互不相同的 5 位嘉宾逐个出场亮相.

(1)其中有 3 位老者要按年龄从大到小的顺序出场,出场顺序有多少种?

(2)3 位老者与 2 位年轻人都要分别按年龄从大到小的顺序出场,出场顺序有多少种?

► 考点三 排列的综合应用

[导入] 排列综合问题的解决,一方面要准确理解题意,找到对元素及位置的限制条件,另一方面要根据条件对事件进行合理的分解(分类、分步),另外要注意条件间的影响,做到不重不漏.

例 3 从数字 0,1,3,5,7 中取出不同的 3 个数作系数,可以组成多少个不同的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$? 其中有实根的方程有多少个?

【变式】 把 5 件不同的产品摆成一排,若产品 A 与产品 B 相邻,且产品 A 与产品 C 不相邻,则不同的摆法有多少种?

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

- 7 个人并排站成一行,如果甲、乙两人不相邻,那么不同的排法有 ()
A. 1440 种 B. 3600 种
C. 4820 种 D. 4800 种
- 6 名同学排成一排,其中甲、乙必须排在一起的不同排法共有 ()
A. 720 种 B. 360 种 C. 240 种 D. 120 种
- 世界华商大会的某分会场有 A, B, C 三个展台,将甲、乙、丙、丁共四名“双语”志愿者分配到这三个展台,每个展台至少一人,其中甲、乙两人被分配到同一展台的分配方法有 ()
A. 12 种 B. 10 种 C. 8 种 D. 6 种
- 从数字 0,1,2,3,4 中选出 4 个数组成无重复数字的四位数,比 2340 小的四位数共有 ()
A. 20 个 B. 32 个 C. 36 个 D. 40 个
- 从 0,1,2,3,4 这 5 个数字中选出 3 个组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有 _____ 个.

1.2.2 组合

第 1 课时 组合的概念及组合数公式

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点一 组合

定义:一般地,从 _____ 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素 _____,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

[思考] 排列与组合有什么共同点和不同点?

[讨论] 判断下列问题是组合问题还是排列问题.

- 从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 人分别担任班长和团支书;
- 从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 人去参加学生代表大会.

[探究] “abc”与“bca”是相同的排列吗? 它们是相同的组合吗?

► 知识点二 组合数与组合数公式

1. 组合数:从 n 个不同元素中取出 m ($m \leq n$) 个元素的所有不同组合的个数,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示.
2. 组合数公式:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ 其}$$

中 $n, m \in \mathbf{N}^*$, 且 $m \leq n$.

[思考] 组合数公式的推导方法对我们解题有何启发?

[探究] 写出从 4 个不同元素 a, b, c, d 中取出 3 个元素的组合,再由组合写出相应的排列,指出 C_4^3 与 A_4^3 的关系.

► 知识点三 组合数的性质

性质 1: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

性质 2: $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

[思考] 怎样计算 C_{10}^8 ?

[讨论] 判断下列结论是否正确.

(1) 若 $A_n^m = A_n^k$, 则 $m = k$; (2) 若 $C_n^m = C_n^k$, 则 $m = k$.

考点类析

考点全息 深度挖掘

► 考点一 对组合概念的理解

例 1 给出下列问题:

- (1) 在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线上,有多少种不同的飞机票?
- (2) 在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线上,有多少种不同的飞机票价?(往返票价相同)
- (3) a, b, c, d 四支足球队之间进行单循环比赛,共需比赛多少场?
- (4) a, b, c, d 四支足球队争夺冠、亚军,有多少种不同的结果?
- (5) 从全班 40 人中选出 3 人分别担任班长、副班长、学习委员三个职务,有多少种不同的选法?
- (6) 从全班 40 人中选出 3 人参加某项劳动,有多少种不同的选法?

在上述问题中,哪些是组合问题? 哪些是排列问题?

► 考点二 组合数公式及其应用

例 2 (1) 计算: $3C_8^3 - 2C_5^2$.

(2) 计算: $C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}$.

(3) 计算: $C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_{10}^3$.

(4) 证明: $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$.

