班级:______ 姓名:______ 得分:______

单元测评(一)A

第一章

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷60分,第Ⅱ卷90分,共150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷 (选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$,且 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$,则 $f'(2)=$ ( )
A. 2　　B. 4
C. $2+\Delta x$　　D. $4+\Delta x$

2. 下列函数满足 $f(x)=f'(x)$ 的是 ( )
A. $f(x)=1$　　B. $f(x)=x$
C. $f(x)=0$　　D. $f(x)=1-x$

3. $\int_{-4}^{3}|x+2|\,dx=$ ( )
A. $\frac{29}{2}$　　B. $\frac{21}{2}$
C. $-\frac{11}{2}$　　D. $\frac{11}{2}$

4. 若函数 $f(x)$ 在 **R** 上可导,且 $f(x)=x^2+2f'(1)x+3$,则 ( )
A. $f(0)<f(4)$　　B. $f(0)=f(4)$
C. $f(0)>f(4)$　　D. 无法确定

5. 方程 $2x^3-6x^2+7=0$ 在 $(0,2)$ 内根的个数为 ( )
A. 0　　B. 1
C. 2　　D. 3

6. 函数 $f(x)=e^x\cdot\cos x$ 的图像在点 $(0,f(0))$ 处切线的斜率为 ( )
A. 0　　B. -1
C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知函数 $f(x)=ax^3+(3-a)x$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为3,则实数 a 的取值范围是 ( )
A. $\left[-\frac{3}{2},3\right]$　　B. $\left[-\frac{3}{2},12\right]$
C. $[-3,3]$　　D. $[-3,12]$

8. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y=f(x)$ 的图像如图 CA1-1 所示,则导函数 $y=f'(x)$ 的图像可能为 ( )

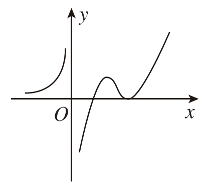


图 CA1-1

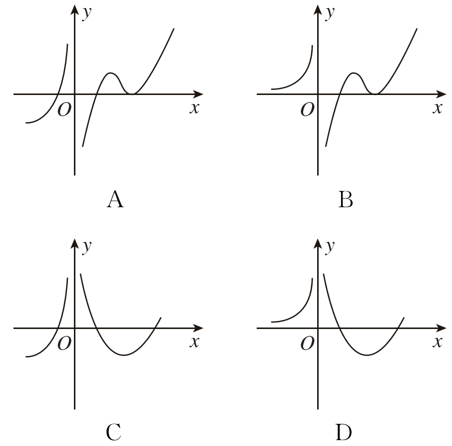


图 CA1-2

9. 已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,且满足 $f'(x)-2f(x)>4$,若 $f(0)=-1$,则不等式 $f(x)+2>e^{2x}$ 的解集为 ( )
A. $(0,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$
C. $(-\infty,0)$　　D. $(-\infty,-1)$

10. 若曲线 $y=x^3-2ax^2+2ax$ 上任意点处的切线的倾斜角都是锐角,那么整数 $a=$ ( )
A. -2　　B. 0
C. 1　　D. -1

11. 若对定义在 **R** 上的可导函数 $f(x)$,恒有 $(4-x)f(2x)+2xf'(2x)>0$,其中 $f'(x)$ 表示函数 $f(x)$ 的导函数,则 $f(x)$ ( )
A. 恒大于或等于0　　B. 恒小于0
C. 恒大于0　　D. 和0的大小关系不确定

12. 已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$,若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0,且 $x_0>0$,则实数 a 的取值范围是 ( )
A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)$
C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

请将选择题答案填入下表:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	总分
答案													

第Ⅱ卷 (非选择题 共90分)

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分,把答案填在题中横线上)

13. 已知函数 $y=a\ln x-x+1$ 的图像在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直,则实数 a 的值为________.

14. 函数 $y=\frac{1}{x}+2\ln x$ 的单调递减区间为________.

15. 计算:$\int_{-1}^{1}(2\sqrt{1-x^2}-\sin x)\,dx=$ ________.

16. 已知函数 $f(x)=\frac{3x}{a}-2x^2+\ln x(a>0)$,若函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上为单调函数,则 a 的取值范围是____________.

三、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分)求下列函数的导函数:
(1) $y=x^2(\ln x+\sin x)$;
(2) $y=\frac{\cos x-x}{x^2}$;
(3) $y=\sqrt{x}\ln x$;
(4) $y=2x^5+3x^4-4x^3+7$.

18. (12 分)已知 $f(x)=x^3$ 的图像在点 $A(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率为 3，求曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线方程.

19. (12 分)求由曲线 $xy=1$ 及直线 $x=y$，$y=3$ 所围成的平面图形的面积.

20. (12 分)已知函数 $f(x)=2\ln x-x^2$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上的最值.

21. (12 分)已知函数 $f(x)=-x^2+ax-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=3$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的最大值和最小值；

(2)若函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值，求实数 a 的取值范围.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的零点个数；

(2)当 $a>0$ 时，若函数 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上的最小值为 -2，求 a 的值.

测评卷 CE PING JUAN

班级:______ 姓名:______ 得分:______

单元测评(一)B

第一章

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷60分,第Ⅱ卷90分,共150分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷 (选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 曲线 $y=e^{2x}$在点(0,1)处的切线方程为 ( )

A. $y=\frac{1}{2}x+1$　　B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-1$　　D. $y=2x+1$

2. 一个物体的运动方程是 $s=1-t+t^2$,其中 s 的单位是 m,t 的单位是 s,那么该物体在 $t=3$ s时的瞬时速度是 ( )

A. 7 m/s　　B. 6 m/s

C. 5 m/s　　D. 8 m/s

3. 函数 $f(x)=(x-3)e^x$ 的单调递减区间是 ( )

A. $(-\infty,2)$　　B. $(0,3)$

C. $(1,4)$　　D. $(2,+\infty)$

4. 已知函数 $f(x)=a\sin x+bx^3+4(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$,$f'(x)$为 $f(x)$的导函数,则 $f(2017)+f(-2017)+f'(2018)-f'(-2018)=$ ( )

A. 0　　B. 2017

C. 2018　　D. 8

5. 设 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数,将 $y=f(x)$和 $y=f'(x)$的图像画在同一个直角坐标系中,不可能正确的是 ( )

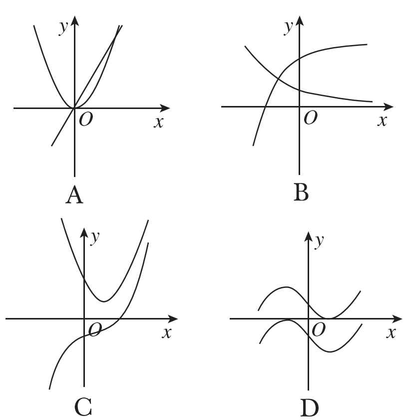


图 CB1-1

6. 一物体在变力 $F(x)=5-x^2$(力的单位:N,位移的单位:m)的作用下沿与 $F(x)$成30°角的方向做直线运动,则当物体由 $x=1$ 运动到 $x=2$ 时 $F(x)$所做的功为 ( )

A. $\sqrt{3}$ J　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ J

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ J　　D. $2\sqrt{3}$ J

7. 已知点 P 在曲线 $y=\frac{4}{e^x+1}$上,α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角,则 α 的取值范围是 ( )

A. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$　　D. $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

8. 已知函数 $f(x)=x^3-px^2-qx$ 的图像与 x 轴相切于点(1,0),则 $f(x)$在$[-1,1]$上的最大值、最小值分别为 ( )

A. $0,-4$　　B. $\frac{4}{27},-4$

C. $\frac{4}{27},0$　　D. $2,0$

9. 已知函数$f(x)=\ln x+(x-b)^2(b\in\mathbf{R})$在区间$\left[\frac{1}{2},2\right]$上存在单调递增区间,则实数 b 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right)$

C. $(-\infty,3)$　　D. $(-\infty,\sqrt{2})$

10. 直线 $x=1$,$x=e$ 与曲线$y=\frac{1}{x}$,$y=\sqrt{x}$围成的图形的面积是 ( )

A. $\frac{1}{3}(2e^{\frac{3}{2}}-5)$　　B. $\frac{1}{3}(2e^{\frac{3}{2}}-2)$

C. $\frac{1}{3}(2e^{\frac{3}{2}}-1)$　　D. $2e^{\frac{3}{2}}-5$

11. 设函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上存在导函数 $f'(x)$,对于任意的实数 x,都有$f(x)=4x^2-f(-x)$,当$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)+\frac{1}{2}<4x$,若 $f(m+1)\leqslant f(-m)+4m+2$,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

B. $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$

C. $[-1,+\infty)$

D. $[-2,+\infty)$

12. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$,$g(x)=\frac{1}{e^x}$,若对任意 $x_1\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,存在 $x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,使得 $f'(x_1)\leqslant g(x_2)$成立,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{\sqrt{e}}{e}-8\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{e}}{e}-8,+\infty\right)$

C. $[\sqrt{2},e)$　　D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{e}{2}\right]$

请将选择题答案填入下表:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	总分
答案													

第Ⅱ卷 (非选择题 共90分)

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,共20分,把答案填在题中横线上)

13. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+1$ 在 $x=-4$ 处取得极大值,则实数 a 的值为________.

14. 已知函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}(b>0)$的图像在点 $P(1,f(1))$处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直,且函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增,则 b 的最大值等于________.

15. 已知圆柱的体积为 16π cm^3,则当底面半径 $r=$________cm 时,圆柱的表面积最小.

16. 已知函数 $f(x)=(3-x^2)e^x$,给出以下结论:

①曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $3x-y+1=0$;

②在曲线 $y=f(x)$上任一点处的切线中有且只有两条与 x 轴平行;

③若方程 $f(x)=m$ 恰有一个实数根,则 $m<-6e^{-3}$;

④若方程 $f(x)=m$ 恰有两个不同实数根,则 $0\leqslant m<2e$ 或 $m=-6e^{-3}$.

其中所有正确结论的序号为________.

三、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分)若存在经过点(1,0)的直线 l 与曲线 $y=x^3$ 和曲线 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 同时相切.

(1)求切线 l 的方程;

(2)求实数 a 的值.

18. (12 分)已知函数 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-a$.

(1)若对任意实数 x,$f'(x)\geqslant m$ 恒成立,求 m 的最大值;

(2)若函数 $f(x)$恰有一个零点,求 a 的取值范围.

19. (12 分)已知函数 $f(x)=\ln|x|(x\neq 0)$,函数 $g(x)=\frac{1}{f'(x)}+af'(x)$ $(x\neq 0)$.

(1)当 $x\neq 0$ 时,求函数 $g(x)$的解析式;

(2)若 $a>0$,函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值是 2,求 a 的值;

(3)在(2)的条件下,求直线 $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$与函数 $g(x)$的图像所围成图形的面积.

20. (12 分)某分公司经销某种品牌产品,每件产品的成本为 30 元,并且每件产品需向总公司缴纳 a 元(a 为常数,$2\leqslant a\leqslant 5$)的管理费,根据多年的管理经验,预计当每件产品的售价为 x 元时,产品一年的销售量为$\frac{k}{e^x}$(e 为自然对数的底数)万件.已知当每件产品的售价为 40 元时,该产品一年的销售量为 500 万件,经物价部门核定,每件产品的售价 x 最低不低于 35 元,最高不超过 41 元.

(1)求该分公司经营该产品一年的利润 $L(x)$(万元)与每件产品的售价 x(元)的函数关系式.

(2)当每件产品的售价为多少元时,分公司一年的利润 $L(x)$最大?并求出 $L(x)$的最大值.

21. (12 分)已知$f(x)=x^2+bx+c$ 为偶函数,曲线 $y=f(x)$过点(2,5),$g(x)=(x+a)f(x)$.

(1)若曲线 $y=g(x)$有斜率为 0 的切线,求实数 a 的取值范围;

(2)若当 $x=-1$ 时函数 $y=g(x)$取得极值,求实数 a 的值,并确定 $y=g(x)$的单调递减区间.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=2ax-\frac{b}{x}+\ln x$.

(1)若 $f(x)$在 $x=1$,$x=\frac{1}{2}$处取得极值.

①求 a,b 的值;

②若存在 $x_0\in\left[\frac{1}{4},2\right]$,使得不等式 $f(x_0)-c\leqslant 0$ 成立,求 c 的最小值.

(2)当 $b=a$ 时,若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是单调函数,求 a 的取值范围.

测评卷 CE PING JUAN

参考答案

单元测评(一)A

1. B 【解析】由导函数的定义知，$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$.

2. C 【解析】对于选项A，$f(x)=1$，$f'(x)=0$，不满足题意；对于选项B，$f(x)=x$，$f'(x)=1$，不满足题意；对于选项C，$f(x)=0$，$f'(x)=0$，满足题意；对于选项D，$f(x)=1-x$，$f'(x)=-1$，不满足题意. 故选C.

3. A 【解析】$\int_{-4}^{3}|x+2|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{3}(x+2)\mathrm{d}x+\int_{-4}^{-2}-(x+2)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{3}+\left(-\dfrac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{-4}^{-2}=\dfrac{29}{2}$.

4. B 【解析】$f'(x)=2x+2f'(1)$，令$x=1$，得$f'(1)=2+2f'(1)$，即$f'(1)=-2$. ∴$f(x)=x^2-4x+3$，可得$f(0)=f(4)$.

5. B 【解析】令$f(x)=2x^3-6x^2+7$，则$f'(x)=6x^2-12x$. 由$f'(x)>0$得$x>2$或$x<0$；由$f'(x)<0$得$0<x<2$. 故$f(x)$在$(0,2)$内单调递减. ∵$f(0)=7>0$，$f(2)=-1<0$，∴方程在$(0,2)$内只有1个实根.

6. C 【解析】由题，得$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$，所以$f'(0)=e^0(\cos 0-\sin 0)=1$，即函数$f(x)=e^x\cdot\cos x$的图像在点$(0,f(0))$处切线的斜率为1. 故选C.

