教与学整体设计

全品学练考

导学案

LEARN PRACTISE TEST

高中数学

选修2-2 新课标（RJA）

主编：肖德好

本册主编：潘立功

编　　者：潘立功　刘　冰　丰振海

宁俊玲　张少城　刘光明

特约主审：赵　博　杨　帆　陈伟强

黄河出版传媒集团

阳光出版社

全品的告白（代序）

我们只是一线的传递员

课堂是纯净之天籁，静静聆听，动人之处无处不在……

备新课 全方面解读教学目标，研读大量的教学资料，设计全方位教学过程，准备详尽的教学内容。

上新课 用不同方法处理教材，课堂讲解追寻到源头，用不同理念引导学生，教学互动探究到根本。

检新课 批改课时作业和考卷，整理学生的疑惑易错，制订教学计划并实施，评价新课的教学效果。

理解是种态度，理解是种尊重。

教辅无声之课堂，细细品味，美妙之处比比皆是……

全品学练考

导学案

预习教材→探究教材
↓
当堂检测←例题讲评

重点节次细分课时
重点考点多元讲评

练习册

标准训练
+
难点突破

练规范、练速度、练效率
析错因、找方法、针对练

测评卷

标准题型＋全面考点＋热点考向

学习是种探索，学习是种坚持。

产品与服务

教

- **教师用书** → 将学生用书、习题详解内容顺排并补充教学设计的内容组成“全品新教案”图书。针对教材梳理,设置了教材拓展方面的结论教师栏目；针对课堂例题,设置了解题方法与技巧类教师备用例题教师栏目；针对课堂总结,设置了本节重难点、易错点归纳以及下节新课预习问题教师栏目，供教师备课参考。 → “全品新教案”（纸质图书）
- **电子教案** → “逐字编辑”PPT导学案配套课件和“Word练习册+测评卷书稿”，供教师备课参考。 → “全品新教案”（电子光盘）

（以上为：教师服务）

学

- **新课学案** → 系统归纳整理基础知识，提炼疑难问题，归类设置典型例题，供学生课前预习与师生课堂互动使用。 → 导学案

练

- **课时习题** → 配套教材节次合理安排课时，16开双面设计课时习题容量，分题型设置训练试题，开缝活页装订。 → 练习册

测

- **滚动习题** → 精心设计45分钟测试容量，16开双面活页装订，用于教师自主组织的滚动复习测评。 → 练习册

考

- **单元测评** → 8开双面容量，夹于书中，既可用于单元结束后的120分钟测评，也可留待模块复习时集中使用。 → 测评卷
- **模块终结测评** → 为地市统一组织的模块终结测评进行热身训练，规范设置题量和测评时间，全真模拟模块测评。 → 测评卷

（以上为：学生用书）

Contents

目录 | 总目录

第一章　导数及其应用

测评卷

导学案 DAO XUE AN

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题

1.1.2　导数的概念

预习探究　　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　函数的平均变化率

一般地,把$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$称为函数 $y=f(x)$从 x_1 到 x_2 的平均变化率.若用 Δx 表示 x_2-x_1,即 $\Delta x=$________,可把 Δx 看作是相对于 x_1 的一个"增量",可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2;类似地,$\Delta y=$__________,于是,平均变化率可以表示为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

[思考] 判断下列说法的正误,正确的打"√",错误的打"×".

(1)增量 Δx,Δy 均为正值.　(　　)

(2)平均变化率一定为正值.　(　　)

[探究] 已知函数 $y=2x^2-3x+5$,求当 $x_1=4$,$x_2=5$ 时,函数值增量 Δy 和平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

▶ 知识点二　瞬时速度

如果物体的运动方程是 $s=s(t)$,那么物体在时刻 t 的瞬时速度 v 就是在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内,当 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限,即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=$__________.

[思考] 判断下列说法的正误,正确的打"√",错误的打"×".

(1)瞬时速度就是平均变化率.　(　　)

(2)瞬时速度是在某一时刻的速度.　(　　)

[探究] 如果某物体的运动方程为 $s=2(1-t^2)$(s 的单位为 m,t 的单位为 s),那么其在 1.2 s 末的瞬时速度是多少?

[讨论] "$\Delta t\to 0$"的意义是什么?

▶ 知识点三　导数的概念

一般地,函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,我们称它为函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数,记作__________,即 $f'(x_0)=$__________.

[思考] 判断下列说法的正误,正确的打"√",错误的打"×".

(1)函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数与 Δx 有关.　(　　)

(2)设 $x=x_0+\Delta x$,则 $\Delta x=x-x_0$,当 Δx 趋近于 0 时,x 趋近于 x_0,因此,$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.　(　　)

[讨论] 导数或瞬时变化率可以反映函数变化的什么特征?

考点类析　　考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　函数的平均变化率

[导入] 请阅读函数平均变化率的定义,并结合图形探究以下问题:

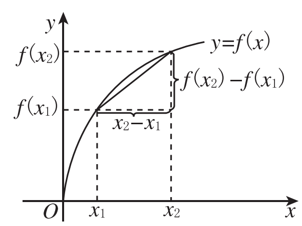


图 1-1-1

(1)表达式中 Δx,Δy 的取值情况是怎样的?

(2)如何计算函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_1$ 附近的平均变化率？

例1 (1)已知函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 $y=f(x)$ 的改变量 Δy 是 (　　)

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

(2)函数 $y=\frac{1}{x}$ 从 $x=1$ 到 $x=2$ 的平均变化率为 (　　)

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

【变式】(1)如图 1-1-2，函数 $f(x)$ 在 A，B 两点间的平均变化率是________.

(2)函数 $f(x)=x^2-x$ 在区间 $[-2,t]$ 上的平均变化率是 2，则 $t=$________.

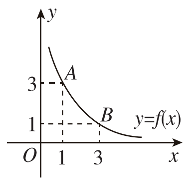


图 1-1-2

拓展 已知函数 $y=2x^2+3x-5$，$x_1=4$.

(1)求当 $x_2=5$ 时，函数值增量 Δy 和平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(2)求当 $x_2=4.1$ 时，函数值增量 Δy 和平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3)若设 $x_2=x_1+\Delta x$，分析(1)(2)中平均变化率的几何意义.

▶ 考点二　瞬时变化率

[导入] (1)函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数是函数在该点处平均变化率的极限，即____________.

(2)若函数 $f(x)$ 为物体的运动方程，则 $f'(x_0)$ 表示物体在时刻 x_0 的____________.

(3)当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 有什么样的变化趋势？

例2 做直线运动的某物体，其位移 s(单位：m)与时间 t(单位：s)的函数关系式是 $s(t)=3t+t^2$.

(1)求此物体的初速度；

(2)求 $t=0$ s 到 $t=2$ s 之间的平均速度；

(3)求此物体在 $t=2$ s 时的瞬时速度.

【变式】例 2 的条件不变，当 $t=$________s 时，物体的瞬时速度为 35 m/s.

拓展 一质点按规律 $s(t)=at^2+1$ 做直线运动(位移单位：m，时间单位：s)，若该质点在 $t=2$ s 时的瞬时速度为 8 m/s，求常数 a 的值.

▶ 考点三　导数定义的应用

[导入] 请仔细观察函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的定义式 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，探究下列问题：

(1)设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的值与 x_0，Δx 的值都有关吗？

(2)函数在定义域内的每一点处都有导数吗？

例3 函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=$ (　　)

A. $-2f'(1)$　　B. $\frac{1}{2}f'(1)$

C. $-\frac{1}{2}f'(1)$　　D. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

【变式】若函数 $f(x)=ax^2+c$，且 $f'(1)=2$，求 a 的值.

拓展 已知 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$，求满足 $f'(x)+2=g'(x)$ 的 x 的值.

例4 用导数的定义求函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}+2$ 在 $x=1$ 处的导数.