► 考点三 组合的简单应用

例 3 (1) 集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的含有 3 个元素的子集的个数是 ()

A. 4 B. 5 C. 7 D. 8

(2) 五个点中任何三点都不共线,则这五个点可以连成 _____ 条线段;如果有向线段,共有 _____ 条.

(3) 有 10 名教师,其中 6 名男教师,4 名女教师.

① 现要从中选 2 名去参加会议,有 _____ 种不同的选法;

② 现要从中选出男、女教师各 2 名去参加会议,有 _____ 种不同的选法.

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 下列等式不正确的是 ()
 - A. $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$
 - B. $C_n^m = C_n^{n-m}$
 - C. $C_n^m = \frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^{m+1}$
 - D. $C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$
2. 若 $C_n^2 = 28$, 则 n 的值为 ()
 - A. 9
 - B. 8
 - C. 7
 - D. 6
3. 在 $\angle AOB$ 的 OA 边上取 m 个点,在 OB 边上取 n 个点(均除 O 点外),连同 O 点共 $(m+n+1)$ 个点,现任取其中三个点为顶点作三角形,可作出的三角形的个数为 ()
 - A. $C_{m+1}^1 C_n^2 + C_{n+1}^1 C_m^2$
 - B. $C_n^1 C_n^2 + C_n^1 C_m^2$
 - C. $C_m^1 C_n^2 + C_n^1 C_m^2 + C_m^1 C_n^1$
 - D. $C_m^1 C_{n+1}^2 + C_n^1 C_{m+1}^2$
4. 有 4 名男医生、3 名女医生,从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成 1 个医疗小组,则不同的选法共有 _____ 种.
5. 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S ,其中由 3 个元素组成的子集数为 T ,则 $\frac{T}{S}$ 的值为 _____.

第2课时 组合应用问题

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点 组合应用问题

1. 无限制条件的组合应用题的解法步骤为:判断(组合问题);转化(组合模型);求值(组合数);作答.
2. 有限制条件的组合应用题的解法:
组合问题与顺序无关,组合问题的限制条件往往是对被取元素进行分类,将被取元素分为两类,按每类取出元素的多少对事件分解,常用解法有直接法、间接法.
3. “分组”与“分配”问题的解法:
(1)分组问题属于“组合”问题,常见的分组问题有三种:
①完全均匀分组,每组的元素个数均相等,共分为 m 组,最后必须除以 $m!$;
②部分均匀分组,应注意不要重复,若有 n 组元素是均匀分组,最后必须除以 $n!$;
③完全非均匀分组,这种分组不考虑重复现象.
(2)分配问题属于“排列”问题,分配问题可以按要求逐个分配,也可以分组后再分配.
4. 排列与组合的综合应用问题的解法:
(1)审清题意,区分哪是排列,哪是组合;
(2)往往综合问题会有多个限制条件,应认真分析确定分类还是分步;
(3)先取后排是解决综合问题的基本顺序.

考点类析

考点全息 深度挖掘

► 考点一 有条件的组合问题

[导入] 有条件限制的排列组合问题,通常有直接法和间接法.其中包括特殊元素有限安排的策略、相邻问题捆绑处理的策略、不相邻问题插空处理的策略、定序问题除序处理的策略等.

例1 有男运动员6名,女运动员4名,其中男女队长各1名.选派5人外出比赛,按下列要求各有多少种选派方法?

- (1)男运动员3名,女运动员2名;
- (2)至少有1名女运动员;
- (3)至少有1名队长参加;
- (4)既要有队长,又要有女运动员.

【变式】 有9名学生,其中2名学生会下象棋但不会下围棋,3名学生会下围棋但不会下象棋,4名学生既会下围棋又会下象棋.现在要从这9名学生中选出2名学生,1名参加象棋比赛,另1名参加围棋比赛,共有_____种不同的选派方法.

【拓展】 (1)四面体的1个顶点为 A ,从其他顶点和各棱的中点中取3个点,使它们和点 A 在同一平面上,有多少种不同的取法?

(2)四面体的顶点和各棱的中点共有10个点,在其中取4个不共面的点,有多少种不同的取法?

► 考点二 分组、分配问题

例2 按下列要求分配6本不同的书,问:各有多少种不同的分配方法?