7. B 【解析】当$a=-3$时，$f(x)=-3x^3+6x$，$x\in[-1,1]$，$f'(x)=-9x^2+6$，令$f'(x)=0$，可得$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 当$x\in\left[-1,-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},1\right]$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$是减函数；当$x\in\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$是增函数. 所以$f(x)$的极大值为$f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}>3$，故$a=-3$不满足条件，故排除C，D.
当$a=12$时，$f(x)=12x^3-9x$，$x\in[-1,1]$，$f'(x)=36x^2-9$，令$f'(x)=0$，可得$x=\pm\dfrac{1}{2}$. 当$x\in\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},1\right]$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$是增函数；当$x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$是减函数. 所以$f(x)$的极大值为$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{12}{8}+\dfrac{9}{2}=3$，又$f(1)=3$，故$a=12$满足题意. 故选B.

8. D 【解析】根据$f(x)$的图像可得，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，则在$(-\infty,0)$上$f'(x)>0$，而$f(x)$在$(0,+\infty)$上先增后减再增，则在$(0,+\infty)$上$f'(x)$需满足先正后负再正，对照四个选项知，只有D符合.

9. A 【解析】设$F(x)=\dfrac{f(x)+2}{e^{2x}}$，则$F'(x)=\dfrac{f'(x)-2f(x)-4}{e^{2x}}$. ∵$f'(x)-2f(x)-4>0$，∴$F'(x)>0$，即函数$F(x)$在定义域上单调递增. ∵$f(0)=-1$，∴$F(0)=1$，∴不等式$f(x)+2>e^{2x}$等价为$\dfrac{f(x)+2}{e^{2x}}>1$，等价为$F(x)>F(0)$，解得$x>0$，故原不等式的解集为$(0,+\infty)$.

10. C 【解析】曲线$y=x^3-2ax^2+2ax$上任意点处的切线的斜率$k=y'=3x^2-4ax+2a$，由题设可得$3x^2-4ax+2a>0$恒成立，所以$\Delta=16a^2-24a<0$，解得$0<a<\dfrac{3}{2}$，又a为整数，所以$a=1$.

11. C 【解析】设函数$g(x)=\dfrac{x^4f(2x)}{e^x}$，则$g'(x)=\dfrac{[x^4f(2x)]'e^x-x^4f(2x)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{4x^3f(2x)+2x^4f'(2x)-x^4f(2x)}{e^x}=\dfrac{(4x^3-x^4)f(2x)+2x^4f'(2x)}{e^x}=\dfrac{x^3[(4-x)f(2x)+2xf'(2x)]}{e^x}$.
∵$(4-x)f(2x)+2xf'(2x)>0$恒成立，∴当$x>0$时，$g'(x)>0$，此时函数$g(x)$单调递增；当$x<0$时，$g'(x)<0$，此时函数$g(x)$单调递减. ∴当$x=0$时，$g(x)$取得极小值，同时也是最小值，即$g(0)=0$，∴$g(x)=\dfrac{x^4f(2x)}{e^x}\geqslant g(0)$，即$g(x)=\dfrac{x^4f(2x)}{e^x}\geqslant 0$. 当$x\neq 0$时，$g(x)>0$，∴当$x\neq 0$时，$f(x)>0$. ∵$(4-x)f(2x)+2xf'(2x)>0$恒成立，∴当$x=0$时，$4f(0)+0>0$恒成立，∴$f(0)>0$. 综上，无论$x$取何值，恒有$f(x)>0$，故选C.

12. B 【解析】当$a=0$时，由$f(x)=-3x^2+1=0$，解得$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，函数$f(x)$有两个零点，不符合题意. 当$a>0$时，令$f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\dfrac{2}{a}\right)=0$，解得$x=0$或$x=\dfrac{2}{a}>0$，此时$f'(x)$，$f(x)$随$x$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$	$\dfrac{2}{a}$	$\left(\dfrac{2}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

∵当$x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$，且$f(0)=1>0$，∴存在$x_0<0$，使得$f(x_0)=0$，不符合题意.
当$a<0$时，令$f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\dfrac{2}{a}\right)=0$，解得$x=0$或$x=\dfrac{2}{a}<0$，此时$f'(x)$，$f(x)$随$x$的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,\dfrac{2}{a}\right)$	$\dfrac{2}{a}$	$\left(\dfrac{2}{a},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

∵$f(0)=1>0$，且当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，∴存在$x_0>0$，使得$f(x_0)=0$.
又$f(x)$存在唯一的零点x_0，∴极小值$f\left(\dfrac{2}{a}\right)=a\left(\dfrac{2}{a}\right)^3-3\left(\dfrac{2}{a}\right)^2+1>0$，∴$a>2$或$a<-2$，又∵$a<0$，∴$a<-2$. 综上可知，$a$的取值范围是$(-\infty,-2)$.

13. 3 【解析】函数$y=a\ln x-x+1$的导函数为$y'=\dfrac{a}{x}-1$，在$x=1$处的切线的斜率为$y'|_{x=1}=a-1$，直线$x+2y-1=0$的斜率为$-\dfrac{1}{2}$. 因为切线与直线$x+2y-1=0$垂直，所以$(a-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$，解得$a=3$.

14. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 【解析】函数$y=\dfrac{1}{x}+2\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$，且$y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$. 由$\begin{cases}x>0,\\ y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\ \dfrac{2x-1}{x^2}<0\end{cases}\Rightarrow 0<x<\dfrac{1}{2}$，所以函数$y=\dfrac{1}{x}+2\ln x$的单调递减区间为$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

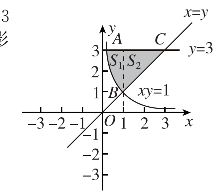
15. π 【解析】∵$y=\sqrt{1-x^2}$表示x轴上方的半圆，∴$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. ∴$\int_{-1}^{1}(2\sqrt{1-x^2}-\sin x)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\sin x\mathrm{d}x=2\times\dfrac{\pi}{2}-(-\cos x)\Big|_{-1}^{1}=\pi$.

16. $\left(0,\dfrac{2}{5}\right]\cup[1,+\infty)$ 【解析】由函数$f(x)=\dfrac{3x}{a}-2x^2+\ln x$，得$f'(x)=\dfrac{3}{a}-4x+\dfrac{1}{x}$，因为函数$f(x)$在$[1,2]$上为单调函数，所以当$x\in[1,2]$时，$f'(x)\geqslant 0$恒成立或$f'(x)\leqslant 0$恒成立，即$\dfrac{3}{a}\geqslant 4x-\dfrac{1}{x}$在$[1,2]$上恒成立或$\dfrac{3}{a}\leqslant 4x-\dfrac{1}{x}$在$[1,2]$上恒成立，且$a>0$. 设$h(x)=4x-\dfrac{1}{x}$，因为函数$h(x)$在$[1,2]$上单调递增，所以$\dfrac{3}{a}\geqslant h(2)=4\times 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$或$\dfrac{3}{a}\leqslant h(1)=3$，解得$0<a\leqslant\dfrac{2}{5}$或$a\geqslant 1$，即实数$a$的取值范围是$\left(0,\dfrac{2}{5}\right]\cup[1,+\infty)$.

17. 解：(1) $y'=2x(\ln x+\sin x)+x^2\left(\dfrac{1}{x}+\cos x\right)=2x\ln x+2x\sin x+x+x^2\cos x$.
(2) $y'=\dfrac{(-\sin x-1)x^2-(\cos x-x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{x-2\cos x-x\sin x}{x^3}$.
(3) $y'=\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\ln x+\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$.
(4) $y'=10x^4+12x^3-12x^2$.

18. 解：由导数定义可得$f'(x)=3x^2$. 由题知$3x_0^2=3$，则$x_0=\pm 1$.
当$x_0=1$时，切点坐标为$(1,1)$，曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的切线方程为$y-1=3(x-1)$，即$3x-y-2=0$；
当$x_0=-1$时，切点坐标为$(-1,-1)$，曲线$y=f(x)$在点$(-1,-1)$处的切线方程为$y+1=3(x+1)$，即$3x-y+2=0$.
综上知，曲线$y=f(x)$在点A处的切线方程为$3x-y-2=0$或$3x-y+2=0$.

19. 解：作出曲线$xy=1$及直线$x=y$，$y=3$的草图如图所示，所求面积为图中阴影部分的面积.



由$\begin{cases}xy=1,\\ y=3,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\ y=3,\end{cases}$
故$A\left(\dfrac{1}{3},3\right)$；由$\begin{cases}xy=1,\\ y=x,\end{cases}$
得$\begin{cases}x=1,\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\ y=-1\end{cases}$（舍去），
故$B(1,1)$；由$\begin{cases}y=x,\\ y=3,\end{cases}$得$\begin{cases}x=3,\\ y=3,\end{cases}$故$C(3,3)$.
故所求面积$S=S_1+S_2=\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}(3-x)\mathrm{d}x=(3x-\ln x)\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}+\left(3x-\dfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{1}^{3}=4-\ln 3$.

20. 解：(1)函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x=\dfrac{2-2x^2}{x}$. 由$f'(x)>0$得$0<x<1$，由$f'(x)<0$得$x>1$，
∴$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，单调递减区间为$(1,+\infty)$.
(2)由(1)知，当$x\in\left[\dfrac{1}{e},e\right]$时，$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{e},1\right)$上单调递增，在$(1,e]$上单调递减，∴$f(x)_{\max}=f(1)=-1$.
又∵$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-2-\dfrac{1}{e^2}$，$f(e)=2-e^2$，∴$f(x)_{\min}=2-e^2$.

21. 解：(1)当$a=3$时，$f'(x)=-2x+3-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2x^2-3x+1}{x}=-\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}(x>0)$，易知函数$f(x)$在区间$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$上仅有极大值点$x=1$，故这个极大值点也是最大值点，
故函数$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上的最大值是$f(1)=2$.
又$f(2)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=(2-\ln 2)-\left(\dfrac{5}{4}+\ln 2\right)=\dfrac{3}{4}-2\ln 2<0$，
所以$f(2)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，
故函数$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上的最小值为$f(2)=2-\ln 2$.
(2) $f'(x)=-2x+a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2x^2+ax-1}{x}(x>0)$，
若$f(x)$既有极大值又有极小值，则$f'(x)=0$有两个不同的正根，即$2x^2-ax+1=0$有两个不同的正根，故实数a应满足$\begin{cases}\Delta>0,\\ \dfrac{a}{2}>0,\end{cases}$即$\begin{cases}a^2-8>0,\\ a>0,\end{cases}$得$a>2\sqrt{2}$.

22. 解：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.
(1)当$a=1$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-2x$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-2=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，∴函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ∵$f(1)=-\dfrac{3}{2}<0$，$f(4)=\ln 4>0$，∴函数$f(x)$有且只有一个零点.
(2)当$a>0$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+ax-(a+1)=\dfrac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\dfrac{(x-1)(ax-1)}{x}(x>0)$，令$f'(x)=0$，解得$x=1$或$x=\dfrac{1}{a}$.
①当$0<\dfrac{1}{a}\leqslant 1$，即$a\geqslant 1$时，$f(x)$在$[1,e]$上单调递增，
∴$f(x)$在$[1,e]$上的最小值是$f(1)=-\dfrac{1}{2}a-1=-2$，解得$a=2$.
②当$1<\dfrac{1}{a}<e$，即$\dfrac{1}{e}<a<1$时，$f(x)$在$\left[1,\dfrac{1}{a}\right]$上单调递减，在$\left[\dfrac{1}{a},e\right]$上单调递增，
∴$f(x)$在$[1,e]$上的最小值为$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a-\dfrac{1}{2a}-1=-2$，
即$\ln a+\dfrac{1}{2a}=1$.
令$h(a)=\ln a+\dfrac{1}{2a}$，$a\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，则$h'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{2a-1}{2a^2}$，
令$h'(a)=0\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$，
∴$h(a)$在$\left(\dfrac{1}{e},\dfrac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$上单调递增，
而$h\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1+\dfrac{e}{2}<1$，$h(1)=\dfrac{1}{2}<1$，不合题意.
③当$\dfrac{1}{a}\geqslant e$，即$0<a\leqslant\dfrac{1}{e}$时，$f(x)$在$[1,e]$上单调递减，
∴$f(x)$在$[1,e]$上的最小值是$f(e)=1+\dfrac{1}{2}ae^2-(a+1)e=-2$，
解得$a=\dfrac{6-2e}{2e-e^2}<0$，不合题意. 综上可得，$a=2$.

单元测评(一)B

1. D 【解析】由$y=e^{2x}$，可得$y'=2e^{2x}$，令$x=0$，可得$y'=2$，∴曲线$y=e^{2x}$在点$(0,1)$处的切线方程为$y-1=2x$，即$y=2x+1$.

2. C 【解析】记$s(t)=1-t+t^2$，则$s'(t)=-1+2t$，所以该物体在$t=3$ s时的瞬时速度是$s'(3)=-1+6=5$(m/s). 故选C.

3. A 【解析】∵$f(x)=(x-3)e^x$，∴$f'(x)=(x-2)e^x$，令$(x-2)e^x<0$，得$x<2$. ∴函数$f(x)=(x-3)e^x$的单调递减区间是$(-\infty,2)$.

4. D 【解析】求导得$f'(x)=a\cos x+3bx^2$，∵$f'(-x)=a\cos(-x)+3b(-x)^2=f'(x)$，∴$f'(x)$为偶函数，∴$f'(2018)-f'(-2018)=0$. 又$f(2017)+f(-2017)=a\sin 2017+b\cdot 2017^3+4+a\sin(-2017)+b(-2017)^3+4=8$，∴$f(2017)+f(-2017)+f'(2018)-f'(-2018)=8$.

5. D 【解析】选项A中，若$f(x)=x^2$，则$f'(x)=2x$，故A中图像关系正确；选项B中，若$f'(x)$图像为恒在x轴上方部分的图像，则$f(x)$单调递增，故B中图像关系正确；选项C中，若$f'(x)$图像为恒在x轴上方部分的图像，则$f(x)$单调递增，故C中图像关系正确；选项D中，若$f'(x)$图像为恒在x轴上方部分的图像，则$f(x)$单调递增，若$f'(x)$图像为恒在x轴下方部分的图像，则$f(x)$单调递减，故D中图像关系不正确. 故选D.

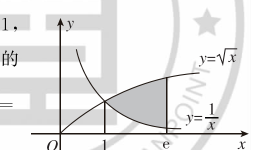
6. C 【解析】$F(x)$所做的功$W=\int_{1}^{2}(5-x^2)\cdot\cos 30^\circ\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\int_{1}^{2}(5-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(5x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{1}^{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{8}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$(J).