【变式】设 $f(x)=ax^3+2$，若 $f'(-1)=3$，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{3}$

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 物体运动方程为 $s(t)=3t^2$（位移单位：m，时间单位：s），若 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=18$(m/s)，则下列说法中正确的是（　　）

A. 18 m/s 是物体从开始到 3 s 这段时间内的平均速度

B. 18 m/s 是物体从 3 s 到 $(3+\Delta t)$s 这段时间内的速度

C. 18 m/s 是物体在 3 s 这一时刻的瞬时速度

D. 18 m/s 是物体从 3 s 到 $(3+\Delta t)$s 这段时间内的平均速度

2. 函数 $y=1$ 在 $[2,2+\Delta x]$ 上的平均变化率是（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. Δx

3. 设函数 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$ 等于（　　）

A. $f'(1)$　　B. $3f'(1)$

C. $\frac{1}{3}f'(1)$　　D. $f'(3)$

4. 一物体的运动方程为 $s=7t^2-13t+8$，则 $t_0=$________时该物体的瞬时速度为 1.

1.1.3 导数的几何意义

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　导数的几何意义

1. 割线斜率与切线斜率

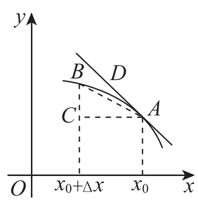


图 1-1-3

设函数 $y=f(x)$ 的图像如图 1-1-3 所示，直线 AB 是过点 $A(x_0,f(x_0))$ 与点 $B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 的一条割线，此割线的斜率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的极限位置为直线 AD，直线 AD 叫作此曲线在点 A 处的________. 于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 AB 的斜率无限趋近于过点 A 的切线 AD 的斜率 k，即 $k=$__________$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率. 也就是说，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率是________. 相应地，切线方程为________________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×".

(1)若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处无切线.（　　）

(2)若直线与曲线相切，则直线与曲线只有一个交点.（　　）

(3)与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是 $2x-y-1=0$.（　　）

(4)若 $f'(x_0)>0$，则切线的倾斜角为锐角；若 $f'(x_0)<0$，则切线的倾斜角为钝角；若 $f'(x_0)=0$，则切线与 x 轴平行或重合.（　　）

▶ 知识点二　导函数的定义

从求函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的过程可以看出，当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)$ 是一个确定的数. 这样，当 x 变化时，$f'(x)$ 便是 x 的一个函数，我们称它为 $f(x)$ 的________. $y=f(x)$ 的导函数记作________或________，即 $f'(x)=y'=$____________.

[探究] 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与曲线 $y=f(x)$ 过某点 (x_0,y_0) 的切线有何不同?

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　曲线的切线及切线的斜率

[导入] 如图 1-1-4 所示，当点 $P_n(x_n,f(x_n))$ $(n=1,2,3,4)$ 沿着曲线 $y=f(x)$ 趋近于点 $P(x_0,f(x_0))$ 时，我们发现，割线 PP_n 趋近于确定的位置，这个确定位置的直线 PT 称为曲线在点 P 处的切线. 请问：割线 PP_n 的斜率 k_n 与切线 PT 的斜率 k 有什么关系?

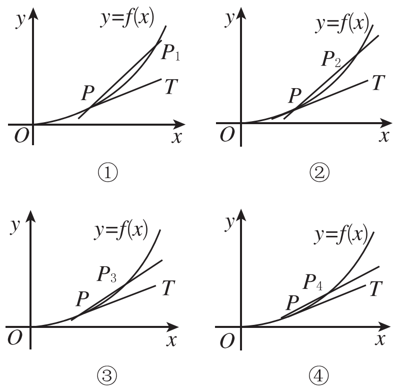


图 1-1-4

例1 已知抛物线 $y=2x^2+1$，求：

(1)抛物线上哪一点的切线的倾斜角为 45°？

(2)抛物线上哪一点的切线平行于直线 $4x-y-2=0$？

(3)抛物线上哪一点的切线垂直于直线 $x+8y-3=0$？

【变式】 已知曲线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 上一点 $P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，则曲线在点 P 处的切线的倾斜角为________.

▶ 考点二 利用图像理解导数的几何意义

［导入］当点 Q 沿着曲线趋近于点 P 时，割线 PQ 的变化情况如图 1-1-5 所示.

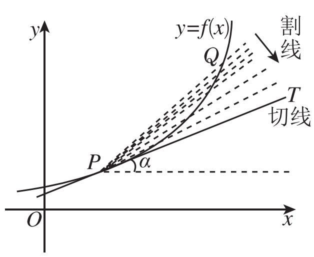


图 1-1-5

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的导数不存在，但切线存在，则切线与________平行；

(2)若 $f'(x_0)=0$，则切线与________平行；

(3)若 $f'(x_0)>0$，则切线的倾斜角为________；

(4)若 $f'(x_0)<0$，则切线的倾斜角为________.

例2 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-1-6 所示，则下列不等关系中正确的是 （ ）

A. $0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

B. $0<f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$

C. $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

D. $0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

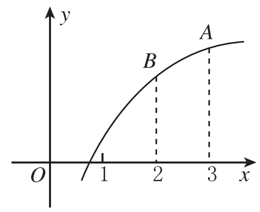


图 1-1-6

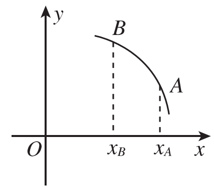


图 1-1-7

【变式】 已知函数 $f(x)$ 的图像如图 1-1-7 所示，则 $f'(x_A)$ 与 $f'(x_B)$ 的大小关系是 （ ）

A. $f'(x_A)>f'(x_B)$ B. $f'(x_A)<f'(x_B)$

C. $f'(x_A)=f'(x_B)$ D. 不能确定

拓展 已知曲线 $y=2x^2-7$，则曲线在哪一点的切线平行于直线 $4x-y-2=0$？

▶ 考点三 曲线的切线方程

［导入］(1)已知点 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上一点.

①若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率存在，则切线方程为________________；

②若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率不存在，则切线方程为__________.

(2)已知点 $M(x_1,y_1)$ 为不在曲线 $y=f(x)$ 上的一点，过点 M 作曲线的切线.

①设切点为 $P(x_0,y_0)$，则切线的斜率 $k=$________；

②由 $k_{PM}=k$，得 $k=f'(x_0)=$________；

③化简上述方程，得关于 x_0 的方程，可求得 x_0；

④确定 y_0，k，利用点斜式求切线方程.

例3 已知曲线 C：$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}$.

(1)求曲线 C 上横坐标为 2 的点处的切线方程；

(2)第(1)小题中的切线与曲线 C 是否还有其他的公共点？

【变式】已知曲线 $f(x)=x^2+1$ 与 $g(x)=x^3+1$ 在 $x=x_0$ 处的切线互相垂直，求 x_0 的值.

拓展　试求过点 $M(1,1)$ 且与曲线 $y=x^3+1$ 相切的直线方程.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $2x-y+2=0$，则 $f'(1)=$ (　　)

A. 4　　B. -4

C. -2　　D. 2

2. 已知函数 $f(x)=ax^2+1$ 的图像与直线 $y=x$ 相切，则 $a=$ (　　)

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2$ 在点 $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$ 处切线的倾斜角为________.

4. 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成三角形的面积是________.

1.2　导数的计算

1.2.1　几个常用函数的导数

1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　几个常用函数的导数

1. 函数 $f(x)=c$ 的导数是 $f'(x)=$________.
2. 函数 $f(x)=x$ 的导数是 $f'(x)=$________.
3. 函数 $f(x)=x^2$ 的导数是 $f'(x)=$________.
4. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数是 $f'(x)=$________.
5. 函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的导数是 $f'(x)=$________.

▶ 知识点二　基本初等函数的导数公式

1. 若 $f(x)=c$（c 为常数），则 $f'(x)=$________.
2. 若 $f(x)=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{Q}^*)$，则 $f'(x)=$________.
3. 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=$________.
4. 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=$________.
5. 若 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=$________.
6. 若 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=$________.
7. 若 $f(x)=\log_a x$，则 $f'(x)=$________.
8. 若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=$________.

［思考］判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1)已知 $y=\cos\frac{\pi}{6}$，则 $y'=\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)'=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$. (　　)

(2)$(\lg x)'=\frac{1}{x\ln 10}$. (　　)

(3)$(2^x)'=2^x\log_2 e$. (　　)

(4)$(\sqrt[3]{x^2})'=\frac{2}{3x}$. (　　)

［讨论］(1)函数 $f(x)=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{Q}^*)$ 与 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 分别是什么类型的函数？它们的导数分别是什么？

(2)函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 与 $f(x)=e^x$ 及 $f(x)=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 与 $f(x)=\ln x$ 的求导公式有何特点？

▶ 知识点三　导数的运算法则

已知 $f(x)$，$g(x)$ 为可导函数，且 $g(x)\neq0$.