- (1)分成3份,1份1本,1份2本,1份3本;
- (2)甲、乙、丙3人中,一人得1本,一人得2本,一人得3本;
- (3)平均分成3份,每份2本;
- (4)平均分配给甲、乙、丙3人,每人2本;
- (5)分成3份,1份4本,另外2份每份1本;
- (6)甲、乙、丙3人中,一人得4本,另外两人每人得1本;
- (7)甲得1本,乙得1本,丙得4本.

【变式】 将4名大学生分配到3个乡镇去当村官,每个乡镇至少1名,则不同的分配方案共有_____种.

【拓展】 有4个不同的球,4个不同的盒子,把球全部放入盒内.

- (1)恰有1个盒内不放球,共有几种放法?
- (2)恰有2个盒内不放球,共有几种放法?

► 考点三 排列、组合的综合应用

例 3 有 5 个男生和 3 个女生,从中选出 5 人担任 5 门不同学科的课代表,求符合下列条件的选法数.

- (1)有女生但人数必须少于男生;
- (2)某女生一定担任语文课代表;
- (3)某男生必须包括在内,但不担任数学课代表;
- (4)某女生一定要担任语文课代表,某男生必须担任课代表,但不担任数学课代表.

【变式】有 4 张分别标有数字 1,2,3,4 的红色卡片和 4 张分别标有数字 1,2,3,4 的蓝色卡片,从这 8 张卡片中随机取出 4 张卡片排成一行.若取出的 4 张卡片所标数字之和等于 10,则有多少种不同的排法?

拓展 已知 10 件不同的产品中有 4 件是次品,现对它们进行一一测试,直至找出所有次品为止.

- (1)若恰在第 5 次测试才测试到第一件次品,第 10 次测试才找到最后一件次品,则这样的不同测试方法数是多少?
- (2)若恰在第 5 次测试后,就找出了所有次品,则这样的不同测试方法数是多少?

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 有 6 名男医生、5 名女医生,从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组,则不同的选法共有 ()
A. 60 种 B. 70 种 C. 75 种 D. 150 种
2. 从 7 名志愿者中安排 6 人在周六、周日两天参加社区公益活动.若每天安排 3 人,则不同的安排方案共有 ()
A. 70 种 B. 140 种 C. 120 种 D. 240 种
3. 某中学要从 4 名男生和 3 名女生中选 4 人参加公益活动,若男生甲和女生乙不能同时参加,则不同的选派方案共有 ()
A. 25 种 B. 35 种 C. 820 种 D. 840 种
4. 5 个工程队承建某项工程的 5 个不同的子项目,每个工程队承建 1 个子项目,其中甲工程队不能承建一号子项目,则不同的承建方案共有 ()
A. $C_4^1 C_4^1$ 种 B. $C_4^1 A_4^1$ 种
C. C_4^1 种 D. A_4^1 种
5. 2017 年 5 月 20 日全国铁人三项赛在国家 4A 级风景区睢县北湖畔举行,为服务铁人三项赛,将 6 位志愿者分成 4 组,其中 2 个组各 2 人,另外 2 个组各 1 人,分配到铁人三项赛的四个不同地段服务,则不同的分配方案有 ()
A. 45 种 B. 90 种
C. 1080 种 D. 540 种

1.3 二项式定理

1.3.1 二项式定理

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点一 二项式定理

二项式定理: $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1)项数: n 次二项展开式共有 _____ 项.

(2)次数: 字母 a 的次数从 n 逐项递减到 0, 是 _____; 字母 b 的次数从 0 逐项递增到 n , 是 _____; 各项次数和均为二项式的次数 n .

(3)二项式系数: $C_n^k (k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\})$ 叫作(第 $k+1$ 项的)二项式系数.

(2) $(1+2x)^3(1-x)^4$ 的展开式中, 含 x 项的系数为 ()

- A. 10 B. -10
C. 2 D. -2

(3) $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为 _____
(用数字作答).