7. D 【解析】由题意，得$y'=-\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{4}{e^x+\dfrac{1}{e^x}+2}\in[-1,0)$，所以$\alpha\in\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，故选D.

8. B 【解析】由函数$f(x)=x^3-px^2-qx$的图像与x轴相切于点$(1,0)$，得$p+q=1$，$2p+q=3$，解得$p=2$，$q=-1$，所以$f(x)=x^3-2x^2+x$，所以$f'(x)=3x^2-4x+1$. 令$f'(x)>0$，解得$x>1$或$x<\dfrac{1}{3}$；令$f'(x)<0$，解得$\dfrac{1}{3}<x<1$. 故$f(x)$在$\left[-1,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{3},1\right]$上单调递减，故$f(x)$的最大值是$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$，而$f(-1)=-4$，$f(1)=0$，故$f(x)$的最小值是$-4$.

9. B 【解析】∵函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上存在单调递增区间，∴函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$上存在子区间使得不等式$f'(x)>0$成立. $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2(x-b)=\dfrac{2x^2-2bx+1}{x}$，设$h(x)=2x^2-2bx+1$，则$h(2)>0$或$h\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，即$8-4b+1>0$或$\dfrac{1}{2}-b+1>0$，解得$b<\dfrac{9}{4}$.

10. A 【解析】如图所示，由直线$x=1$，$x=e$与曲线$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$围成的阴影部分面积是$\int_{1}^{e}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{1}^{e}\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_{1}^{e}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{e}-$



$\ln x\Big|_1^{e}=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}-1+0=\frac{1}{3}(2e^{\frac{3}{2}}-5)$,故选 A.

11. A [解析] $\because f(x)=4x^2-f(-x)$,$\therefore f(x)-2x^2+f(-x)-2x^2=0$,设 $g(x)=f(x)-2x^2$,则 $g(x)+g(-x)=0$,$\therefore$函数 $g(x)$为奇函数. $\because x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)+\frac{1}{2}<4x$,$\therefore g'(x)=f'(x)-4x<-\frac{1}{2}$,故函数 $g(x)$在$(-\infty,0)$上是减函数,在$(0,+\infty)$上也是减函数. 若 $f(m+1)\leqslant f(-m)+4m+2$,则 $f(m+1)-2(m+1)^2\leqslant f(-m)-2m^2$,即 $g(m+1)\leqslant g(-m)$,$\therefore m+1\geqslant -m$,解得 $m\geqslant -\frac{1}{2}$,故选 A.

12. A [解析] 对任意 $x_1\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,存在 $x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,使得 $f'(x_1)\leqslant g(x_2)$,则 $f'(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$. $\because f'(x)=(x+1)^2+a-1$ 在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递增,$\therefore f'(x)_{\max}=f'(2)=8+a$. $\because g(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减,$\therefore g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{e}$,$\therefore 8+a\leqslant\frac{\sqrt{e}}{e}$,则 $a\leqslant\frac{\sqrt{e}}{e}-8$.

13. -2 [解析] $f'(x)=x^2-2ax=x(x-2a)$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$或 $x=2a$. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+1$ 在 $x=-4$ 处取得极大值,则 $2a=-4$,解得 $a=-2$.

14. $\frac{2}{3}$ [解析] 函数 $f(x)=ax+\frac{b}{x}(b>0)$的导函数为 $f'(x)=a-\frac{b}{x^2}$,所以 $f(x)$的图像在点 $P(1,f(1))$处的切线斜率 $k=a-b$,由切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直,可得 $k=a-b=2$,即 $a=b+2$. 由函数 $f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增可得 $a-\frac{b}{x^2}\geqslant 0$ 在区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立,即当 $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$时,$\frac{b}{a}\leqslant(x^2)_{\min}$,由 $x\geqslant\frac{1}{2}$可得 $x^2\geqslant\frac{1}{4}$,即有$\frac{b}{b+2}\leqslant\frac{1}{4}$,又 $b>0$,所以 $0<b\leqslant\frac{2}{3}$,故 b 的最大值为$\frac{2}{3}$.

15. 2 [解析] 设圆柱的高为 h,则圆柱的体积 $V=\pi r^2h=16\pi\Rightarrow r^2h=16$,则圆柱的表面积 $S=2\pi rh+2\pi r^2=\frac{32\pi}{r}+2\pi r^2=2\pi\left(\frac{16}{r}+r^2\right)$. 由 $S'=2\pi\left(-\frac{16}{r^2}+2r\right)=0$,得 $r=2$.

当 r 变化时,S',S 的变化情况如下表:

r	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
S'	$-$	0	$+$
S	↘	极小值,也是最小值	↗

故当底面半径 $r=2$ cm 时,圆柱的表面积最小.

16. ②④ [解析] $f'(x)=(3-x^2-2x)e^x$,对于①,$f'(0)=3$,$f(0)=3$,则曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y-3=3(x-0)$,即 $3x-y+3=0$,故①不正确. 对于②,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-3$,即在曲线 $y=f(x)$上任一点处的切线中有且只有两条与 x 轴平行,故②正确. 对于③,由②知函数 $f(x)$在$(-\infty,-3)$,$(1,+\infty)$上单调递减,在$(-3,1)$上单调递增,又当 $x\to-\infty$时,$f(x)\to 0$,当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to-\infty$,函数 $f(x)$的极小值为 $f(-3)=-6e^{-3}$,极大值为 $f(1)=2e$,所以若方程 $f(x)=m$ 恰有一个实数根,则 $m<-6e^{-3}$或 $m=2e$,故③不正确. 对于④,若方程 $f(x)=m$ 恰有两个不同实数根,则 $0\leqslant m<2e$ 或 $m=-6e^{-3}$,故④正确. 故所有正确结论的序号为②④.

17. 解:(1)设过点$(1,0)$的直线与曲线 $y=x^3$ 相切于点(x_0,x_0^3),
又 $y'|_{x=x_0}=3x_0^2$,所以切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$,
即 $y=3x_0^2x-2x_0^3$,又点$(1,0)$在切线上,所以可得 $x_0=0$ 或 $x_0=\frac{3}{2}$,对应的切线方程为 $y=0$ 或 $y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$.

(2)当切线方程为 $y=0$ 时,由$\begin{cases}y=0,\\ y=ax^2+\frac{15}{4}x-9,\end{cases}$

消去 y,可得 $ax^2+\frac{15}{4}x-9=0$,

由 $\Delta=0$,即$\left(\frac{15}{4}\right)^2+36a=0$,解得 $a=-\frac{25}{64}$;

当切线方程为 $y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$时,

由$\begin{cases}y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4},\\ y=ax^2+\frac{15}{4}x-9,\end{cases}$ 消去 y 可得 $ax^2-3x-\frac{9}{4}=0$,

又由 $\Delta=0$,即 $9+9a=0$,解得 $a=-1$.

综上可得,$a=-\frac{25}{64}$或 $a=-1$.

18. 解:(1)$f'(x)=3x^2-9x+6=3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\geqslant-\frac{3}{4}$,

由 $f'(x)\geqslant m$ 恒成立,可得 $m\leqslant-\frac{3}{4}$,即 m 的最大值为$-\frac{3}{4}$.

(2)$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-2)(x-1)$,
由 $f'(x)>0$,得 $x>2$ 或 $x<1$,由 $f'(x)<0$,得 $1<x<2$,
$\therefore f(x)$在$(-\infty,1)$和$(2,+\infty)$上单调递增,在$(1,2)$上单调递减,$\therefore f(x)_{极大值}=f(1)=\frac{5}{2}-a$,$f(x)_{极小值}=f(2)=2-a$.

$\because f(x)$恰有一个零点,$\therefore\frac{5}{2}-a<0$ 或 $2-a>0$,即 $a<2$ 或 $a>\frac{5}{2}$.

19. 解:(1)因为 $f(x)=\ln|x|$,

所以当 $x>0$ 时,$f(x)=\ln x$,$f'(x)=\frac{1}{x}$,

当 $x<0$ 时,$f(x)=\ln(-x)$,$f'(x)=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$.

所以当 $x\neq 0$ 时,函数 $g(x)=x+\frac{a}{x}$.

(2)由(1)知当 $x>0$ 时,$g(x)=x+\frac{a}{x}$,

所以当 $a>0$,$x>0$ 时,$g(x)\geqslant 2\sqrt{a}$,当且仅当 $x=\sqrt{a}$时取等号.
所以函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值是 $2\sqrt{a}$,
依题意得 $2\sqrt{a}=2$,所以 $a=1$.

(3)由$\begin{cases}y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6},\\ y=x+\frac{1}{x},\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=\frac{3}{2},\\ y_1=\frac{13}{6},\end{cases}\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=\frac{5}{2},\end{cases}$

所以直线 $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$与函数 $g(x)$的图像所围成图形的面积

$S=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left[\left(\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]dx=\frac{7}{24}+\ln 3-2\ln 2$.

20. 解:(1)设该产品一年的销售量为 $Q(x)=\frac{k}{e^x}$,则$\frac{k}{e^{40}}=500$,

所以 $k=500e^{40}$,则该产品一年的销售量 $Q(x)=\frac{500e^{40}}{e^x}$,

则该产品一年的利润 $L(x)=(x-a-30)\frac{500e^{40}}{e^x}=500e^{40}\cdot\frac{x-a-30}{e^x}(35\leqslant x\leqslant 41)$.

(2)$L'(x)=500e^{40}\cdot\frac{31+a-x}{e^x}$.
①若 $2\leqslant a\leqslant 4$,则 $33\leqslant a+31\leqslant 35$,
当 $35\leqslant x\leqslant 41$ 时,$L'(x)\leqslant 0$,$L(x)$单调递减,
所以当 $x=35$ 时,$L(x)$取得最大值,最大值为 $500(5-a)e^5$;
②若 $4<a\leqslant 5$,则 $35<a+31\leqslant 36$,
令 $L'(x)=0$,得 $x=a+31$,易知当 $x=a+31$ 时,$L(x)$取得最大值,最大值为 $500e^{9-a}$.
综上所述,当 $2\leqslant a\leqslant 4$,且每件产品的售价为 35 元时,该产品一年的利润最大,最大利润为 $500(5-a)e^5$ 万元;当 $4<a\leqslant 5$,且每件产品的售价为$(31+a)$元时,该产品一年的利润最大,最大利润为 $500e^{9-a}$万元.

21. 解:(1)$\because f(x)=x^2+bx+c$ 为偶函数,$\therefore\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=f(x)$,易得 $b=0$,又曲线 $y=f(x)$过点$(2,5)$,$\therefore 2^2+c=5$,解得 $c=1$,$\therefore f(x)=x^2+1$,则 $g(x)=(x+a)f(x)=x^3+ax^2+x+a$.
$\because$曲线 $y=g(x)$有斜率为 0 的切线,$\therefore g'(x)=3x^2+2ax+1=0$ 有实数解,此时有 $\Delta=4a^2-12\geqslant 0$,解得 $a\leqslant-\sqrt{3}$或 $a\geqslant\sqrt{3}$,$\therefore a\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$.
(2)当 $x=-1$ 时函数 $y=g(x)$取得极值,故有 $g'(-1)=0$,解得 $a=2$. $g'(x)=3x^2+4x+1=(3x+1)(x+1)$,令 $g'(x)=0$,得 $x_1=-1$,$x_2=-\frac{1}{3}$. 当$-1<x<-\frac{1}{3}$时,$g'(x)<0$,$\therefore g(x)$的单调递减区间为$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$.

22. 解:(1)①函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=2a+\frac{b}{x^2}+\frac{1}{x}$.

$\because f(x)$在 $x=1$,$x=\frac{1}{2}$处取得极值,$\therefore f'(1)=0$,$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$,

即$\begin{cases}2a+b+1=0,\\ 2a+4b+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\ b=-\frac{1}{3}.\end{cases}$

②存在 $x_0\in\left[\frac{1}{4},2\right]$,使得不等式 $f(x_0)-c\leqslant 0$ 成立,则只需 $c\geqslant f(x)_{\min}$.

$\because f'(x)=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x}=-\frac{2x^2-3x+1}{3x^2}=-\frac{(2x-1)(x-1)}{3x^2}$,$\therefore$当 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$时,$f'(x)\leqslant 0$,函数 $f(x)$单调递减;

当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时,$f'(x)\geqslant 0$,函数 $f(x)$单调递增;

当 $x\in[1,2]$时,$f'(x)\leqslant 0$,函数 $f(x)$单调递减.

$\therefore f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$处取得极小值,

即 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{3}-\ln 2$,又 $f(2)=-\frac{7}{6}+\ln 2$,

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)$,$\therefore c\geqslant f(x)_{\min}=-\frac{7}{6}+\ln 2$,

$\therefore c\in\left[-\frac{7}{6}+\ln 2,+\infty\right)$,故 $c_{\min}=-\frac{7}{6}+\ln 2$.

(2)当 $a=b$ 时,$f'(x)=\frac{2ax^2+x+a}{x^2}$.

当 $a=0$ 时,$f(x)=\ln x$,则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;
当 $a>0$ 时,$\because x>0$,$\therefore 2ax^2+x+a>0$,$\therefore f'(x)>0$,则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当 $a<0$ 时,设 $g(x)=2ax^2+x+a$,则$-\frac{1}{4a}>0$,故只需 $\Delta\leqslant 0$,从而得$a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$,此时 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

综上可得,$a\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{4}\right]\cup[0,+\infty)$.

单元测评(二)

1. C [解析] 易知大前提“二次函数的图像是抛物线”正确,当 $a=0$ 时,$y=ax^2-x+2$ 不是二次函数,所以小前提“$y=ax^2-x+2$ 是二次函数”不正确. 故选 C.
2. B [解析] 选项 A 为归纳推理,选项 C,D 为演绎推理.
3. A [解析] 用反证法证明命题时,先假设命题的结论的否定成立,再进行推证. “x,y 至少有一个能被 7 整除”的否定是“x,y 都不能被 7 整除”.
4. D [解析] 方法一:因为 $a+b+c=0$,所以 $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0$,所以 $ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\leqslant 0$.