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=$________.

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=$________，特别地，$[cf(x)]'=$________.

(3)$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=$________.

［思考］判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1)已知 $f(x)=x\cos x$，则 $f'(x)=\cos x+x\sin x$. (　　)

(2)已知 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{e^x}$. (　　)

(3)若函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=2x$，则 $f(x)=x^2$. (　　)

▶ 知识点四　复合函数的求导法则

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过变量 u，y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作________.

复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系为________，其中 y_x' 表示 y 对 x 的导数，y_u' 表示 y 对 u 的导数，u_x' 表示 u 对 x 的导数.

［探究］观察函数 $y=2x\cos x$ 及 $y=\ln(x+2)$ 的结构特点，它们分别是由哪些基本函数组成的？

考点类析

考点全息　深度挖掘

考点一　基本函数的导数的简单计算

例1　(1)若函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(1)$ 等于（　　）

A. 0　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

(2)已知 $f(x)=\frac{1}{x}$，若 $f'(\alpha)=-\frac{1}{4}$，则 $\alpha=$________.

(3)若 $f(x)=2x^2$，$g(x)=x^3+1$，则满足 $f'(x)+4=g'(x)$ 的 x 的值为________.

【变式】(1)下列结论中正确的个数为（　　）

①$y=\ln 2$，则 $y'=\frac{1}{2}$；②$y=\frac{1}{x^2}$，则 $y'|_{x=3}=-\frac{2}{27}$；③$y=2^x$，则 $y'=2^x\ln 2$；④$y=\log_2 x$，则 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2)已知 $f(x)=e^x-2$，则 $f'(0)=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. -2

考点二　导数的运算法则在求导中的应用

［导入］(1)导数的运算法则成立的条件是函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是________函数.

(2)函数和(或差)的求导法则可推广到有限个可导函数，即 $[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=$________.

(3)$[af(x)+bg(x)]'=$________(其中 a,b 为常数，$f(x)$，$g(x)$ 为可导函数).

例2　求下列函数的导数：

(1)$y=3x^2+x\cos x$；(2)$y=(x^2+3)(e^x+\ln x)$.

【变式】求下列函数的导数：

(1)$y=\frac{\ln x}{x+1}$；(2)$y=\sin^4\frac{x}{4}+\cos^4\frac{x}{4}$.

考点三　导数公式及运算法则在切线方程中的应用

［导入］根据导数的几何意义求曲线的切线方程是导数的典型问题，学习导数公式和运算法则后，求曲线切线的斜率将更加简单. 求解过程中应注意以下问题：

(1)切线的斜率就是在切点处的________；

(2)切点既在________上，又在________上.

例3　(1)曲线 $y=xe^x+2x+1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________.

(2)曲线 $y=e^x$ 过原点的切线方程为________.

【变式】(1)曲线 $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 处的切线的斜率为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)函数 $f(x)=\frac{\cos x}{1+x}$ 的图像在 $(0,1)$ 处的切线方程是（　　）

A. $x+y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x-y+1=0$　　D. $x-y+1=0$

拓展　已知曲线 $f(x)=x^3+ax+b$ 在点 $P(2,-6)$ 处的切线方程是 $13x-y-32=0$.

(1)求 a,b 的值；

(2)如果曲线 $y=f(x)$ 的切线与直线 $y=-\frac{1}{4}x+3$ 垂直，求切线的方程.

考点四　复合函数求导

［导入］复合函数求导的步骤是什么？

例4　求下列函数的导数：

(1)$y=(2x-1)^4$；(2)$y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$；

(3)$y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$；(4)$y=10^{2x+3}$.

【变式】求下列函数的导数：

(1) $y=\ln\frac{1}{2x+1}$；(2) $y=e^{-x}\cdot\sin 2x$.

拓展　曲线 $y=e^{\sin x}$ 在 $(0,1)$ 处的切线与直线 l 平行，且与 l 之间的距离为 $\sqrt{2}$，求直线 l 的方程.

当堂自测　查漏补缺　巩固提升

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(3)$ 等于　(　　)

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　B. 0　C. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=4$，则 a 的值是 (　　)

A. $\frac{19}{3}$　B. $\frac{16}{3}$　C. $\frac{13}{3}$　D. $\frac{10}{3}$

3. 若函数 $y=\sin^2 x$，则 y' 等于　(　　)

A. $\sin 2x$　B. $2\sin x$

C. $\sin x\cos x$　D. $\cos^2 x$

4. 如图 1-2-1，$y=f(x)$ 是可导函数，直线 l：$y=kx+2$ 是曲线 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线，令 $g(x)=xf(x)$，$g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数，则 $g'(3)=$　(　　)

A. -1　B. 0

C. 2　D. 4

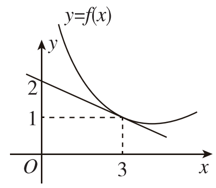


图 1-2-1

5. 设曲线 $y=e^{ax}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，则 $a=$________.

1.3　导数在研究函数中的应用

1.3.1　函数的单调性与导数

预习探究　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　函数的单调性与导函数的关系

1. 设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，在这个区间内，如果________，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递增；如果________，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递减.

2. 对于可导函数 $y=f(x)$ 来说，"$f'(x)>0$"是"$f(x)$ 在某个区间上为增函数"的__________条件，"$f'(x)<0$"是"$f(x)$ 在某个区间上为减函数"的__________条件.

[探究] 若 p：对任意 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$，q：$f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递增的，则 p 是 q 的　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

▶ 知识点二　利用导数判断函数的单调性的一般步骤

(1)确定函数 $y=f(x)$ 的定义域；

(2)求导数 $y'=f'(x)$；

(3)解不等式__________，解集在定义域内的部分为增区间；

(4)解不等式__________，解集在定义域内的部分为减区间.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×".

(1)函数 $f(x)=x+\ln x$ 在定义域内是增函数.　(　　)

(2)当 $x>2$ 时，函数 $f(x)=2x$ 的增长速度比 $g(x)=x^2$ 的增长速度慢.　(　　)

(3)函数 $f(x)=e^x-x$ 的单调递减区间是 $(0,+\infty)$.　(　　)

考点类析　考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　函数图像与导函数图像的应用

[导入] 观察函数 $y=f(x)$ 的图像，分别探讨函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处导数的正负及单调性.

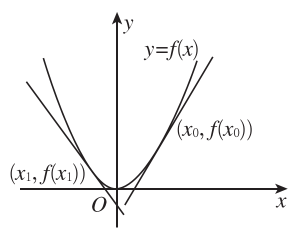


图 1-3-1

例1 (1)已知 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像如图1-3-2所示,那么 $f(x)$ 的图像最有可能是图1-3-3中的 ( )

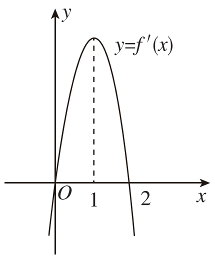


图1-3-2

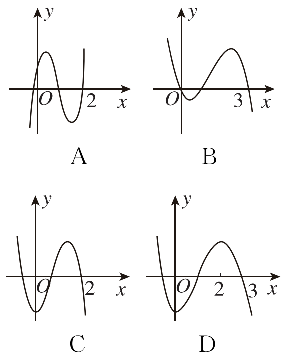


图1-3-3

(2)如果函数 $f(x)$ 的图像如图1-3-4,那么导函数 $y=f'(x)$ 的图像可能是 ( )

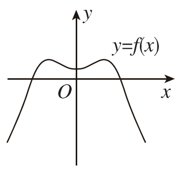


图1-3-4

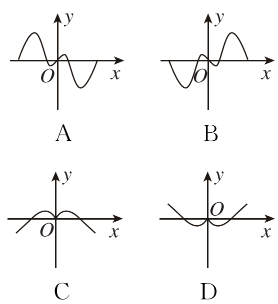


图1-3-5

【变式】已知函数 $y=xf'(x)$ 的图像如图1-3-6所示(其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数),下面四个图像中,可能是函数 $y=f(x)$ 的大致图像的是 ( )

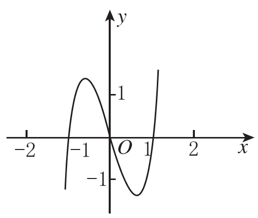


图1-3-6

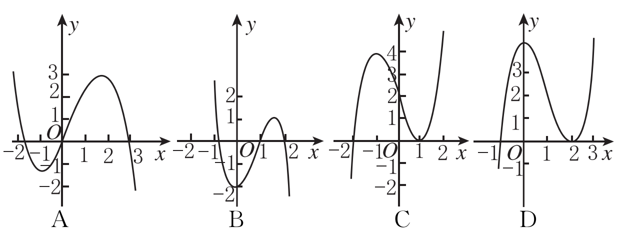


图1-3-7

▶ 考点二 利用导数判断函数的单调性及求函数的单调区间

[导入] 对于在区间 (a,b) 内的可导函数 $f(x)$,若 $f'(x)$ 在 (a,b) 的任意子区间内都不恒等于0,则 $f'(x)\geqslant 0\Rightarrow f(x)$ 为________,$f'(x)\leqslant 0\Rightarrow f(x)$ 为________.