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. $1-2C_n^1+4C_n^2-8C_n^3+\cdots+(-2)^nC_n^n$ 等于 ()

- A. 1 B. -1
C. $(-1)^n$ D. 3^n

2. 已知 n 为等差数列 $-4, -2, 0, \cdots$ 的第六项, 则 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^n$

的二项展开式的常数项是 ()

- A. 20 B. 60
C. 160 D. 240

3. $(1+2x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数等于 ()

- A. 80 B. 40
C. 20 D. 10

4. 在 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$ 的展开式中, x 的幂指数是整数的项共有 ()

- A. 3 项 B. 4 项
C. 5 项 D. 6 项

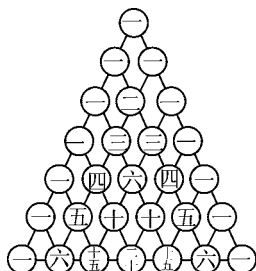
5. 若 $(x+a)^{10}$ 的展开式中 x^7 的系数为 15, 则 $a=$ _____.

1.3.2 “杨辉三角”与二项式系数的性质

预习探究

梳理教材 探究疑难

► 知识点一 二项式系数表(杨辉三角)



1. 上述数表是我国南宋数学家杨辉在 1261 年所著的《详解九章算法》一书中最先提出的, 是我国古代数学的一个重要成果, 比欧洲早五百年左右, 我们把这个数表称为 _____.

2. 从第一项起至中间项, 二项式系数 _____, 随后又 _____.

3. 表中每行两端都是 1, 而且除 1 以外的每一个数都等于它肩上 _____.

► 知识点二 二项式系数的性质

1. 对称性. 与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等 ($C_n^m = C_n^{n-m}$).

2. 增减性与最大值. 二项式系数先递增再递减, 中间最大.

3. 各二项式系数的和.

已知 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^rx^r + \cdots + C_n^nx^n$,

令 $x=1$, 则 $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^r + \cdots + C_n^n$.

[思考] 二项式系数的增减性如何?

[探究] 什么时候二项式系数最大?

考点类析

考点全息 深度挖掘

► 考点一 二项式系数的性质

例 1 设 m 为正整数, $(x+y)^{2m}$ 的展开式的二项式系数的最大值为 a , $(x+y)^{2m+1}$ 的展开式的二项式系数的最大值为 b , 若 $13a=7b$, 则 $m=$ ()

- A. 5 B. 6
C. 7 D. 8

例 2 在 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^8$ 的展开式中:

(1) 系数绝对值最大的项是第几项?

(2) 求二项式系数最大的项.

(3) 求系数最大的项.

(4) 求系数最小的项.

► 考点二 二项式系数和的应用

例 3 设 $(2+\sqrt{3}x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 求下列各式的值.

(1) a_0 ;

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$;

(3) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}$;

(4) $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100})^2 - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})^2$;

(5) $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{100}|$.

例 4 已知 $(x^2 - 2x - 3)^{10} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{20}(x-1)^{20}$.

(1) 求 a_2 的值;

(2) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}$ 的值;

(3) 求 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}$ 的值.

► 考点三 二项式定理的综合应用

[导入] 整除或求余数问题有什么处理方法?

例 5 (1) 证明: $8^{51} - 1$ 能被 7 整除.

(2) 试求 2019^{10} 除以 8 的余数.

(3) 求证: $3^{2n+2} - 8n - 9 (n \in \mathbf{N}^*)$ 能被 64 整除.

【变式】 已知 $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{5n-1}$ 能被 31 整除.

【拓展】 用二项式定理证明: $n^{n-1} - 1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除. ($n \geq 3, n \in \mathbf{N}_+$)

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

- $(1+x)^{2n+1}$ 的展开式中, 二项式系数最大的项的项数是 ()
A. $n, n+1$ B. $n-1, n$
C. $n+1, n+2$ D. $n+2, n+3$
- 在 $(x+y)^n$ 的展开式中, 第 4 项与第 8 项的系数相等, 则展开式中系数最大的项是 ()
A. 第 6 项 B. 第 5 项
C. 第 5, 6 项 D. 第 6, 7 项
- 若 $(x+3y)^n$ 的展开式中所有项的系数之和等于 $(7a+b)^{10}$ 的展开式的二项式系数之和, 则 n 的值为 ()
A. 15 B. 10
C. 8 D. 5
- 设 $(2x-3)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ 的值为 ()
A. 1 B. 16
C. -15 D. 15
- 已知 $(\frac{1}{4} + 2x)^n$ 的展开式中前三项的二项式系数的和等于 37, 则展开式中二项式系数最大的项的系数为 _____.
- 91^{92} 除以 100 的余数为 _____.