方法二:令 $c=0$,若 $b=0$,则 $ab+bc+ca=0$,否则 a,b 异号,所以 $ab+bc+ca=ab<0$,排除选项 A,B,C,故选 D.
5. A [解析] 由类比推理可知,在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别为 a,b,$c(abc\neq 0)$的平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
6. B [解析] 若$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$,则 $a=b=c$,与“a,b,c 是不全相等的正数”矛盾,故①正确. $a=b$,$b=c$,$a=c$ 中最多只能有一个成立,故②不正确. 由于“a,b,c 是不全相等的正数”有两种情形:只有两个数相等或三个数都互不相等,故③不正确.
7. D [解析] 由类比推理可得,d_n 的表达式应为 $d_n=\sqrt[n]{c_1\cdot c_2\cdot\cdots\cdot c_n}$. 故选 D.
8. B [解析] 整数解个数按顺序构成首项为 4,公差为 4 的等差数列,因此$|x|+|y|=20$ 的不同整数解(x,y)的个数为 $4+4\times(20-1)=80$,故选 B.
9. A [解析] $f(k+1)=1^2+2^2+3^2+\cdots+(2k)^2+(2k+1)^2+[2(k+1)]^2=f(k)+(2k+1)^2+(2k+2)^2$.
10. B [解析] 因为 $x>0$,$y>0$ 且 $x+y=1$,所以 $xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$时等号成立,所以 $x^2+y^2+xy=(x+y)^2-xy=1-xy\geqslant 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,故 x^2+y^2+xy 的最小值为$\frac{3}{4}$.
11. B [解析] 依题意,把“整数对”的和相同的分为一组,易知第 n 组中每个“整数对”的和均为 $n+1$,且第 n 组共有 n 个“整数对”,这样的前 n 组一共有 $\frac{n(n+1)}{2}$个“整数对”,注意到 $\frac{10\times(10+1)}{2}<60<\frac{11\times(11+1)}{2}$,因此第 60 个“整数对”处于第 11 组(每个“整数对”的和为 12 的组)的第 5 个位置. 结合题意可知,每个“整数对”的和为 12 的组中各数对依次为$(1,11)$,$(2,10)$,$(3,9)$,$(4,8)$,$(5,7)$,…. 因此第 60 个“整数对”是$(5,7)$,故选 B.
12. D [解析] 根据题意知,$5^5=3125$,其末四位数字为 3125,
$5^6=15\ 625$,其末四位数字为 5625,
$5^7=78\ 125$,其末四位数字为 8125,
$5^8=390\ 625$,其末四位数字为 0625,
$5^9=1\ 953\ 125$,其末四位数字为 3125,
$5^{10}=9\ 765\ 625$,其末四位数字为 5625,
$5^{11}=48\ 828\ 125$,其末四位数字为 8125,
$5^{12}=244\ 140\ 625$,其末四位数字为 0625,
……
分析可得,当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时,5^{4k+1}的末四位数字为 3125,5^{4k+2}的末四位数字为 5625,5^{4k+3}的末四位数字为 8125,5^{4k+4}的末四位数字为 0625,又由 $2019=4\times 504+3$,可得 5^{2019}的末四位数字为 8125. 故选 D.
13. $2k+1$ [解析] n 为正奇数,假设当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时成立后,需证明的应为当$n=2k+1(k\in\mathbf{N}^*)$时也成立.
14. $\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$ [解析] 圆的方程可写成 $x\cdot x+y\cdot y=r^2$,圆在点(x_0,y_0)处的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$,类似地,椭圆的方程可写成$\frac{x\cdot x}{32}+\frac{y\cdot y}{8}=1$,椭圆在点$(x_0,y_0)$处的切线方程为$\frac{x_0\cdot x}{32}+\frac{y_0\cdot y}{8}=1$,故椭圆$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 在点$(4,2)$处的切线方程为$\frac{4x}{32}+\frac{2y}{8}=1$,即$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}=1$.
15. ③ [解析] 设正方形的边长为 a,则正方形的面积 $S(a)=a^2$,而 $S'(a)=2a\neq$正方形的周长,故①中结论不正确;设正方体的棱长为 b,则正方体的体积 $V(b)=b^3$,而 $V'(b)=3b^2\neq$正方体的表面积,故②中结论不正确;设球的半径为 R,则 $V(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$,而 $V'(R)=4\pi R^2=$球的表面积. 故③中结论正确.
16. 509 [解析] 由题图知,$a_1=1$,$a_2=1+2^2$,$a_3=1+2^2+2^3$,$a_4=1+2^2+2^3+2^4$,…. 所以 $a_8=1+2^2+2^3+\cdots+2^8=(2+2^2+2^3+\cdots+2^8)-1=\frac{2\times(1-2^8)}{1-2}-1=509$.
17. 解:(1)由题意知 $f(1)=3$,$f(2)=f(1)+3+3\times 2=12$,
$f(3)=f(2)+3+3\times 4=27$,$f(4)=f(3)+3+3\times 6=48$,
$f(5)=f(4)+3+3\times 8=75$.
(2)由(1)知,$f(n+1)=f(n)+3+3\times 2n=f(n)+6n+3$,
即 $f(n+1)-f(n)=6n+3$,故 $f(2)-f(1)=6\times 1+3$,
$f(3)-f(2)=6\times 2+3$,
$f(4)-f(3)=6\times 3+3$,
…
$f(n)-f(n-1)=6(n-1)+3$,$n\geqslant 2$.
将上面$(n-1)$个式子相加,得
$f(n)-f(1)=6[1+2+3+\cdots+(n-1)]+3(n-1)=6\times\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}+3(n-1)=3n^2-3$,$n\geqslant 2$.
又 $f(1)=3$,所以 $f(n)=3n^2$,$n\geqslant 2$. 当 $n=1$ 时,$f(1)=3$ 也满足上式,故 $f(n)=3n^2$,$n\in\mathbf{N}^*$.
18. 证明:要证 $a^2+b^2+c^2>\frac{4}{5}(ab+bc+ca)$,
只需证 $5(a^2+b^2+c^2)>4(ab+bc+ca)$,
只需证 $5a^2+5b^2+5c^2-(4ab+4bc+4ca)>0$,
只需证$(a^2-4ab+4b^2)+(b^2-4bc+4c^2)+(c^2-4ca+4a^2)>0$,
即证$(a-2b)^2+(b-2c)^2+(c-2a)^2>0$.
因为$(a-2b)^2\geqslant 0$,$(b-2c)^2\geqslant 0$,$(c-2a)^2\geqslant 0$,且这三个不等式中等号不可能同时成立(若等号同时成立,则必有 $a=b=c=0$),
所以$(a-2b)^2+(b-2c)^2+(c-2a)^2>0$,所以原不等式成立.
19. 解:(1)验证①式成立:$\because\sqrt{3}<1.74$,$\therefore\sqrt{1}+\sqrt{3}<2.74$.
$\because\sqrt{2}>1.41$,$\therefore 2\sqrt{2}>2.82$,$\therefore\sqrt{1}+\sqrt{3}<2\sqrt{2}$.
(2)一般结论为:若 $n\in\mathbf{N}^*$,则$\sqrt{n}+\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}$. 证明如下:
要证$\sqrt{n}+\sqrt{n+2}<2\sqrt{n+1}$,
只需证$(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})^2<(2\sqrt{n+1})^2$,

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题

1.1.2　导数的概念

【预习探究】

知识点一

x_2-x_1　$f(x_2)-f(x_1)$

思考　(1)×　(2)×

探究　解：令 $f(x)=2x^2-3x+5$，

则 $\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$

$=2(x_1+\Delta x)^2-3(x_1+\Delta x)+5-(2x_1^2-3x_1+5)$

$=2[(\Delta x)^2+2x_1\Delta x]-3\Delta x$

$=2(\Delta x)^2+(4x_1-3)\Delta x$，

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(\Delta x)^2+(4x_1-3)\Delta x}{\Delta x}=2\Delta x+(4x_1-3)$，

当 $x_1=4$，$x_2=5$ 时，$\Delta x=1$，$\Delta y=2(\Delta x)^2+(4x_1-3)\Delta x=2+13=15$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=15$.

知识点二

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

思考　(1)×　(2)√

探究　解：$\because \Delta s=2[1-(1.2+\Delta t)^2]-2\times(1-1.2^2)=-2(\Delta t)^2-4.8\Delta t$，$\therefore \dfrac{\Delta s}{\Delta t}=-4.8-2\Delta t$，当 $\Delta t\to 0$ 时，1.2 s 末的瞬时速度为 -4.8 m/s.

讨论　解：Δt 与 0 的距离要多近就有多近，即 $|\Delta t-0|$ 可以小于给定的任意小的正数，但始终 $\Delta t\neq 0$.

知识点三

$f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

思考　(1)×　(2)√

讨论　解：导数或瞬时变化率可以反映函数在一点处变化的快慢程度.

【考点类析】

考点一

导入　解：(1) Δx 是相对于 x_1 的一个增量，即 $\Delta x=x_2-x_1\neq 0$，Δx 可以为正，也可以为负. Δy 是函数值的改变量，可以为正，也可以为负，也可以为 0.

(2)平均变化率是函数值的改变量 Δy 与相应自变量的改变量 Δx 的比值，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 若 $\Delta x=x_1-x_2$，则 $\Delta y=f(x_1)-f(x_2)$；若 $\Delta x=x_2-x_1$，则 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$.

例 1　(1)D　(2)B　[解析] (1)当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，相应的函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，故函数值的改变量为 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

(2)平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\frac{1}{2}-1}{2-1}=-\dfrac{1}{2}$.

变式　(1)-1　(2)5　[解析] (1)函数 $f(x)$ 在 A,B 两点间的平均变化率是 $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{1-3}{3-1}=-1$.

(2)函数 $f(x)=x^2-x$ 在区间 $[-2,t]$ 上的平均变化率是 $\dfrac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}=\dfrac{t^2-t-(-2)^2-2}{t+2}=2$，即 $t^2-t-6=2t+4$，即 $t^2-3t-10=0$，解得 $t=5$ 或 $t=-2$(舍去).

所以，当函数 $f(x)=x^2-x$ 在区间 $[-2,t]$ 上的平均变化率是 2 时，t 的值是 5.

[小结] 求平均变化率的三个步骤：

(1)计算 Δy：计算函数值的增量 $f(x_2)-f(x_1)$.

(2)计算 Δx：计算自变量的增量 x_2-x_1.

(3)计算 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$：平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

拓展　解：令 $f(x)=2x^2+3x-5$，

则 $\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$

$=2(x_1+\Delta x)^2+3(x_1+\Delta x)-5-(2x_1^2+3x_1-5)$

$=2[(\Delta x)^2+2x_1\Delta x]+3\Delta x$

$=2(\Delta x)^2+(4x_1+3)\Delta x$

$=2(\Delta x)^2+19\Delta x$，

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(\Delta x)^2+19\Delta x}{\Delta x}=2\Delta x+19$.

(1)当 $x_1=4$，$x_2=5$ 时，$\Delta x=1$，$\Delta y=2(\Delta x)^2+19\Delta x=2+19=21$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=21$.

(2)当 $x_1=4$，$x_2=4.1$ 时，$\Delta x=0.1$，

$\Delta y=2(\Delta x)^2+19\Delta x=0.02+1.9=1.92$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2\Delta x+19=19.2$.

(3)在(1)中，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(5)-f(4)}{5-4}$，

它表示抛物线上点 $P_0(4,39)$ 与点 $P_1(5,60)$ 连线的斜率.

在(2)中，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(4.1)-f(4)}{4.1-4}$，

它表示抛物线上点 $P_0(4,39)$ 与点 $P_2(4.1,40.92)$ 连线的斜率.

考点二

导入　解：(1)瞬时变化率　(2)瞬时速度　(3)当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 趋近于一个确定的值. 从物理的角度看，时间间隔 $|\Delta t|$ 无限变小时，平均速度 $\bar{v}$ 就无限趋近于某时刻的瞬时速度，即 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

例 2　解：(1)物体的初速度即 $t=0$ s 时的瞬时速度，

所以此物体的初速度 $v_0=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(\Delta t)-s(0)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3+\Delta t)=3$(m/s).

(2)此物体在 $t=0$ s 到 $t=2$ s 之间的平均速度 $\bar{v}=\dfrac{s(2)-s(0)}{2-0}=\dfrac{6+4-0}{2}=5$(m/s).

(3) $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2-(3t+t^2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3+2t+\Delta t)=3+2t$，

当 $t=2$ s 时，$v=3+2\times 2=7$(m/s).

所以此物体在 $t=2$ s 时的瞬时速度为 7 m/s.

变式　16　[解析] 由例 2 知物体在时刻 t 的瞬时速度 $v=3+2t$，依题意 $3+2t=35$，得 $t=16$.

[小结] (1)平均速度反映运动物体的位移随时间变化而变化的情况. 平均速度是运动物体在一个时间段里位移的改变量与这段时间的比值.

(2)求物体运动的瞬时速度的步骤：

①由物体运动的位移 s 与时间 t 的函数关系式求出位移增量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$.

②求时间 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 之间的平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

③求 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 的值，即得 $t=t_0$ 时的瞬时速度.

拓展　解：$\because \Delta s=s(2+\Delta t)-s(2)$

$=a(2+\Delta t)^2+1-a\cdot 2^2-1$

$=4a\Delta t+a(\Delta t)^2$，

$\therefore \dfrac{\Delta s}{\Delta t}=4a+a\Delta t$.

在 $t=2$ s 时，瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=4a$，即 $4a=8$，$\therefore a=2$.

考点三

导入　解：(1)导数即为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，是一个局部概念，只与函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其附近的函数值有关，与 Δx 无关.

(2)并不是任何一个函数在定义域内的每一点处都有导数，导数研究的是函数在 $x=x_0$ 处及其附近函数值的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比的极限，是一个局部概念，若极限存在，则函数在 $x=x_0$ 处有导数，否则就没有导数. 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不存在导数，因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1,\Delta x>0,\\-1,\Delta x<0,\end{cases}$ 所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限不存在，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数不存在.

例 3　C　[解析] $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f[1+(-\Delta x)]-f(1)}{-\Delta x}=-\dfrac{1}{2}f'(1)$.

变式　解：$\because f(1+\Delta x)-f(1)=a(1+\Delta x)^2+c-a-c=a(\Delta x)^2+2a\Delta x$，

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(\Delta x)^2+2a\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a\Delta x+2a)=2a=2$，$\therefore a=1$.