例2 求下列函数的单调区间.

(1) $f(x)=x^3-3x+1$;(2) $f(x)=2x-\ln x$;

(3) $f(x)=\dfrac{ax}{1-x^2}(a\neq 0,-1<x<1)$.

【变式】求函数 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的单调区间.

拓展 求函数 $f(x)=(a+1)\ln x+ax^2+1$ 的单调区间.

▶ 考点三 利用导数解决含参函数的单调性问题

[导入] 已知函数的单调性求参数的取值范围是一种常见的题型,常利用导数与函数单调性的关系,即若函数单调递增,则__________,若函数单调递减,则________来求解. 注意不等式中的等号不能省略,否则会漏解.

例3 已知点 $P(1,-1)$ 在函数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ 的图像上,且 $f(x)$ 的图像在点 P 处的切线与直线 $3x+y-6=0$ 平行.

(1)求实数 a,b 的值;

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(m,2m-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,求实数 m 的取值范围.

【变式】已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}(x\neq 0,a\in\mathbf{R})$,若函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是单调递增的,求 a 的取值范围.

拓展 已知函数 $f(x)=x^2+2a\ln x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $g(x)=\frac{2}{x}+f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围.

当堂自测　查漏补缺　巩固提升

1. 函数 $f(x)=x+\ln x$　(　　)

A. 在 $(0,6)$ 上是增函数

B. 在 $(0,6)$ 上是减函数

C. 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上是减函数，在 $\left(\frac{1}{e},6\right)$ 上是增函数

D. 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上是增函数，在 $\left(\frac{1}{e},6\right)$ 上是减函数

2. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是可导函数，$f(x)$ 的图像如图 1-3-8 所示，则不等式 $f'(x)>0$ 的解集为　(　　)

A. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

D. $(-2,-1)\cup(1,2)$

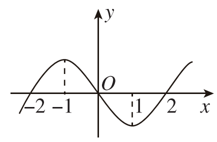


图 1-3-8

3. 若函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的单调递减区间为 $[-1,2]$，则 $b=$________，$c=$________.

4. 函数 $y=2x+\sin x$ 的单调递增区间为____________.

5. 若 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数，则 b 的取值范围是________.

1.3.2　函数的极值与导数

预习探究　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　函数极值的定义

1. 对于函数 $y=f(x)$，若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都________，$f'(a)=$________，而且在点 $x=a$ 附近的左侧________，右侧________，就把________叫作函数 $y=f(x)$ 的极小值点，________叫作函数 $f(x)$ 的极小值.

2. 对于函数 $y=f(x)$，若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点的函数值都________，$f'(b)=0$，而且在点 $x=b$ 附近的左侧________，右侧________，就把________叫作函数 $y=f(x)$ 的极大值点，________叫作函数 $f(x)$ 的极大值.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×".

(1)函数的极值是唯一的.　(　　)

(2)一个函数的极大值一定大于极小值.　(　　)

(3)函数的极值点一定出现在区间的内部，区间的端点不能成为极值点.　(　　)

(4)导数为 0 的点一定是极值点.　(　　)

(5)极值点处的导数一定为 0.　(　　)

▶ 知识点二　求函数极值的步骤

(1)确定函数的定义域，求________.

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根.

(3)判断 $f'(x)$ 在根的左右两侧的值的符号. 如果________，那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值；如果________，那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值；如果________，那么 $f(x)$ 在这个根处无极值.

[探究] 函数 $f(x)$ 的定义域为 (a,b)，导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图像如图 1-3-9 所示，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有________个极小值点.

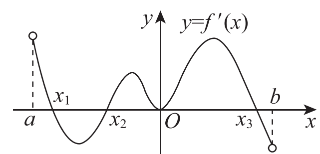


图 1-3-9

考点类析　考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　求函数的极值

[导入] (1)如果 $f'(x_0)=0$，并且在点 $x=x_0$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，那么 $f(x_0)$ 是________.

(2)如果 $f'(x_0)=0$，并且在点 $x=x_0$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，那么 $f(x_0)$ 是________.

可将 x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况列成如下所示的表格：

x	x_0 左侧	x_0	x_0 右侧
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

x	x_0 左侧	x_0	x_0 右侧
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

例 1 求函数 $f(x)=\frac{3}{x}+3\ln x$ 的极值.

【变式】求函数 $y=\frac{2x}{x^2+1}-2$ 的极值.

拓展 设函数 $f(x)$ 在 **R** 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图像如图 1-3-10 所示，则下列结论中一定成立的是（　　）

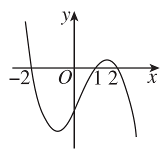


图 1-3-10

A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

▶ 考点二　利用极值求参数问题

[导入] 假设 $f'(x_0)$ 存在，那么"x_0 为极值点"与"$f'(x_0)=0$"有何关系？

例2 已知函数 $f(x)=ax^5-bx^3+c$ 在 $x=\pm1$ 处的极大值为 4，极小值为 0，试确定 a,b,c 的值.

【变式】设 $x=1$ 与 $x=2$ 是函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 的两个极值点.

(1)试确定常数 a 和 b 的值；

(2)判断 $x=1,x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点还是极小值点，并说明理由.

拓展 已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+2x+1$，$x_1,x_2$ 是 $f(x)$ 的两个极值点，且 $0<x_1<1<x_2<3$，则实数 a 的取值范围为________.

▶ 考点三　利用极值求方程解的问题

[导入] 对于方程 $f(x)=m$ 的解的个数问题，如何利用极值来解决？

例3 已知函数 $f(x)=x^3-12x+4$，讨论方程 $f(x)=m$ 的解的个数.

【变式】已知函数 $f(x)=ax^3-bx+4$，当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得极值 $-\frac{4}{3}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若方程 $f(x)=k$ 有 3 个不等的实数解，求实数 k 的取值范围.

拓展 已知 $f(x)=2\ln(x+a)-x^2-x$ 在 $x=0$ 处取得极值.

(1)求实数 a 的值；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)+b=0$ 在区间 $[-1,1]$ 上恰有两个不同的实数根，求实数 b 的取值范围.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 已知 $x=a$ 为函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极小值点，则 $a=$（　　）

A. -9　　B. -2

C. 4　　D. 2

2. 设函数 $f(x)=xe^x$，则（　　）

A. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

D. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

3. 函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，导函数 $f'(x)$ 的图像如图 1-3-11 所示，则函数 $f(x)$（　　）

A. 无极大值点，有四个极小值点

B. 有三个极大值点，两个极小值点

C. 有两个极大值点，两个极小值点

D. 有四个极大值点，无极小值点

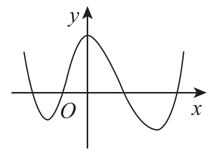


图 1-3-11

4. 若函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处取得极大值，则常数 c 的值为________.

5. 直线 $y=a$ 与函数 $f(x)=x^3-3x$ 的图像有三个交点，则 a 的取值范围是__________.

1.3.3　函数的最大（小）值与导数

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　函数最值的定义

1. 一般地，如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图像是____________，那么它必有最大值与最小值.

2. 对于函数 $f(x)$，给定区间 I，若对任意 $x\in I$，存在 $x_0\in I$，使得 $f(x)$______$f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最小值；若对任意 $x\in I$，存在 $x_0\in I$，使得 $f(x)$______$f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值.