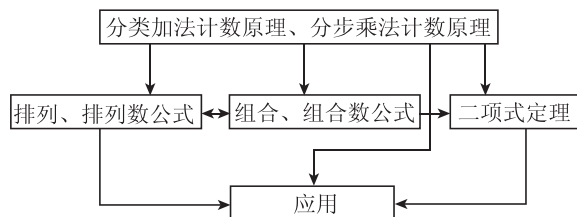


本章总结提升

单元回眸

构建网络 高屋建瓴

【知识网络】



【知识辨析】

判断下列说法是否正确。(请在括号中填写“√”或“×”)

- (1) 在分步乘法计数原理中,事情是分两步完成的,其中任何一个单独的步骤都能完成这件事. ()
- (2) 三个人踢毽子,互相传递,每人每次只能踢一下,由甲开始踢,经过 5 次传递后,毽子又被踢回给甲,则不同的传递方式共有 10 种. ()
- (3) 若组合式 $C_n^x = C_n^m$, 则 $x=m$ 成立. ()
- (4) 由 0,1,2,3 这四个数字组成的四位数中,有重复数字的四位数共有 $3 \times 4^3 - A_4^4 = 168$ (个). ()
- (5) 若 $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + \dots + a_1x + a_0$, 则 $a_7 + a_6 + \dots + a_1$ 的值为 128. ()
- (6) 若 $\left(x + \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中,仅有第 5 项的二项式系数最大,且 x^4 的系数为 7,则实数 $a = \frac{1}{2}$. ()

整合创新

提炼方法 融会贯通

► 题型一 分类加法计数原理和分步乘法计数原理

[类型总述] 利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决实际的计数问题.

例 1 (1) 如图 T1-1, 小明从街道的 E 处出发, 先到 F 处与小红会合, 再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动, 则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为



图 T1-1

- A. 24 B. 18
C. 12 D. 9

(2) 若电视台在电视剧开播之前要连续播放 6 个不同的广告, 其中 4 个商业广告、2 个公益广告, 现要求 2 个公益广告不能连续播放, 则不同的播放方式的种数为 ()

- A. $A_4^4 A_2^2$ B. $C_4^1 C_5^2$
C. $A_6^6 A_7^2$ D. $C_6^4 C_7^2$

► 题型二 排列组合应用问题

[类型总述] (1) 排列应用问题; (2) 组合应用问题; (3) 排列组合的综合应用.

例 2 (1) 安排 3 名志愿者完成 4 项工作, 每人至少完成 1 项, 每项工作由 1 人完成, 则不同的安排方式共有 ()

- A. 12 种 B. 18 种
C. 24 种 D. 36 种

(2) 用数字 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有 _____ 个. (用数字作答)

【变式】 (1) 从字母 a, b, c, d, e, f 中选出 4 个排成一排, 其中一定要选出 a 和 b , 并且必须相邻 (a 在 b 的前面), 则排列方法共有 ()

- A. 36 种 B. 72 种
C. 90 种 D. 144 种

(2) 从 6 名学生中选出 4 人分别从事 A, B, C, D 四项工作, 若其中甲、乙两人不能从事工作 A, 则不同的选派方案有 ()

- A. 96 种 B. 180 种
C. 240 种 D. 280 种

► 题型三 二项式定理及其应用

[类型总述] (1) 利用二项式定理求指定项(或系数); (2) 利用赋值法求二项式的系数和.

例 3 (1) $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为 ()

- A. 15 B. 20
C. 30 D. 35

(2) 已知 $(1+3x)^n$ 的展开式中含有 x^2 项的系数是 54, 则 $n =$ _____.

(3) 已知多项式 $(x+1)^3(x+2)^2 = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$, 则 $a_4 =$ _____, $a_5 =$ _____.

【变式】 (1) $(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为 ()

- A. -80 B. -40
C. 40 D. 80

(2) 已知 $\left(2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数和为 625, 则展开式中含 x 项的系数为 ()

- A. 216 B. 224
C. 240 D. 250