[小结] 利用定义求导数的步骤：

(1)求函数值增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

拓展　解：由导数的定义知，

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=2x$，$g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2$.

$\because f'(x)+2=g'(x)$，$\therefore 2x+2=3x^2$，

即 $3x^2-2x-2=0$，解得 $x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$ 或 $x=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$.

例 4　解：$f(1+\Delta x)-f(1)=\dfrac{1}{(1+\Delta x)^2}+2-(1+2)=\dfrac{1}{(1+\Delta x)^2}-1$，$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1-(1+\Delta x)^2}{(1+\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x(1+\Delta x)^2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2-\Delta x}{(1+\Delta x)^2}=-2$.

变式　C　[解析] 因为 $f'(-1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(\Delta x-1)^3+a}{\Delta x}=3a$，所以 $3a=3$，解得 $a=1$.

【当堂自测】

1. C　[解析] 根据导数的定义可知，$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=18$(m/s)表示物体在3 s这一时刻的瞬时速度.

2. A　[解析] $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1-1}{\Delta x}=0$.

3. C　[解析] $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}f'(1)$.

4. 1　[解析] $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{7(t_0+\Delta t)^2-13(t_0+\Delta t)+8-7t_0^2+13t_0-8}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{7(\Delta t)^2+14\Delta t\cdot t_0-13\Delta t}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(7\Delta t+14t_0-13)=14t_0-13$，令 $14t_0-13=1$，则 $t_0=1$.

1.1.3　导数的几何意义

【预习探究】

知识点一

1. 切线　$f'(x_0)$　2. $f'(x_0)$　$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

思考　(1)×　(2)×　(3)√　(4)√　[解析] (4)由导数的几何意义以及倾斜角的正切值的符号与角度的关系知，说法正确.

知识点二

导函数　$f'(x)$　y'　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

探究　解：对于曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线，点 $(x_0,f(x_0))$ 一定是切点，只要求出 $k=f'(x_0)$，利用点斜式写出切线方程即可；而曲线 $y=f(x)$ 过某点 (x_0,y_0) 的切线，给出的点 (x_0,y_0) 不一定在曲线上，即使在曲线上也不一定是切点.

【考点类析】

考点一

导入　解：割线 PP_n 的斜率 $k_n=\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$，当点 P_n 无限趋近于点 P 时，k_n 无限趋近于切线 PT 的斜率 k，即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

例 1　解：设 $f(x)=2x^2+1$. 设切点的坐标为 (x_0,y_0)，则 $\Delta y=2(x_0+\Delta x)^2+1-2x_0^2-1=4x_0\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2$，$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=4x_0+2\Delta x$.

当 Δx 无限趋近于零时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于 $4x_0$，即 $f'(x_0)=4x_0$.

(1) $\because$ 抛物线的切线的倾斜角为 $45°$，$\therefore$ 斜率为 $\tan 45°=1$，即 $f'(x_0)=4x_0=1$，得 $x_0=\dfrac{1}{4}$，故切点为 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{9}{8}\right)$.

(2) $\because$ 抛物线的切线平行于直线 $4x-y-2=0$，$\therefore$ 斜率为 4，即 $f'(x_0)=4x_0=4$，得 $x_0=1$，故切点为 $(1,3)$.

(3) $\because$ 抛物线的切线与直线 $x+8y-3=0$ 垂直，$\therefore$ 斜率为 8，即 $f'(x_0)=4x_0=8$，得 $x_0=2$，故切点为 $(2,9)$.

变式　$45°$　[解析] $\because y=\dfrac{1}{2}x^2-2$，$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(x+\Delta x)^2-2-\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2+x\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(x+\dfrac{1}{2}\Delta x\right)=x$，$\therefore y'|_{x=1}=1$，$\therefore$ 曲线在点 $P\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$ 处的切线的斜率为 1，则切线的倾斜角为 $45°$.

[小结] 求曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程的基本步骤：

(1)求出 P 点的坐标 $(x_0,f(x_0))$；

(2)求出函数在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，得到曲线在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率；

(3)利用点斜式求切线方程.

考点二

导入　(1) y 轴　(2) x 轴　(3)锐角　(4)钝角

例 2　C　[解析] $k_{AB}=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$，$f'(2)$ 为函数 $f(x)$ 的图像在点 $B(2,f(2))$ 处的切线的斜率，$f'(3)$ 为函数 $f(x)$ 的图像在点 $A(3,f(3))$ 处的切线的斜率，根据图像可知 $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$.

变式　B　[解析] 由图可知函数 $f(x)$ 的图像在 A 处的切线斜率小于在 B 处的切线斜率，根据导数的几何意义可知 $f'(x_A)<f'(x_B)$，故选 B.

[小结] 导数的几何意义就是切线的斜率，因此比较导数大小的问题可以用数形结合思想来解决.

拓展　解：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[2(x+\Delta x)^2-7]-(2x^2-7)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x)=4x$.

设切点为 (x_0,y_0)，则 $4x_0=4$，$\therefore x_0=1$，$\therefore y_0=-5$，

$\therefore$ 切点坐标为 $(1,-5)$，

故曲线在点 $(1,-5)$ 处的切线平行于直线 $4x-y-2=0$.

考点三

导入　(1)① $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$　② $x=x_0$

(2)① $f'(x_0)$　② $\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

例 3　解：(1)将 $x=2$ 代入曲线 C 的方程，得 $y=4$，$\therefore$ 切点 $P(2,4)$.

$y'|_{x=2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}(2+\Delta x)^3+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\times 2^3-\frac{4}{3}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[4+2\cdot\Delta x+\dfrac{1}{3}(\Delta x)^2\right]=4$，$\therefore k=y'|_{x=2}=4$，

$\therefore$ 曲线 C 在点 $P(2,4)$ 处的切线方程为 $y-4=4(x-2)$，即 $4x-y-4=0$.

(2)由 $\begin{cases}y=4x-4,\\y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{4}{3},\end{cases}$ 可得 $(x-2)^2(x+4)=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=-4$.

从而求得公共点为 $P(2,4)$ 或 $M(-4,-20)$，

即(1)中的切线与曲线 C 的公共点除了切点外，还有另外的一点.

变式　解：因为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2+1-(x^2+1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$，

$g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3+1-(x^3+1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2+3x\Delta x+$

$3x^2]=3x^2$，所以 $k_1=2x_0$，$k_2=3x_0^2$. 由 $k_1k_2=-1$，

即 $6x_0^3=-1$，解得 $x_0=-\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$.

[小结] 求曲线的切线方程时，首先要判断所给点是否在曲线上. 若求的是"在某点"的切线，则该点为切点；若求的是"过某点"的切线，则该点不一定是切点；若求的是"过曲线外一点"的切线，则该点一定不是切点.

拓展 解：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3+1-x^3-1}{\Delta x}=\frac{3x(\Delta x)^2+3x^2\Delta x+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x\Delta x+3x^2+(\Delta x)^2$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2$，因此 $y'=3x^2$.

设过点 $M(1,1)$ 的切线与曲线 $y=x^3+1$ 相切于点 $P(x_0,x_0^3+1)$，根据导数的几何意义，知曲线 $y=x^3+1$ 在点 P 处的切线的斜率 $k=3x_0^2$，

又切线过点 $M(1,1)$ 与点 P，所以 $k=\frac{x_0^3+1-1}{x_0-1}$，

所以 $3x_0^2=\frac{x_0^3}{x_0-1}$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=\frac{3}{2}$，所以 $k=0$ 或 $k=\frac{27}{4}$，因此过点 $M(1,1)$ 且与曲线 $y=x^3+1$ 相切的直线有两条，直线方程分别为 $y-1=\frac{27}{4}(x-1)$ 和 $y=1$，

即所求直线方程为 $27x-4y-23=0$ 或 $y-1=0$.

【当堂自测】

1. D [解析] 由导数的几何意义知 $f'(1)=2$.

2. B [解析] $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2ax$，设切点为 (x_0,y_0)，则 $2ax_0=1$，$\therefore x_0=\frac{1}{2a}$. $\because$ 切点在直线 $y=x$ 上，$\therefore y_0=\frac{1}{2a}$，得 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{4a}+1$，$\therefore a=\frac{1}{4}$.

3. $\frac{\pi}{4}$ [解析] 因为 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\frac{1}{3}(x+\Delta x)^3-2\right]-\left(\frac{1}{3}x^3-2\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2\right]=x^2$，所以曲线 $y=\frac{1}{3}x^3-2$ 在点 $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$ 处切线的斜率 $k=y'\big|_{x=1}=1$，所以切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

4. $\frac{3}{4}$ [解析] 联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{x},\\ y=x^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ 即交点坐标为 $(1,1)$. 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-\frac{1}{1}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{1+\Delta x}=-1$，所以曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=-(x-1)$，即 $y=-x+2$. 同理，曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2$，所以曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$. 故两条切线方程为 $y=-x+2$ 和 $y=2x-1$，与 x 轴的交点分别为 $(2,0)$ 和 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，两条切线的交点为 $(1,1)$，所以所求三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times 1\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

1.2 导数的计算

1.2.1 几个常用函数的导数

1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

【预习探究】

知识点一

1. 0 2. 1 3. $2x$ 4. $-\frac{1}{x^2}$ 5. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

知识点二

1. 0 2. $\alpha x^{\alpha-1}$ 3. $\cos x$ 4. $-\sin x$ 5. $a^x\ln a$ 6. e^x 7. $\frac{1}{x\ln a}$ 8. $\frac{1}{x}$

思考 (1)× (2)√ (3)× (4)× [解析] (1)因为 $y=\cos\frac{\pi}{6}$ 是常数函数，所以其导函数为 $y'=0$.

(3) $(2^x)'=2^x\ln 2$.

(4) $(\sqrt[3]{x^2})'=(x^{\frac{2}{3}})'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

讨论 解：(1) $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 为指数函数，其导数 $f'(x)=(a^x)'=a^x\cdot\ln a$；$f(x)=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{Q}^*)$ 为幂函数，其导数 $f'(x)=(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

(2)以 a 为底的指数函数或对数函数的导数，它们都有 $\ln a$ 这个部分，只是对数函数的导数中 $\ln a$ 在分母上；指数函数、对数函数的求导中，以 e 为底的是以 a 为底的特例.

知识点三

(1) $f'(x)\pm g'(x)$ (2) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $cf'(x)$

(3) $\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

思考 (1)× (2)× (3)× [解析] (1) $f'(x)=\cos x-x\sin x$.

(2) $f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$.

(3)因为常数的导数为 0，所以 $f(x)=x^2+c$（c 为常数）.

知识点四

$y=f(g(x))$ $y_x'=y_u'\cdot u_x'$

探究 解：$y=2x\cos x$ 是由 $u=2x$ 及 $v=\cos x$ 相乘得到的；而 $y=\ln(x+2)$ 是由 $u=x+2(x>-2)$ 与 $y=\ln u$ 经过"复合"得到的，即 y 可以通过中间变量 u 表示为自变量 x 的函数.

【考点类析】

考点一

例 1 (1)D (2)±2 (3)2 或 $-\frac{2}{3}$ [解析] (1)因为 $f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以 $f'(1)=\frac{1}{2}$.

(2) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，则 $f'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}=-\frac{1}{4}$，解得 $\alpha=\pm 2$.

(3)由导数公式知，$f'(x)=4x$，$g'(x)=3x^2$. 因为 $f'(x)+4=g'(x)$，所以 $4x+4=3x^2$，即 $3x^2-4x-4=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-\frac{2}{3}$.

变式 (1)D (2)B [解析] (1)① $y'=(\ln 2)'=0$，故①错误；② $y'=-\frac{2}{x^3}$，则 $y'|_{x=3}=-\frac{2}{27}$，故②正确；③ $y'=(2^x)'=2^x\ln 2$，故③正确；④ $y'=(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$，故④正确. 综上，结论中正确的有②③④.

(2) $\because f(x)=e^x-2$，$\therefore f'(x)=e^x$，故 $f'(0)=e^0=1$.

考点二

导入 (1)可导 (2) $f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\cdots\pm f_n'(x)$

(3) $af'(x)+bg'(x)$

例 2 解：(1) $y'=6x+\cos x+x(\cos x)'=6x+\cos x-x\sin x$.

(2) $y'=(x^2+3)'(e^x+\ln x)+(x^2+3)(e^x+\ln x)'$

$=2x(e^x+\ln x)+(x^2+3)\left(e^x+\frac{1}{x}\right)$

$=e^x(x^2+2x+3)+2x\ln x+x+\frac{3}{x}$.

变式 解：(1) $y'=\left(\frac{\ln x}{x+1}\right)'=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{x-x\ln x+1}{x(x+1)^2}$.

(2) $y=\left(\sin^2\frac{x}{4}+\cos^2\frac{x}{4}\right)^2-2\sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}=1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos x$，

所以 $y'=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos x\right)'=-\frac{1}{4}\sin x$.

[小结] 一般情况下，应用导数的运算法则和基本初等函数的导数公式求导数时，要尽量少用积、商的求导法则，在求导之前，可先对函数进行化简，再求导，这样可减少运算量，提高运算速度，避免出错.

考点三

导入 (1)导数值 (2)切线 曲线

例 3 (1) $3x-y+1=0$ (2) $y=ex$ [解析] (1) $y'=e^x+xe^x+2$，则曲线在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率 $k=e^0+0+2=3$，所以所求切线方程为 $y-1=3x$，即 $3x-y+1=0$.

(2)设切点为 (x_0,y_0)，因为 $y'=e^x$，所以切线的斜率是 e^{x_0}，则切线方程是 $y-y_0=e^{x_0}(x-x_0)$. 由该切线过原点，得 $y_0=e^{x_0}x_0$，又切点在曲线上，所以 $y_0=e^{x_0}$，故 $x_0=1$，$y_0=e$，所以所求切线方程为 $y=ex$.

变式 (1) B (2) A [解析] (1) $y'=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$，故 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 曲线在点 $M\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 处的切线的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(2) $\because f'(x)=\frac{-\sin x\cdot(1+x)-\cos x}{(1+x)^2}$，$\therefore f'(0)=-1$，

$\therefore$ 切线方程为 $y-1=-(x-0)$，即 $x+y-1=0$.