［思考］判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1)有些函数的最值不能通过求导数法求得.（　　）

(2)三次函数 $f(x)$ 没有最大值，也没有最小值.（　　）

(3)连续不断的函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一定有最大值或最小值.（　　）

［讨论］函数的极值和最值有什么区别和联系？

▶ 知识点二　求函数的最大值与最小值的步骤

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在区间 (a,b) 内可导，求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：

(1)求函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的______；

(2)将函数 $f(x)$ 的各极值与端点处的函数值______进行比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

［探究］函数 $f(x)=x^2-4x+1$ 在区间 $[1,5]$ 上的最大值和最小值分别是（　　）

A. $f(1),f(3)$　　B. $f(3),f(5)$

C. $f(1),f(5)$　　D. $f(5),f(2)$

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　求函数的最大值与最小值

［导入］函数 $y=f(x)$ 的图像的最高点和最低点对应的横坐标分别为函数 $f(x)$ 的最大值点和最小值点. 如果函数 $f(x)$ 存在最大值，那么其最大值是否唯一？最大值点是否唯一？

例 1　已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-2x+c$ 在 $x=-2$ 处有极大值 6，在 $x=1$ 处有极小值.

(1)求 a,b,c 的值；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最大值和最小值.

【变式】求下列函数的最值：

(1) $f(x)=2x^3-12x,x\in[-2,3]$；

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x+\sin x,x\in[0,2\pi]$.

拓展 (1)函数 $y=x^2-x-\ln x$ 在区间$[1,3]$上的最小值为________.

(2)函数 $f(x)=xe^{-x}(x\in[0,4])$的最小值、最大值分别为 a,b,则 $a+b=$________.

▶ 考点二 与函数的最值有关的问题

[导入] 与函数的最值有关的问题有哪些？如何利用函数的最值来解决？

例2 设 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$.

(1)若 $f(x)$在$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$上存在单调递增区间,求 a 的取值范围；

(2)当 $0<a<2$ 时,$f(x)$在$[1,4]$上的最小值为$-\frac{16}{3}$,求 $f(x)$在该区间上的最大值.

【变式】设函数 $f(x)=tx^2+2t^2x+t-1(x\in\mathbf{R},t>0)$.

(1)求 $f(x)$的最小值 $h(t)$；

(2)若 $h(t)<-2t+m$ 对 $t\in(0,2)$恒成立,求实数 m 的取值范围.

拓展 设函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+8c$.

(1)若对任意 $x\in[0,3]$,都有 $f(x)<c^2$ 成立,求 c 的取值范围；

(2)若对任意 $x\in(0,3)$,都有 $f(x)<c^2$ 成立,求 c 的取值范围.

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上 ( )

   A. 极大值一定比极小值大

   B. 极大值一定是最大值

   C. 最大值一定是极大值

   D. 最大值一定大于极小值

2. 连续不断的函数 $f(x)$在区间$[a,b](a<b)$上的最大值是 M,最小值是 m,若 $M=m$,则 $f'(x)$ ( )

   A. 等于 0　　B. 大于 0

   C. 小于 0　　D. 以上都有可能

3. 函数 $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上取得最小值时对应的 $x=$ ( )

   A. 0　　B. $\frac{\pi}{6}$

   C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 设函数 $f(x)=x(x^2-3)$,则 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最小值为 ( )

   A. -1　　B. 0　　C. -2　　D. 2

5. 函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ 在区间$[-4,4]$上的最大值为 10,则其最小值为________.

1.4 生活中的优化问题举例

预习探究

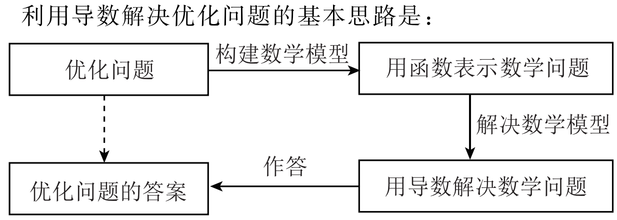
梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 生活中的优化问题的概念

生活中经常遇到求利润最大、用料最省、效率最高等问题,这些问题通常称为________问题. 所谓生活中的优化问题,其实就是求最值或求最值条件的实际应用问题,导数是求最值的有力工具,因此和函数有关的优化问题可利用导数来研究.

▶ 知识点二 利用导数解决生活中的优化问题的一般步骤

利用导数解决优化问题的基本思路是：



由此思路可得用导数解决优化问题的步骤：

(1)分析实际问题中各量之间的关系，构建实际问题的________，进而求出函数解析式 $y=f(x)$；

(2)求函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$，解方程________；

(3)比较函数在区间端点和使 $f'(x)=0$ 的点的函数值的大小，确定最值或最值条件；

(4)将问题还原到实际问题中作答.

[探究] 电动自行车的耗电量 y 与速度 x 之间的关系为 $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{39}{2}x^2-40x(x>0)$，为使耗电量最小，则速度应为(　　)

A. 30　　B. 35　　C. 40　　D. 45

考点类析

考点全息　深度挖掘

考点一　费用最少问题

[导入] 解决最优问题应从以下几个方面入手：

(1)设出变量，找出函数关系式，确定定义域；

(2)在实际应用问题中，若函数 $f(x)$在定义域内只有一个极值点，则它就是最值点.

例1 如图 1-4-1，某段铁路 AB 长为 80 千米，$BC\perp AB$，且 $BC=10$ 千米，为将货物从 A 地运往 C 地，现在 AB 上距点 B 为 x 千米的点 M 处修一公路至点 C. 已知铁路运费为每千米 2 元，公路运费为每千米 4 元.

(1)将总运费 y 表示为 x 的函数.

(2)如何选点 M 才能使总运费最少？

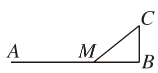


图 1-4-1

拓展 已知 A,B 两地相距 200 km，一只船从 A 地逆水行驶到 B 地，水速为 8 km/h，船在静水中的速度为 v km/h $(8<v\leqslant v_0)$. 若船每小时的燃料费与其在静水中的速度的平方成正比，当 $v=12$ km/h 时，每小时的燃料费为 720 元，为了使全程燃料费最省，则船的实际速度为多少？

考点二　面积、体积的最值问题

[导入] 对于优化问题中的函数关系，要注意根据实际背景确定函数的定义域，如果目标函数在定义域内只有一个极值点，那么这个极值点一般就是最值点.

例2 现有一张长为 108 cm，宽为 a cm$(a<108)$的长方形铁皮 $ABCD$，准备用它做成一个无盖长方体铁皮容器，要求材料利用率为 100%，不考虑焊接处的损失，如图 1-4-2，在长方形 $ABCD$ 的一个角上剪下一块边长为 x cm 的正方形铁皮作为铁皮容器的底面，用余下的材料剪拼后作为铁皮容器的侧面，设长方体的高为 y(cm)，体积为 $V(\text{cm}^3)$.

(1)求 y 关于 x 的函数关系式；

(2)求该铁皮容器体积 V 的最大值.

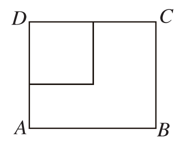


图 1-4-2

【变式】如图 1-4-3 所示，某厂需要围建一个面积为 512 平方米的矩形堆料场，一边可以利用原有的墙壁，其他三边需要砌新的墙壁，当砌墙壁所用的材料最省时，堆料场的长和宽分别为__________.

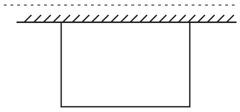


图 1-4-3

考点三　利润的最值问题

[导入] 导数在实际生活中的应用主要有以下几个方面：

(1)与几何有关的最值问题；

(2)与物理学有关的最值问题；

(3)与利润及成本有关的最值问题；

(4)与效率有关的最值问题.

例3 某分公司经销某种品牌产品，每件产品的成本为 3 元，并且每件产品需向总公司交 $a(3\leqslant a\leqslant 5)$元的管理费，预计当每件产品的售价为 $x(9\leqslant x\leqslant 11)$元时，一年的销售量为$(12-x)^2$ 万件.

(1)求分公司一年的利润 L(万元)与每件产品的售价 x 的函数关系式.

(2)当每件产品的售价为多少元时，分公司一年的利润 L 最大？并求出 L 的最大值 $Q(a)$.