[小结] 在求切线方程的过程中，一定要注意点的位置，一类是点在曲线上，另一类是点不在曲线上，注意区分，并根据不同情况，采取不同的思路解决问题.

拓展 解：(1) $f(x)=x^3+ax+b$ 的导数为 $f'(x)=3x^2+a$，

由题意可得 $f'(2)=12+a=13$，$f(2)=8+2a+b=-6$，

解得 $a=1$，$b=-16$.

(2) $\because$ 切线与直线 $y=-\frac{x}{4}+3$ 垂直，$\therefore$ 切线的斜率 $k=4$.

设切点的坐标为 (x_0,y_0)，则 $f'(x_0)=3x_0^2+1=4$，$\therefore x_0=\pm 1$.

由 $f(x)=x^3+x-16$，可得 $y_0=1+1-16=-14$ 或 $y_0=-1-1-16=-18$，

则切线方程为 $y=4(x-1)-14$ 或 $y=4(x+1)-18$，

即 $y=4x-18$ 或 $y=4x-14$.

考点四

导入 解：(1)正确分清复合关系，选定中间变量；

(2)分步计算对应变量的导数；

(3)把中间变量代回，将导函数写为关于自变量的函数.

整个过程简记为"分解——求导——回代"，熟练后，可以省略中间过程，若遇多重复合，可多次用中间变量求导.

例 4 解：(1)原函数可看作 $y=u^4$，$u=2x-1$ 的复合函数，则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=(u^4)'\cdot(2x-1)'=4u^3\cdot 2=8(2x-1)^3$.

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 可看作 $y=u^{-\frac{1}{2}}$，$u=1-2x$ 的复合函数，则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)=(1-2x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$.

(3)原函数可看作 $y=\sin u$，$u=-2x+\frac{\pi}{3}$ 的复合函数，

则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=-2\cos u=-2\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(4)原函数可看作 $y=10^u$，$u=2x+3$ 的复合函数，

则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=10^{2x+3}\times 2\times\ln 10=(\ln 100)10^{2x+3}$.

变式 解：(1) $y=\ln\frac{1}{2x+1}=-\ln(2x+1)$，则 $y'=-\frac{1}{2x+1}\cdot(2x+1)'=-\frac{2}{2x+1}$.

(2) $y=e^{-x}\cdot\sin 2x$，则 $y'=(e^{-x})'\sin 2x+e^{-x}\cdot(\sin 2x)'=-e^{-x}\sin 2x+2e^{-x}\cdot\cos 2x$.

[小结] 应用复合函数的导数公式求导时，应把握好以下环节：

(1)选取恰当的中间变量，使构成复合函数的基本函数，符合导数公式中的函数结构；

(2)从外到内，层层剥皮，依次求导；

(3)把中间变量转换成自变量的表达式.

拓展 解：设 $u=\sin x$，则 $y'=(e^u)'(\sin x)'=\cos x e^{\sin x}$，$\therefore y'|_{x=0}=1$，

则切线方程为 $y-1=x-0$，即 $x-y+1=0$.

由直线 l 与切线平行，可设直线 l 的方程为 $x-y+c=0$.

两平行线间的距离 $d=\frac{|c-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow c=3$ 或 $c=-1$，

故直线 l 的方程为 $x-y+3=0$ 或 $x-y-1=0$.

【当堂自测】

1. A [解析] $\because f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$\therefore f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. D [解析] $\because f'(x)=3ax^2+6x$，$\therefore f'(-1)=3a-6=4$，$\therefore a=\frac{10}{3}$.

3. A [解析] $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

4. B [解析] 由已知得 $3k+2=1$，$\therefore k=-\frac{1}{3}$，又 $g(x)=xf(x)$，$f'(3)=-\frac{1}{3}$，$\therefore g'(x)=f(x)+xf'(x)$，$\therefore g'(3)=f(3)+3f'(3)=1+3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0$.

5. 2 [解析] 由题意知 $y'|_{x=0}=ae^{ax}|_{x=0}=a=2$.

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 函数的单调性与导数

【预习探究】

知识点一

1. $f'(x)>0$ $f'(x)<0$ 2. 充分不必要 充分不必要

探究 A [解析] $f(x)=x^3$ 在 $(-1,1)$ 内是单调递增的，但 $f'(x)=3x^2\geqslant 0(-1<x<1)$，故 p 是 q 的充分不必要条件.

知识点二

(3) $f'(x)>0$ (4) $f'(x)<0$

思考 (1)√ (2)√ (3)× [解析] (1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$，在定义域内 $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ 恒成立，所以 $f(x)=x+\ln x$ 在定义域内是增函数.

(2)因为 $f'(x)=2$，$g'(x)=2x$，当 $x>2$ 时，$g'(x)>f'(x)$，所以说法正确.

(3) $f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $(0,+\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

【考点类析】

考点一

导入 解：在 $x=x_0$ 处，切线斜率为正，$f'(x_0)>0$，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近单调递增；在 $x=x_1$ 处，切线斜率为负，$f'(x_1)<0$，函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 附近单调递减.

例 1 (1)D (2)A [解析] (1)由题意可知，当 $x<0$，$x>2$ 时，导函数 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 是减函数，当 $x\in(0,2)$ 时，导函数 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 是增函数，故函数 $f(x)$ 的图像为选项 D 中的图. 故选 D.

(2)由原函数的单调性可以得到导函数的正负情况依次是正→负→正→负，故选 A.

变式 C [解析] 当 $0<x<1$ 时，$xf'(x)<0$，故 $f'(x)<0$，故 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为减函数，排除 A，B. 当 $x>1$ 时，$xf'(x)>0$，故 $f'(x)>0$，故 $y=f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数，排除 D. 故选 C.

[小结] (1)函数 $f(x)$ 的单调性与其导函数 $f'(x)$ 的图像之间有密切的关系：

①导函数 $f'(x)$ 的图像在 x 轴上方⇒函数 $f(x)$ 单调递增；

②导函数 $f'(x)$ 的图像在 x 轴下方⇒函数 $f(x)$ 单调递减.

(2)通过导函数 $f'(x)$ 的图像，不仅可以看出函数 $f(x)$ 的增减，还可以看出函数增减的快慢. 从导数的角度研究了函数的单调性及增减快慢后，我们就能根据导函数 $f'(x)$ 图像大致判断函数 $f(x)$ 的图像的变化趋势，反之也可行.

考点二

导入 增函数 减函数

例 2 解：(1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，

令 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>1$.

令 $f'(x)<0$，得 $-1<x<1$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$；

$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-1,1)$.

(2)由 $x>0$，得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=2-\frac{1}{x}$，令 $2-\frac{1}{x}>0$ 得 $x>\frac{1}{2}$，

令 $2-\frac{1}{x}<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\Big(0,$

$\left.\frac{1}{2}\right)$.

(3) $f'(x)=\frac{a(1-x^2)-ax(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{a(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$,

因为 $x\in(-1,1)$，所以 $(1-x^2)^2>0$，$x^2+1>0$，

所以 $\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}>0$.

所以当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$；当 $a<0$ 时，$f'(x)<0$.

所以当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,1)$；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$.

变式 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=(x^2)'\cdot e^{-x}+x^2\cdot(e^{-x})'=2xe^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(2x-x^2)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=2$，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 随 x 的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$，单调递增区间是 $(0,2)$.

[小结] 在对函数的定义域划分单调区间时，除了要找出使导数等于零的点外，还要注意在定义域内的不连续点和不可导点.

拓展 解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{a+1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+a+1}{x}$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a\leqslant -1$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $-1<a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，

解得 $x=\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}$，

则当 $x\in\left(0,\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}\right)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{-\frac{a+1}{2a}}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\sqrt{-\frac{a+1}{2a}},+\infty\right)$ 上单调递减.

考点三

导入 $f'(x)\geqslant 0$　$f'(x)\leqslant 0$

例3 解：(1) ∵ $f(x)=x^3+ax^2+b$，∴ $f'(x)=3x^2+2ax$.

由题意得 $\begin{cases}f(1)=-1,\\ f'(1)=-3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+a+b=-1,\\ 3+2a=-3,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a=-3,\\ b=1.\end{cases}$

(2)由(1)得，$f'(x)=3x^2-6x$.

令 $f'(x)=3x^2-6x<0$，解得 $0<x<2$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$.

∵ $f(x)$ 在区间 $\left(m,2m-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，∴ $\begin{cases}m\geqslant 0,\\ 2m-\frac{1}{2}\leqslant 2,\\ m<2m-\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<m\leqslant\frac{5}{4}$.

变式 解：$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3-a}{x^2}$.

要使 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是单调递增的，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立，即 $\frac{2x^3-a}{x^2}\geqslant 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.

在 $[2,+\infty)$ 上，因为 $x^2>0$，所以 $2x^3-a\geqslant 0$ 恒成立，

即 $a\leqslant 2x^3$ 恒成立.

所以 $a\leqslant(2x^3)_{\min}$.

因为在 $[2,+\infty)$ 上，$y=2x^3$ 是单调递增的，

所以 $(2x^3)_{\min}=16$，所以 $a\leqslant 16$.

所以 a 的取值范围是 $(-\infty,16]$.

[小结] 利用导数判断函数单调性的一般步骤：

(1)确定函数的定义域.

(2)求导函数 $f'(x)$.

(3)若求单调区间，只需解不等式 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$；若已知函数 $f(x)$ 的单调性求参数，则由单调性可得 $f'(x)\geqslant 0$ 或 $f'(x)\leqslant 0$，再利用函数与方程思想求解.

拓展 解：(1) $f'(x)=2x+\frac{2a}{x}=\frac{2x^2+2a}{x}$,

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

①当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；

②当 $a<0$ 时，$f'(x)=\frac{2(x+\sqrt{-a})(x-\sqrt{-a})}{x}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下：

x	$(0,\sqrt{-a})$	$\sqrt{-a}$	$(\sqrt{-a},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减		单调递增

由表格可知，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\sqrt{-a})$；单调递增区间是 $(\sqrt{-a},+\infty)$.

(2)由 $g(x)=\frac{2}{x}+x^2+2a\ln x$，得 $g'(x)=-\frac{2}{x^2}+2x+\frac{2a}{x}$.

由已知得 $g'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

即 $-\frac{2}{x^2}+2x+\frac{2a}{x}\leqslant 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立.

即 $a\leqslant\frac{1}{x}-x^2$ 在 $[1,2]$ 上恒成立.

令 $h(x)=\frac{1}{x}-x^2$，$x\in[1,2]$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}-2x=-\left(\frac{1}{x^2}+2x\right)<0$,

∴ $h(x)$ 在 $[1,2]$ 上为减函数，∴ $h(x)_{\min}=h(2)=-\frac{7}{2}$,

∴ $a\leqslant-\frac{7}{2}$，故 a 的取值范围为 $a\leqslant-\frac{7}{2}$.

【当堂自测】

1. A [解析] ∵当 $x\in(0,6)$ 时，$f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，∴函数在 $(0,6)$ 上单调递增.
2. C [解析] 由图可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，∴不等式 $f'(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，故选 C.
3. $-\frac{3}{2}$　-6 [解析] $f'(x)=3x^2+2bx+c$. ∵ $f(x)$ 的单调递减区间是 $[-1,2]$，∴ -1 和 2 是方程 $f'(x)=0$ 的两个根，∴ $-1+2=-\frac{2b}{3}$，$-1\times 2=\frac{c}{3}$，即 $b=-\frac{3}{2}$，$c=-6$.
4. $(-\infty,+\infty)$ [解析] 因为 $y'=2+\cos x>0$ 对任何实数 x 都成立，所以函数的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$.
5. $(-\infty,-1]$ [解析] ∵ $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为减函数，∴ $f'(x)\leqslant 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立. ∵ $f'(x)=-x+\frac{b}{x+2}$，∴ $-x+\frac{b}{x+2}\leqslant 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，即 $b\leqslant x(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立. 设 $g(x)=x(x+2)=(x+1)^2-1$，则 $g(x)_{\min}=-1$，∴ $b\leqslant-1$.

1.3.2　函数的极值与导数

【预习探究】

知识点一

1. 小　0　$f'(x)<0$　$f'(x)>0$　点 a　$f(a)$
2. 大　$f'(x)>0$　$f'(x)<0$　点 b　$f(b)$

思考 (1)×　(2)×　(3)√　(4)×　(5)√

知识点二

(1) $f'(x)$　(3)左正右负　左负右正　左右符号相同

探究 1 [解析] 由题图可知，在区间 (a,x_1)，$(x_2,0)$，$(0,x_3)$ 内 $f'(x)>0$；在区间 (x_1,x_2)，(x_3,b) 内 $f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 (a,x_1) 内单调递增，在 (x_1,x_2) 内单调递减，在 (x_2,x_3) 内单调递增，在 (x_3,b) 内单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有 1 个极小值点，极小值点为 $x=x_2$.

【考点类析】

考点一

导入 (1)极大值　(2)极小值

例1 解：函数 $f(x)=\frac{3}{x}+3\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x}=\frac{3(x-1)}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

因此，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值 $f(1)=3$.

变式 解：$y'=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

令 $y'=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$.

当 x 变化时，y，y' 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	极小值 -3	↗	极大值 -1	↘

因此，当 $x=-1$ 时，函数有极小值，且极小值为 -3；

当 $x=1$ 时，函数有极大值，且极大值为 -1.

[小结] 求函数极值的步骤：

(1)求导数，令 $f'(x)=0$，求方程的根；

(2)列表，并判断极大值点和极小值点；

(3)求极值.

拓展 D [解析] 由题图可知，当 $x<-2$ 时，$1-x>0$，所以 $f'(x)>0$，当 $-2<x<1$ 时，$1-x>0$，所以 $f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极大值；当 $1<x<2$ 时，$1-x<0$，所以 $f'(x)<0$，当 $x>2$ 时，$1-x<0$，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值. 故选 D.

考点二

导入 解：若 x_0 是极值点，则 $f'(x_0)=0$；反之，若 $f'(x_0)=0$，则 x_0 不一定是极值点.

例2 解：$f'(x)=5ax^4-3bx^2=x^2(5ax^2-3b)$.

由题意，$f'(x)=0$ 应有根 $x=\pm 1$，故 $5a=3b$,

于是 $f'(x)=5ax^2(x^2-1)$.

(1)当 $a>0$ 时，x 变化时，$f(x)$，$f'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	无极值	↘	极小值	↗

由表可知 $\begin{cases}4=f(-1)=-a+b+c,\\ 0=f(1)=a-b+c.\end{cases}$

又 $5a=3b$，解得 $a=3$，$b=5$，$c=2$.

(2)当 $a<0$ 时，同理可得 $a=-3$，$b=-5$，$c=2$.

变式 解：(1) ∵ $f(x)=a\ln x+bx^2+x$,

∴ $f'(x)=\frac{a}{x}+2bx+1$，∴ $f'(1)=f'(2)=0$,

∴ $a+2b+1=0$ 且 $\frac{a}{2}+4b+1=0$，解得 $a=-\frac{2}{3}$，$b=-\frac{1}{6}$.

(2)由(1)可知 $f(x)=-\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{6}x^2+x$，且定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-1}-\frac{1}{3}x+1=-\frac{(x-1)(x-2)}{3x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，$x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

[小结] 已知函数极值，确定函数解析式中的参数时，注意以下两点：

(1)根据极值点的导数为 0 和极值这两个条件列方程组，利用待定系数法求解；

(2)因为导数值为 0 不是此点为极值点的充要条件，所以利用待定系数法求解后必须验证充分性.

拓展 $3<a<\frac{11}{3}$ [解析] $f'(x)=x^2-ax+2$，x_1，x_2 是 $f'(x)=0$ 的两个根，由 $0<x_1<1<x_2<3$，结合二次函数的性质得 $\begin{cases}f'(0)=2>0,\\ f'(1)=1-a+2<0,\\ f'(3)=9-3a+2>0,\end{cases}$ 解得 $3<a<\frac{11}{3}$.

考点三

导入 解：对于方程 $f(x)=m$，研究其解的个数时，常先利用导数求出函数 $f(x)$ 的单调性、极值，再画出函数 $f(x)$ 的图像，将方程的解的个数问题转化为函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=m$ 的交点个数问题，数形结合求解.

例3 解：由题知，$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)_{极小值}=f(2)=-12$，$f(x)_{极大值}=f(-2)=20$.

又因为 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，画出函数图像(图略)，所以当 $m>20$ 或 $m<-12$ 时，方程 $f(x)=m$ 有一个解；当 $m=20$ 或 $m=-12$ 时，方程 $f(x)=m$ 有两个解；当 $-12<m<20$ 时，方程 $f(x)=m$ 有三个解.

变式 解：(1)因为 $f'(x)=3ax^2-b$,

所以 $\begin{cases}f'(2)=12a-b=0,\\ f(2)=8a-2b+4=-\frac{4}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=4,\end{cases}$

所以函数的解析式为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$，所以 $f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 时取得极大值 $\frac{28}{3}$，在 $x=2$ 时取得极小值 $-\frac{4}{3}$.

因为方程 $f(x)=k$ 有 3 个不等的实数解，所以 $-\frac{4}{3}<k<\frac{28}{3}$.

[小结] 函数的极值是对函数在某一点附近的小区间而言的，是一个局部概念，在函数的整个定义域内可能有多个极值，也可能无极值，且极小值未必小于极大值.

拓展 解：(1) $f'(x)=\frac{2}{x+a}-2x-1$，当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得极值，

所以 $f'(0)=0$，解得 $a=2$，检验知 $a=2$ 符合题意.

(2)令 $g(x)=f(x)+b=2\ln(x+2)-x^2-x+b$,

则 $g'(x)=\frac{2}{x+2}-2x-1=-\frac{2x\left(x+\frac{5}{2}\right)}{x+2}$ $(x>-2)$.

当 x 变化时，$g(x)$，$g'(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	$2\ln 2+b$	↘

由上表可知，函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，极大值为 $2\ln 2+b$.

要使 $f(x)+b=0$ 在区间 $[-1,1]$ 上恰有两个不同的实数根，

只需 $\begin{cases}g(-1)\leqslant 0,\\ g(0)>0,\\ g(1)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b\leqslant 0,\\ 2\ln 2+b>0,\\ 2\ln 3-2+b\leqslant 0,\end{cases}$

所以 $-2\ln 2<b\leqslant 2-2\ln 3$，

故实数 b 的取值范围是 $(-2\ln 2,2-2\ln 3]$.

【当堂自测】

1. D [解析] 因为 $f(x)=x^3-12x$，所以 $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$. 所以当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $-2<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 所以当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有极小值，即函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=2$. 故选 D.
2. D [解析] $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$. 当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，无极大值点.
3. C [解析] 由导函数 $f'(x)$ 的图像易知，$f(x)$ 有两个极大值点，两个极小值点.
4. 6 [解析] $f'(x)=3x^2-4cx+c^2$，则 $f'(2)=c^2-8c+12=0$，解得 $c=2$ 或 $c=6$. 易知当 $c=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，不满足题意；当 $c=6$ 时，$f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值，满足题意. 故 $c=6$.
5. $-2<a<2$ [解析] $f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=$

-1. ∵ $f(1)=-2$，$f(-1)=2$，结合图像可知 $-2<a<2$.

1.3.3 函数的最大（小）值与导数

【预习探究】

知识点一

1. 一条连续不断的曲线 2. $\geqslant$ $\leqslant$

思考 (1)√ (2)√ (3)× [解析](1)如 $f(x)=|x|$ 的最值不能通过求导数法求得.

(2)三次函数的定义域和值域都是 $\mathbf{R}$，没有最值.

(3)若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调函数，则没有最值.

讨论 解：函数的最大值，最小值是比较整个定义区间的函数值得出的，函数的极值是比较极值点附近的函数值得出的；函数的极值可以有多个，但最值只能有一个；极值只能在区间内取得，最值则可以在端点处取得；极值有可能成为最值，最值只要不在端点处取得必定是极值.

知识点二

(1)极值 (2) $f(a)$，$f(b)$

探究 D [解析] $f'(x)=2x-4$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=2$. 因为 $f(1)=-2$，$f(2)=-3$，$f(5)=6$，所以最大值是 $f(5)$，最小值是 $f(2)$.

【考点类析】

考点一

导入 解：最大值唯一，最大值点不唯一.

例1 解：(1) $f'(x)=3ax^2+2bx-2$，由题意知 $\begin{cases}f(-2)=6,\\ f'(-2)=0,\\ f'(1)=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}-8a+4b+c=2,\\ 12a-4b-2=0,\\ 3a+2b-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=\frac{1}{2},\\ c=\frac{8}{3}.\end{cases}$

(2)由(1)得，$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{8}{3}$，$f'(x)=x^2+x-2$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=-2$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,3)$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{25}{6}$	↗	6	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$\frac{61}{6}$

由上表知，当 $x=3$ 时，$f(x)_{\max}=\frac{61}{6}$，当 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=\frac{3}{2}$.

变式 解：(1) $f'(x)=6x^2-12=6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{2}$.

当 x 变化时，$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$[-2,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},3]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为 $f(-2)=8$，$f(3)=18$，$f(\sqrt{2})=-8\sqrt{2}$，$f(-\sqrt{2})=8\sqrt{2}$，

所以当 $x=\sqrt{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-8\sqrt{2}$；当 $x=3$ 时，$f(x)$ 取得最大值 18.

(2) $f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$，$x\in[0,2\pi]$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{2}{3}\pi$ 或 $x=\frac{4}{3}\pi$.

因为 $f(0)=0$，$f(2\pi)=\pi$，$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f(0)=0$，

当 $x=2\pi$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f(2\pi)=\pi$.

[小结]求函数的最值时，不可想当然地认为极值点就是最值点，要将极大（小）值点与端点处的函数值进行比较.

拓展 (1)0 (2) $\frac{1}{\mathrm{e}}$ [解析](1) $y'=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$，∵ $y'\geqslant 0$ 在 $[1,3]$ 上恒成立，∴函数在 $[1,3]$ 上单调递增，故当 $x=1$ 时，函数取得最小值 0.

(2) $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，因为 $f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$f(0)=0$，$f(4)=\frac{4}{\mathrm{e}^4}$，所以 $f(x)$ 的最小值 $a=f(0)=0$，最大值 $b=f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $a+b=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

考点二

导入 解：(1)证明不等式：可以通过构造函数将不等式问题等价转化为函数最值问题，如要证明不等式 $f(x)>g(x)$ 成立，可以构造函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，由 $h'(x)$ 判断 $h(x)$ 的单调性，确定 $h(x)$ 的最小值，从而证明结论.

(2)含参数不等式的恒成立问题：分离变量，通过构造函数将问题等价转化为求函数的最值问题，然后利用导数求函数最值.

例2 解：(1) $f'(x)=-x^2+x+2a=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+2a$，

当 $x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)$ 的最大值为 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}+2a$，

令 $\frac{2}{9}+2a>0$，得 $a>-\frac{1}{9}$，所以，当 $a>-\frac{1}{9}$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上存在单调递增区间.

(2)令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

因为 $0<a<2$，所以 $x_1<1<x_2<4$，所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(x_2)$.

又 $f(4)-f(1)=-\frac{27}{2}+6a<0$，所以 $f(4)<f(1)$，

所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $f(4)=8a-\frac{40}{3}=-\frac{16}{3}$，得 $a=1$，所以 $x_2=2$，

从而 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(2)=\frac{10}{3}$.

变式 解：(1)∵ $f(x)=t(x+t)^2-t^3+t-1$ $(x\in\mathbf{R},t>0)$，

∴当 $x=-t$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(-t)=-t^3+t-1$，

即 $h(t)=-t^3+t-1$.

(2)令 $g(t)=h(t)-(-2t+m)=-t^3+3t-1-m$，

由 $g'(t)=-3t^2+3=0$ 得 $t=1$ 或 $t=-1$（不合题意，舍去）.

当 t 变化时，$g'(t)$，$g(t)$ 的变化情况如下表：

t	$(0,1)$	1	$(1,2)$
$g'(t)$	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	$1-m$	↘

∴对 $t\in(0,2)$，$g(t)_{\max}=1-m$.

$h(t)<-2t+m$ 对 $t\in(0,2)$ 恒成立，也就是 $g(t)<0$ 对 $t\in(0,2)$ 恒成立，只需 $g(t)_{\max}=1-m<0$，∴ $m>1$，

故实数 m 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

[小结](1)含参数的恒成立问题的本质是函数的最值问题，适当借助图像可使解题思路更为清晰.

(2)“$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续”是“$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有最大值与最小值”的充分不必要条件.

(3)在区间 $[a,b]$ 上连续的函数一定有最值，在区间 (a,b) 内可导的函数不一定有最值，若有唯一的极值，则此极值必是函数的最值.

拓展 解：(1) $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$.

当 $x\in[0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2,3]$ 时，$f'(x)>0$.

故当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(1)=5+8c$.

又 $f(3)=9+8c>f(1)$，∴当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(3)=9+8c$.

∵对任意 $x\in[0,3]$，$f(x)<c^2$ 恒成立，∴ $9+8c<c^2$，即 $c<-1$ 或 $c>9$，

∴ c 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$.

(2)由(1)知 $f(x)<f(3)=9+8c$，∴ $9+8c\leqslant c^2$，即 $c\leqslant -1$ 或 $c\geqslant 9$，

∴ c 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$.

【当堂自测】

1. D [解析]由函数的最值与极值的概念可知，$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值一定大于极小值.

2. A [解析]因为最大值等于最小值，所以函数 $f(x)$ 是常数函数，所以 $f'(x)=0$.

3. C [解析]令 $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos x=0$，得 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $x=\frac{\pi}{4}$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x)>0$，即函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-1$. 故选 C.

4. C [解析] $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，当 $x\in[0,1]$ 时 $f'(x)\leqslant 0$，即 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上是减函数，所以最小值为 $f(1)=-2$.

5. -71 [解析] $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$. 由 $f'(x)=0$，得 $x=3$ 或 $x=-1$. ∵ $f(-4)=k-76$，$f(3)=k-27$，$f(-1)=k+5$，$f(4)=k-20$，∴ $f(x)_{\max}=k+5=10$，得 $k=5$，∴ $f(x)_{\min}=k-76=-71$.

1.4 生活中的优化问题举例

【预习探究】

知识点一

优化

知识点二

(1)函数模型 (2) $f'(x)=0$

探究 C [解析]令 $y'=x^2-39x-40=0$，解得 $x=40$ 或 $x=-1$（舍去），当 $x=40$ 时，y 取得最小值，所以速度应为 40.

【考点类析】

考点一

例1 解：(1)依题意，铁路 AM 上的运费为 $2(80-x)$，

公路 MC 上的运费为 $4\sqrt{100+x^2}$，则由 A 地到 C 地的总运费 $y=2(80-x)+4\sqrt{100+x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 80)$.

(2) $y'=-2+\frac{4x}{\sqrt{100+x^2}}$ $(0\leqslant x\leqslant 80)$.

令 $y'=0$，解得 $x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 或 $x=-\frac{10\sqrt{3}}{3}$（舍去）.

当 $0\leqslant x<\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 时，$y'\leqslant 0$；当 $\frac{10\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant 80$ 时，$y'\geqslant 0$.

故当 $x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 时，y 取得最小值，

即当在距离点 B 为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 千米的点 M 处修筑公路至 C 时总运费最少.

[小结]解有关函数的最大值、最小值的实际问题，可通过分析问题中各个变量之间的关系，列出符合题意的函数关系式，并确定函数的定义域，注意所求的结果一定要符合问题的实际意义.

拓展 解：设每小时的燃料费为 y_1 元，比例系数为 $k(k>0)$，

则 $y_1=kv^2$，当 $v=12$ 时，$y_1=720$，所以 $720=k\cdot 12^2$，得 $k=5$.

设全程燃料费为 y 元，由题意，得 $y=y_1\cdot\frac{200}{v-8}=\frac{1000v^2}{v-8}$，

所以 $y'=\frac{2000v(v-8)-1000v^2}{(v-8)^2}=\frac{1000v^2-16\,000v}{(v-8)^2}$.

令 $y'=0$，得 $v=16$.