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 做一个容积为 256 m^3 的方底无盖水箱，所用材料最省时，它的高为（ ）

A. 4 m　B. 6 m　C. 8 m　D. 10 m

2. 某银行准备新设一种定期存款业务，经预算，存款额与存款利率的平方成正比，比例系数为 $k(k>0)$。已知贷款的利率为 0.048 6，假设银行吸收的存款能全部放贷出去。设存款利率为 $x,x\in(0,0.048\ 6)$，若使银行获得最大收益，则 x 的值为（ ）

A. 0.016 2　B. 0.032 4

C. 0.024 3　D. 0.048 6

3. 如图 1-4-4 所示，在半径为 R 的半球内有一内接圆柱，则这个圆柱的体积的最大值是（ ）

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi R^3$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi R^3$

D. $\frac{4}{9}\pi R^3$

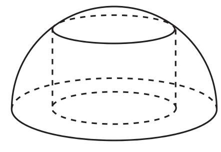


图 1-4-4

4. 某汽车运输公司购买了一批豪华大客车投入客运，据市场分析，每辆客车营运的总利润 y（万元）与营运年数 $x(x\in\mathbf{N}^*)$ 的函数关系式为 $y=-x^2+12x-25$，则每辆客车营运________年可使其营运年平均利润最大。

1.5 定积分的概念

1.5.1 曲边梯形的面积

1.5.2 汽车行驶的路程

1.5.3 定积分的概念

预习探究

梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 定积分的概念

1. 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ 将区间 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，作和式________________，当 $n\to\infty$ 时，上述和式无限接近某个常数，这个常数叫作函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作_________，即________________，其中函数 $f(x)$ 叫作_________，x 叫作_________，区间 $[a,b]$ 叫作_________，a 与 b 分别叫作积分________与积分________。

2. 用定义求定积分的一般方法是：①分割，将区间 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间；②近似代替，取点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$；③求和，$S_n=$____________；④取极限，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$____________。

［思考］判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×"。

(1)曲边梯形是由曲线段和直线段所围成的平面图形。（ ）

(2)求汽车行驶的路程时，分割的区间表示汽车行驶的路程。（ ）

(3)求曲边梯形的面积时，将其分割为 n 个小曲边梯形，这些小曲边梯形的面积之和等于原曲边梯形的面积。（ ）

(4)当 n 很大时，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 上的值只能用 $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ 近似代替。（ ）

▶ 知识点二 定积分的几何意义

如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 连续且恒有 $f(x)$________0，那么定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由直线__________________和曲线________所围成的曲边梯形(如图 1-5-1 中的阴影部分)的面积。

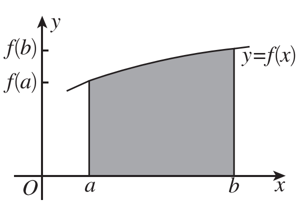


图 1-5-1

［思考］判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×"。

(1)定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义是由 x 轴、函数 $f(x)$ 的图像以及直线 $x=a,x=b$ 所围部分面积的代数和，在 x 轴上方的面积取正号，在 x 轴下方的面积取负号。（ ）

(2)曲边梯形的面积 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，变速直线运动的路程 $s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$，变力做的功 $W=\int_a^b F(r)\mathrm{d}r$.　(　　)

[注意] (1)定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是一个数值(极限值)，它的值仅取决于被积函数与积分上、下限，另外 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与积分区间 $[a,b]$ 息息相关，不同的积分区间所得值也不同.

(2)函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续这一条件是不能忽视的，它保证了和的极限(定积分)存在(实际上，函数连续是定积分存在的充分条件，而不是必要条件).

▶ 知识点三　定积分的性质

由定积分的定义，可以得到定积分的如下性质：

(1) $\int_a^b 1\mathrm{d}x=$________；

(2) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=$____________($k$ 为常数)；

(3) $\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]\mathrm{d}x=$________________；

(4) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$______________________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×".

(1) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t$.　(　　)

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值一定是一个正数.　(　　)

(3) $\int_a^b (\ln x-x^3)\mathrm{d}x=\int_a^b \ln x\mathrm{d}x-\int_a^b x^3\mathrm{d}x$.　(　　)

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　曲边梯形的面积

[导入] 求曲边梯形面积的步骤是什么？

例1　如图 1-5-2，求直线 $x=0$，$x=3$，$y=0$ 与二次函数 $f(x)=-x^2+2x+3$ 的图像所围成的曲边梯形的面积.

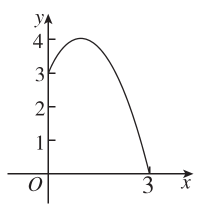


图 1-5-2

【变式】求由曲线 $y=1+x^2$ 与直线 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 所围成的曲边梯形的面积 S.

▶ 考点二　利用定义求积分

[导入] (1)定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$，$\int_0^1 (-t^2+2)\mathrm{d}t$，$\int_a^b 1\mathrm{d}x$ 分别等于什么？

(2)定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值由哪些要素所确定？

例2　利用定积分的定义计算 $\int_1^2 (1+x)\mathrm{d}x$ 的值.

【变式】根据定积分的定义，$\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=$　(　　)

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i-1}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n}$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i-1}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n}$

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2i}{n}\right)^2\cdot\dfrac{2}{n}$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2i}{n}\right)^2\cdot\dfrac{2}{n}$

拓展　下列式子中不成立的是　(　　)

A. $\int_a^{2\pi+a}\sin x\mathrm{d}x=\int_b^{2\pi+b}\cos x\mathrm{d}x$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x$

D. $\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$

▶ 考点三　定积分的几何意义的应用

[导入] 如图 1-5-3 所示，你能根据定积分的几何意义，用定积分表示图中阴影部分的面积吗？

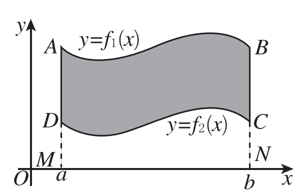


图 1-5-3

例3　用定积分的几何意义计算下列定积分：

(1) $\int_0^2 [\sqrt{4-(x-2)^2}-x]\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-1}^3 (3x+1)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$.

【变式】用定积分的几何意义求下列各式的值：

(1)$\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}x$；(2)$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

拓展 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 将圆面 $x^2+y^2\leqslant 8$ 分成两部分，现在向圆面内均匀投点，这些点落在图 1-5-4 中阴影部分的概率为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6\pi}$，求 $\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$.

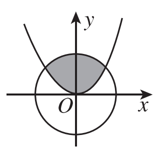


图 1-5-4

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 把区间[1,3] n 等分，所得 n 个小区间的长度均为 ( )

A. $\frac{1}{n}$　　B. $\frac{2}{n}$

C. $\frac{3}{n}$　　D. $\frac{1}{2n}$

2. 直线 $x=a$，$x=b(a<b)$，$y=0$ 和曲线 $y=f(x)(f(x)>0)$ 所围成的曲边梯形的面积 $S=$ ( )

A. $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}$

C. $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot f(\xi_i)$

3. 下列等式中成立的是 ( )

A. $\int_a^b x\,\mathrm{d}x=b-a$

B. $\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$

C. $\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=2\int_0^1|x|\mathrm{d}x$

D. $\int_a^b(x+1)\mathrm{d}x=\int_a^b x\,\mathrm{d}x$

4. 求由曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 与直线 $x=1$，$x=2$，$y=0$ 所围成的平面图形面积时，把区间 5 等分，则面积的近似值(取每个小区间的左端点)是________.

5. 定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{4-4x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

1.6 微积分基本定理

预习探究

梳理教材 探究疑难

▶ 知识点 微积分基本定理

如果 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，并且________，那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$________.

[探究] 定积分和曲边梯形面积的关系

设曲边梯形在 x 轴上方的面积为 $S_上$，在 x 轴下方的面积为 $S_下$，则

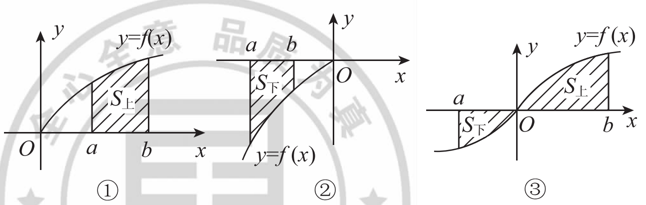


图 1-6-1

(1)当曲边梯形的面积在 x 轴上方时，如图①，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$________.

(2)当曲边梯形的面积在 x 轴下方时，如图②，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$________.

(3)当曲边梯形的面积在 x 轴上方、x 轴下方均存在时，如图③，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$________，若 $S_上=S_下$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×".

(1)微积分基本定理中，被积函数 $f(x)$ 是原函数的导函数. ( )

(2)应用微积分基本定理求定积分的值时，为了计算方便通常取原函数的常数项为 0. ( )

(3)只有在连续的区间上才能用微积分基本定理求定积分的值. ( )

考点类析

考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 利用微积分基本定理求定积分

[导入] 定积分的值可以是正数，可以是负数，也可以是零.

(1)当定积分对应的曲边梯形位于 x 轴上方时，定积分的值为________，且等于曲边梯形的面积；

(2)当定积分对应的曲边梯形位于 x 轴下方时,定积分的值为________,且等于曲边梯形的面积的相反数;

(3)当定积分对应的曲边梯形位于 x 轴上方部分的面积与位于 x 轴下方部分的面积相等时,定积分的值为________.

例1 计算下列定积分:

(1) $\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$;(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-2\cos x)dx$;

(3) $\int_0^{\pi}(2\sin x-3e^x+2)dx$;(4) $\int_0^2|x^2-1|dx$.

【变式】计算下列定积分:

(1) $\int_{-\pi}^0(\cos x-e^x)dx$;

(2) $\int_1^3(1+x+x^2)dx$;

(3) $\int_1^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 6x dx$.

拓展 计算下列定积分:

(1) $\int_0^2(4-2x)(4-x^2)dx$;(2) $\int_1^2\frac{x^2+2x-3}{x}dx$.

▶ 考点二　求复杂函数的定积分

[导入] 对给定的函数 $f(x)$,满足 $F'(x)=f(x)$ 的函数 $F(x)$是不唯一的,请问不同的 $F(x)$有什么差别? 对定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值是否有影响?

例2 求函数 $F(x)=\int_0^x t(t-4)dt$ 在区间$[-1,5]$上的最值.

【变式】已知 $x\in[1,2]$, $f(x)=\int_0^1(1-2x+2t)dt$,求 $f(x)$的值域.

当堂自测　　查漏补缺　巩固提升

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx$ 等于　(　　)

A. π　B. 2　C. $\pi-2$　D. $\pi+2$

2. 若$\int_1^a\left(2x+\frac{1}{x}\right)dx=3+\ln 2$,则 a 的值是　(　　)

A. 5　B. 4　C. 3　D. 2

3. $\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x-\cos x)dx$ 等于　(　　)

A. -3　B. -2　C. -1　D. 0

4. 下列定积分的值是 0 的是　(　　)

A. $\int_{-2}^2 x\sin x dx$　B. $\int_{-2}^2 x^2\cos x dx$

C. $\int_{-2}^2(x^2+x^4)dx$　D. $\int_{-2}^2 2(x+x^5)dx$

5. 求函数 $f(a)=\int_0^1(6x^2+4ax+a^2)dx$ 的最小值.

1.7 定积分的简单应用

1.7.1 定积分在几何中的应用

1.7.2 定积分在物理中的应用

预习探究 梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 求曲边图形的面积

1. 如图 1-7-1 所示,由曲线 $y=f(x)$(其中 $f(x)\geqslant 0$)与直线 $x=a,x=b(a<b)$以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 $S=$__________.

2. 如图 1-7-2 所示,由曲线 $y=f(x)$(其中 $f(x)\leqslant 0$)与直线 $x=a,x=b(a<b)$以及 x 轴所围成的曲边梯形的面积 $S=$______________.

3. 如图 1-7-3 所示,由两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$(其中 $f(x)\geqslant g(x)$)与直线 $x=a,x=b(a<b)$所围成的曲边梯形的面积 $S=$______________.

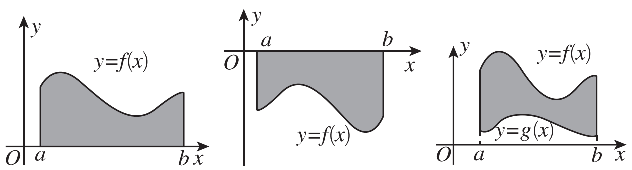


图 1-7-1　图 1-7-2　图 1-7-3

[思考] 判断下列说法的正误,正确的打"√",错误的打"×".

(1)曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=x$ 所围成的图形的面积为 $\int_0^1(x-\sqrt{x})\mathrm{d}x$. (　　)

(2)曲线 $y=2-x^2$ 与直线 $y=-2$ 所围成的图形的面积为 $\int_{-2}^{2}(4-x^2)\mathrm{d}x$. (　　)

(3)曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=2-x,y=0$ 所围成的图形的面积为 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x$. (　　)

▶ 知识点二 定积分在物理中的应用

变速直线运动	做变速直线运动的物体所经过的路程 s 等于其速度函数 $v=v(t)(v(t)\geqslant 0)$在时间区间$[a,b]$上的定积分,即 $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$
变力做功	如果物体在变力 $F(x)$的作用下做直线运动,并且物体沿着与 $F(x)$相同的方向从 $x=a$ 移动到 $x=b(a<b)$,那么变力 $F(x)$所做的功为 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$

[思考] 判断下列说法的正误,正确的打"√",错误的打"×".

(1)若物体在 $t\in[1,3]$时刻的运动速度为 $v(t)=t^2-2t$,则它在这段时间内行驶的路程为 $\int_1^3(t^2-2t)\mathrm{d}t$. (　　)

(2)物体在力 $f(x)$的作用下沿与 $f(x)$相同的方向从 $x=0$ 运动到 $x=8$,则该力对物体所做的功为 $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$. (　　)

(3)用 $f(x)=4x$(单位:N)的力拉弹簧,将弹簧由 10 m 拉长到 15 m,则该力所做的功是 250 J. (　　)

考点类析 考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 求曲线围成的图形的面积

[导入] 如图 1-7-4 所示,求直线 $y=-x+2$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成的封闭图形的面积 S.

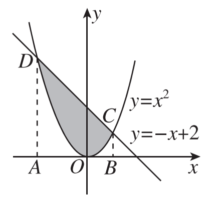


图 1-7-4

(1)直线 $y=-x+2$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成的封闭图形的各顶点的坐标是什么?

(2)如何将所求图形的面积转化为曲边梯形的面积?

(3)所求图形的面积用定积分怎样表示?

(4)利用微积分基本定理计算所求图形的面积.

例 1 求由曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=2,y=0$ 所围成的图形的面积.

【变式】曲线 $y=\mathrm{e}^x,y=\mathrm{e}^{-x}$ 及直线 $x=1$ 所围成的图形的面积是________.

拓展 求由抛物线 $y=x^2-1$,直线 $x=2,y=0$ 所围成的图形的面积.

▶ 考点二 定积分在物理中的应用

[导入] (1)在物理中,定积分主要应用于求变速直线运动的位移和变力所做的功,其基本原理如下:

①若物体运动的速度函数为 $v(t)$,则物体在时间区间$[a,b]$内的位移是____________;

②如果物体在变力 $F(x)$ 的作用下做直线运动，则物体沿着与 $F(x)$ 相同的方向从 $x=a$ 移动到 $x=b(a<b)$，变力 $F(x)$ 所做的功为__________.

(2)利用定积分求变速直线运动的位移，其积分变量是时间，被积函数是速度对时间的函数；利用定积分求变力所做的功，其积分变量是位移，被积函数是力对位移的函数.

例2 一点在直线上从时刻 $t=0$ s 开始以速度 $v=t^2-4t+3$（v 的单位：m/s）运动，求：

(1)该点在 $t=4$ s 时的位置；

(2)该点前 4 s 走过的路程.

【变式】一弹簧在弹性限度内，拉伸弹簧所用的力与弹簧伸长的长度成正比. 若 20 N 的力能使弹簧伸长 3 cm，则把弹簧从平衡位置拉长 13 cm(在弹性限度内)时所做的功 W 为（　　）

A. $\frac{169}{30}$ J　　B. 5 J　　C. $\frac{159}{30}$ J　　D. 6 J

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 曲线 $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi\right)$ 与坐标轴所围图形的面积 S 是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 4

2. 从空中自由下落的物体在时刻 1 恰经过电视塔塔顶，在时刻 2 物体落地，已知自由落体的运动速度 $v=gt$（g 为常数），则电视塔高 h 为（　　）

A. $\frac{5}{2}g$　　B. $\frac{7}{2}g$　　C. $\frac{3}{2}g$　　D. $2g$

3. 抛物线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围成的图形的面积为________.

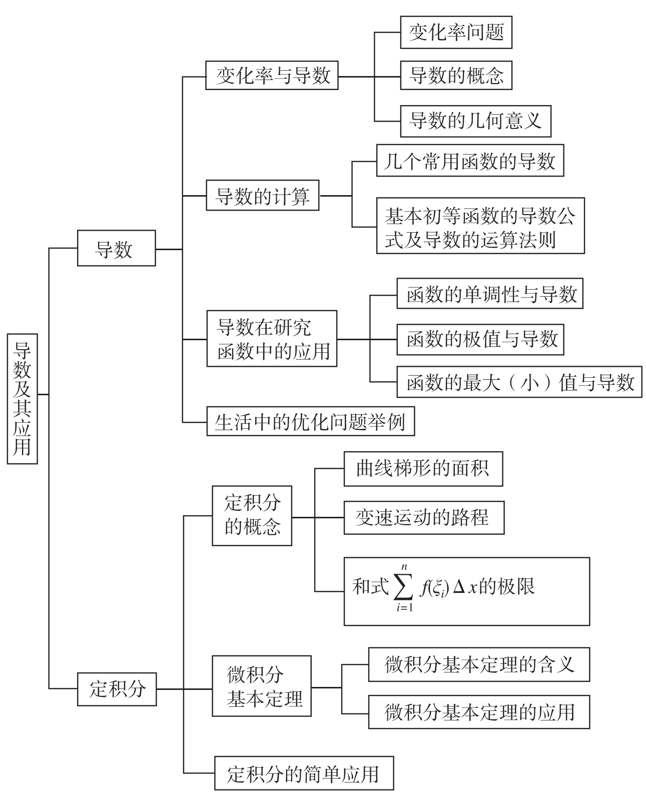
4. 求由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的平面图形的面积.

本章总结提升

单元回眸

构建网络　高屋建瓴

【知识网络】



【知识辨析】

判断下列说法是否正确.(请在括号中填写“√”或“×”)

1. 设 $f(x)$ 是 **R** 上的可导函数，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-2f'(x_0)$.（　　）

2. 在某一点的切线，若有，则只有一条；过某一点的切线，若有，则可能不止一条.（　　）

3. $(\sin 2x)'=\cos 2x$.（　　）

4. 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调递增，则 $f'(x)>0$ 在区间 (a,b) 上恒成立.（　　）

5. “$f'(x_0)=0$”是“$f(x_0)$ 为极值”的充要条件.（　　）

6. $\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x$ 表示函数 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图像与 x 轴所围成的图形的面积.（　　）

整合创新

提炼方法　融会贯通

▶ 题型一　导数的概念及其几何意义

[类型总述] (1)利用导数求切点坐标；(2)利用导数求切线方程.

例1 (1)[2018·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（　　）

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$

C. $y=2x$　　D. $y=x$

(2)已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l，则 l 在 y 轴上的截距为________.

【变式】(1)已知 $f(x)$为偶函数,当 $x<0$ 时,$f(x)=\ln(-x)+3x$,则曲线 $y=f(x)$在点$(1,-3)$处的切线方程是________.

(2)若直线 $y=kx+b$ 是曲线$y=\ln x+2$ 的切线,也是曲线$y=\ln(x+1)$的切线,则$b=$________.

题型二 导数的运算

[类型总述](1)求基本函数的导数;(2)求复合函数的导数.

例2 求下列函数的导数:

(1)$y=x^3\cdot e^x$;(2)$y=\dfrac{\cos x}{x}$;

(3)$y=5\log_2(1-x)$;(4)$y=\sin^3x+\sin 3x$.

题型三 利用导数研究函数的单调性,求函数的最值、极值

[类型总述](1)利用导数求单调区间;(2)已知函数的单调性,求参数的取值范围;(3)求极值;(4)求函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的最值;(5)解决恒成立问题.

例3 (1)若 $x=-2$ 是函数$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$的极值点,则 $f(x)$的极小值为 ( )

A. -1 B. $-2e^{-3}$

C. $5e^{-3}$ D. 1

(2)若函数 $f(x)=x^3-6bx+3b$ 在$(0,1)$内有最小值,则实数 b 的取值范围为 ( )

A. $(0,1)$ B. $(-\infty,1)$

C. $(0,+\infty)$ D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

(3)已知定义在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上的函数 $f(x)$,其导函数为$f'(x)$,若恒有 $f(x)<f'(x)\tan x$,则 ( )

A. $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ B. $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ D. $\sqrt{3}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)<f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

【变式】(1)函数 $y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图像如图 T1-1 所示,则函数 $y=f(x)$的图像可能是 ( )

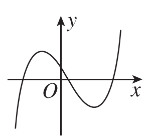


图 T1-1

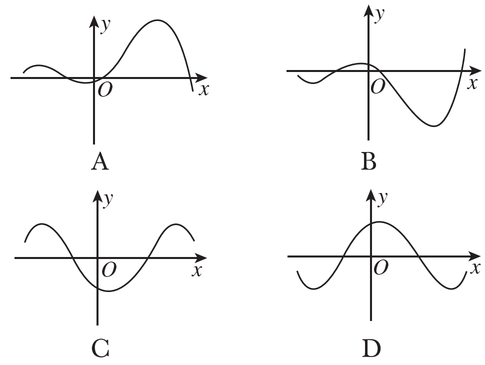


图 T1-2

(2)已知函数 $f(x)=x^3-2x+e^x-\dfrac{1}{e^x}$,其中 e 是自然对数的底数.若 $f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$,则实数 a 的取值范围是________.

例4 [2018·全国卷Ⅱ] 已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$.

(1)若 $a=1$,证明:当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 1$;

(2)若 $f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点,求 a.

例5 [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 $f(x)$存在两个极值点 x_1,x_2,证明:$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

【变式】已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的值;

(2)设 m 为整数,且对于任意正整数 n,$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$,求 m 的最小值.

题型四　导数在实际问题中的应用

[类型总述](1)利润最大;(2)用料最省;(3)面积、体积最大等.

例6 某村庄拟修建一个无盖的圆柱形蓄水池(不计厚度).设该蓄水池的底面半径为 r 米,高为 h 米,体积为 V 立方米.假设建造成本仅与表面积有关,侧面的建造成本为 100 元/平方米,底面的建造成本为 160 元/平方米,该蓄水池的总建造成本为12 000π元(π 为圆周率).

(1)将 V 表示成 r 的函数 $V(r)$,并求该函数的定义域;

(2)讨论函数 $V(r)$的单调性,并确定 r 和 h 为何值时该蓄水池的体积最大.

【变式】如图 T1-3,圆形纸片的圆心为 O,半径为 5 cm,该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O. D,E,F 为圆 O 上的点,$\triangle DBC$,$\triangle ECA$,$\triangle FAB$ 分别是以 BC,CA,AB 为底边的等腰三角形.沿虚线剪开后,分别以 BC,CA,AB 为折痕折起$\triangle DBC$,$\triangle ECA$,$\triangle FAB$,使得 D,E,F 重合,得到三棱锥.当$\triangle ABC$ 的边长变化时,所得三棱锥的体积最大为________cm^3.

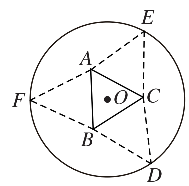


图 T1-3

题型五　定积分的简单应用

[类型总述](1)利用微积分基本定理求定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;(2)利用定积分求几何图形的面积.

例7 (1)定积分 $\int_0^1(2x+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$ 的值为　　(　　)

A. e+2　　B. e+1

C. e　　D. e−1

(2)直线 $y=4x$ 与曲线 $y=x^3$ 在第一象限内围成的封闭图形的面积为　　(　　)

A. $2\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}$

C. 2　　D. 4

【变式】在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $y=a(a>0)$与抛物线 $y=x^2$ 所围成的封闭图形的面积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$,则 $a=$________.