①若 $v_0\geqslant 16$，

则当 $v=16$ km/h 时，$y_{\min}=32\,000$，即当船的实际速度为 8 km/h 时，全程燃料费最省，为 32 000 元；

②若 $v_0<16$，则当 $v\in(8,v_0]$ 时，$y'<0$，

即 $y=\frac{1000v^2}{v-8}$ 在 $(8,v_0]$ 上为减函数，

所以当 $v=v_0$ 时，$y_{\min}=\frac{1000v_0^2}{v_0-8}$，即当船的实际速度为 (v_0-8) km/h 时，全程燃料费最省，为 $\frac{1000v_0^2}{v_0-8}$ 元.

综上，当 $v_0\geqslant 16$ 时，为使全程燃料费最省，船的实际速度为 8 km/h；

当 $v_0<16$ 时，为使全程燃料费最省，船的实际速度为 (v_0-8) km/h.

例2 解：(1)由题意得 $x^2+4xy=108a$，

即 $y=\frac{108a-x^2}{4x}$，$0<x\leqslant a$.

(2)铁皮容器的体积 $V=x^2y=x^2\cdot\frac{108a-x^2}{4x}=\frac{1}{4}(-x^3+108ax)$，$0<x\leqslant a$. $V'(x)=\frac{1}{4}(-3x^2+108a)$，

令 $V'(x)=0$，得 $x=6\sqrt{a}$.

当 $0<a\leqslant 36$，即 $6\sqrt{a}\geqslant a$ 时，在 $(0,a)$ 上，$V'(x)>0$，$V(x)$ 单调递增，

可得 $V(x)_{\max}=V(a)=\frac{1}{4}a^2(108-a)$；

当 $36<a<108$，即 $6\sqrt{a}<a$ 时，在 $(0,6\sqrt{a})$ 上，$V'(x)>0$，$V(x)$ 单调递增，

在 $(6\sqrt{a},a)$ 上，$V'(x)<0$，$V(x)$ 单调递减，

可得 $V(x)_{\max}=V(6\sqrt{a})=108a\sqrt{a}$.

综上可得，$V(x)_{\max}=\begin{cases}\frac{1}{4}a^2(108-a), & 0<a\leqslant 36,\\ 108a\sqrt{a}, & 36<a<108.\end{cases}$

故当 $0<a\leqslant 36$ 时，该铁皮容器体积 V 的最大值为 $\frac{1}{4}a^2(108-a)$；

当 $36<a<108$ 时，该铁皮容器体积 V 的最大值为 $108a\sqrt{a}$.

变式 32 米和 16 米 [解析]要求材料最省就是要求新砌的墙壁总长度最短，设堆料场的宽为 x 米，则长为 $\frac{512}{x}$ 米，新墙壁的总长度为 L 米，因此 $L=2x+\frac{512}{x}(x>0)$，则 $L'=2-\frac{512}{x^2}$. 令 $L'=0$，得 $x=\pm 16$. ∵ $x>0$，∴ $x=16$，故当 $x=16$ 时，$L_{\min}=64$，此时堆料场的长为 $\frac{512}{16}=32$（米）.

[小结]对于实际生活中的优化问题，一般先建立目标函数，通过配凑变形转化为求目标函数的最值问题，但配凑过程是一个难点，运用导数知识求目标函数的最值非常简单，因此导数的引入开辟了求最值问题的新途径.

考点三

例3 解：(1)分公司一年的利润 L（万元）与每件产品的售价 x（元）的函数关系式为 $L(x)=(x-3-a)(12-x)^2$，$x\in[9,11]$.

(2) $L'(x)=(12-x)^2-2(x-3-a)(12-x)=(12-x)(18+2a-3x)$，令 $L'(x)=0$，得 $x=6+\frac{2}{3}a$ 或 $x=12$（舍去）.

∵ $3\leqslant a\leqslant 5$，∴ $8\leqslant 6+\frac{2}{3}a\leqslant\frac{28}{3}$. 在 $x=6+\frac{2}{3}a$ 两侧 $L'(x)$ 的值由正变负，

∴当 $8\leqslant 6+\frac{2}{3}a<9$，即 $3\leqslant a<\frac{9}{2}$ 时，$L(x)_{\max}=L(9)=(9-3-a)(12-9)^2=9(6-a)$；

当 $9\leqslant 6+\frac{2}{3}a\leqslant\frac{28}{3}$，即 $\frac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5$ 时，$L(x)_{\max}=L\left(6+\frac{2}{3}a\right)=\left(6+\frac{2}{3}a-3-a\right)\left[12-\left(6+\frac{2}{3}a\right)\right]^2=4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3$.

故 $Q(a)=\begin{cases}9(6-a), & 3\leqslant a<\frac{9}{2},\\ 4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3, & \frac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5.\end{cases}$

综上，若 $3\leqslant a<\frac{9}{2}$，则当每件产品的售价为 9 元时，分公司一年的利润最大，最大利润为 $9(6-a)$ 万元；

若 $\frac{9}{2}\leqslant a\leqslant 5$，则当每件产品的售价为 $\left(6+\frac{2}{3}a\right)$ 元时，分公司一年的利润最大，最大利润为 $4\left(3-\frac{1}{3}a\right)^3$ 万元.

[小结]在求实际问题的最大值或最小值时，一般先找出函数关系式，并确定其定义域，再利用求函数最值的方法求解，注意结果应与实际情况相符合. 如果函数在区间内只有一个极值点，那么根据实际意义该极值点就是最值点.

【当堂自测】

1. A [解析]设底面边长为 x m，高为 h m，则有 $x^2h=256$，所以 $h=\frac{256}{x^2}$，所用材料的面积设为 S m²，则有 $S=4xh+x^2=4x\cdot$

$\frac{256}{x^2}+x^2=x^2+\frac{4\times256}{x}$，$S'=2x-\frac{4\times256}{x^2}$，令 $S'=0$，解得 $x=8$，所以当 $x=8$ 时，所用材料最省，此时 $h=\frac{256}{8^2}=4$. 故选 A.

2. B ［解析］设银行的收益为 y，由题意得存款额是 kx^2，银行支付的利息是 kx^3，获得的贷款利息是 $0.0486kx^2$，其中 $x\in(0,0.0486)$，所以 $y=0.0486kx^2-kx^3(0<x<0.0486)$，则 $y'=0.0972kx-3kx^2(0<x<0.0486)$. 令 $y'=0$，得 $x=0.0324$ 或 $x=0$(舍去). 当 $0<x<0.0324$ 时，$y'>0$；当 $0.0324<x<0.0486$ 时，$y'<0$. 故当 $x=0.0324$ 时，y 取得最大值，即当存款利率为 0.0324 时，银行获得最大收益.

3. A ［解析］设圆柱的高为 h，则圆柱的底面半径为 $\sqrt{R^2-h^2}$，所以圆柱的体积 $V=\pi(R^2-h^2)h=-\pi h^3+\pi R^2h(0<h<R)$. 令 $V'(h)=-3\pi h^2+\pi R^2=0$，得 $h=\frac{\sqrt3}{3}R$，易知当 $h=\frac{\sqrt3}{3}R$ 时，V 有最大值 $\frac{2\sqrt3}{9}\pi R^3$.

4. 5 ［解析］年平均利润 $f(x)=\frac{y}{x}=-x-\frac{25}{x}+12$，则 $f'(x)=-1+\frac{25}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=5$，所以当 $x=5$ 时，每辆客车营运的年平均利润最大.

1.5 定积分的概念

1.5.1 曲边梯形的面积

1.5.2 汽车行驶的路程

1.5.3 定积分的概念

【预习探究】

知识点一

1. $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$　被积函数　积分变量　积分区间　下限　上限

2. $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$

思考 (1)√ (2)× (3)√ (4)× ［解析］(1)曲边梯形的一边是曲线段，另三边是直线段.

(2)分割的区间表示汽车行驶的时间.

(3)各个小曲边梯形的面积之和等于原曲边梯形的面积.

(4)当 n 很大时，$f(x)=x^2$ 在区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 上的值可用该区间上任何一点的函数值近似代替.

知识点二

$\geqslant$　$x=a,x=b,y=0$　$y=f(x)$

思考 (1)√ (2)√

知识点三

(1)$b-a$　(2)$k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(3)$\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$

(4)$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$(其中 $a<c<b$)

思考 (1)√ (2)× (3)√ ［解析］(1)定积分的值仅与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关，与积分变量用什么字母表示无关.

(2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值可以是正数、负数和零.

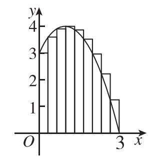
(3)根据定积分的性质知，等式成立.

【考点类析】

考点一

导入 分割，近似代替，求和，取极限是求曲边梯形面积的四个步骤.

例1 解：(1)分割：如图所示，将区间 $[0,3]$ 等分成 n 个小区间，则每个小区间 $\left[\frac{3(i-1)}{n},\frac{3i}{n}\right](i=1,2,3,\cdots,n)$ 的长度为 $\Delta x=\frac{3}{n}$. 分别过各分点作 x 轴的垂线，把原曲边梯形分成 n 个小曲边梯形.



(2)近似代替：以每个小区间的左端点的函数值为高作 n 个小矩形，则当 n 很大时，用 n 个小矩形的面积之和 S_n 近似代替原曲边梯形的面积 S.

(3)求和：$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f\left[\frac{3(i-1)}{n}\right]\Delta x$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[-\frac{9(i-1)^2}{n^2}+2\times\frac{3(i-1)}{n}+3\right]\times\frac{3}{n}$

$=-\frac{27}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]+\frac{18}{n^2}[1+2+\cdots+(n-1)]+9$

$=-\frac{27}{n^3}\times\frac16(n-1)n(2n-1)+\frac{18}{n^2}\times\frac{n(n-1)}{2}+9$

$=-9\left(1-\frac1n\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)+9\left(1-\frac1n\right)+9.$

(4)取极限：$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[-9\left(1-\frac1n\right)\left(1-\frac1{2n}\right)+9\left(1-\frac1n\right)+9\right]$

$=-9\times(1-0)\times(1-0)+9\times(1-0)+9=9.$

故所求曲线梯形的面积 $S=9$.

变式 解：(1)分割：把区间 $[0,1]$ 等分成 n 个小区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right](i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac1n$，曲边梯形被分成 n 个小曲边梯形，其面积分别记为 $\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(2)近似代替：用小矩形的面积近似代替小曲边梯形的面积，取 $\Delta S_i\approx f\left(\frac{i-1}{n}\right)\cdot\Delta x=\left[1+\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right]\cdot\frac1n(i=1,2,\cdots,n)$.

(3)求和：$\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\frac1n\left[1+\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right]$.

(4)取极限：$S=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac1n\left[1+\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right]=1+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac1n\left(\frac{i-1}{n}\right)^2=1+\frac13=\frac43$. 故所求曲边梯形的面积为 $\frac43$.

［小结］(1)求曲边梯形面积的基本步骤是：分割、近似代替、求和、取极限.

(2)在"近似代替"中，在每一个小区间 $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$ 上通常取一个端点的值代入计算，这样做是为了计算简便.

(3)当 $f(\xi_i)$ 为负值时，取 $|f(\xi_i)|$ 为一边构造小矩形.

(4)两个常用的求和公式：$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$1+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

考点二

导入 解：(1)$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac13$，$\int_0^1(-t^2+2)\mathrm{d}t=\frac53$，$\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$.

(2)定积分的值由被积函数和积分上、下限所确定.

例2 解：(1)分割：令 $f(x)=1+x$，则 $f(x)=1+x$ 在区间 $[1,2]$ 上连续，将区间 $[1,2]$ 等分成 n 个小区间 $\left[1+\frac{i-1}{n},1+\frac{i}{n}\right](i=1,2,\cdots,n)$，则每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac1n$.

(2)近似代替：在区间 $\left[1+\frac{i-1}{n},1+\frac{i}{n}\right]$ 上取 $\xi_i=1+\frac{i-1}{n}(i=1,2,3,\cdots,n)$，

$f(\xi_i)=1+1+\frac{i-1}{n}=2+\frac{i-1}{n}$，则 $\Delta S_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta x=\left(2+\frac{i-1}{n}\right)\cdot\frac1n$.

(3)求和：$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2+\frac{i-1}{n}\right)\frac1n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac2n+\frac{i-1}{n^2}\right)=\frac2n\cdot n+\frac{1}{n^2}[0+1+2+\cdots+(n-1)]=2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=2+\frac{n-1}{2n}$.

(4)取极限：$\int_1^2(1+x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{n-1}{2n}\right)=2+\frac12=\frac52$.

变式 D ［解析］由求定积分的四个步骤：分割，近似代替，求和，取极限，可知选项 D 正确.

［小结］用定义法求积分的步骤：(1)分割：将积分区间 $[a,b]$ n 等分；(2)近似代替：取点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，可取 $\xi_i=x_{i-1}$ 或者 $\xi_i=x_i$；(3)求和：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$；(4)求极限：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$.

拓展 C ［解析］由 $y=\sin x,x\in[0,\pi]$ 和 $y=\cos x,x\in[0,\pi]$ 的图像知，$\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x>0$. 故选 C.

考点三

导入 解：图中阴影部分的面积 $S=\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$.

例3 解：(1)$\int_0^2\sqrt{4-(x-2)^2}\mathrm{d}x$ 表示圆心为点 $(2,0)$，半径等于 2 的圆的面积的 $\frac14$，即 $\int_0^2\sqrt{4-(x-2)^2}\mathrm{d}x=\frac14\times\pi\times2^2=\pi$. $\int_0^2 x\mathrm{d}x$ 表示直角边都为 2 的等腰直角三角形的面积，即 $\int_0^2 x\mathrm{d}x=\frac12\times2^2=2$. ∴ 原式 $=\int_0^2\sqrt{4-(x-2)^2}\mathrm{d}x-\int_0^2 x\mathrm{d}x=\pi-2$.

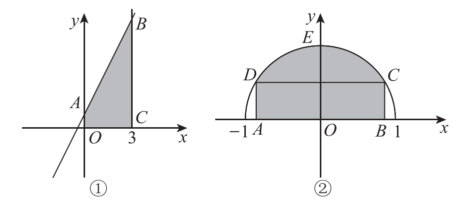
(2)$\int_{-1}^3(3x+1)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=-1$，$x=3$，$y=0$ 以及 $y=3x+1$ 所围成的图形在 x 轴上方的面积减去在 x 轴下方的面积，

即 $\int_{-1}^3(3x+1)\mathrm{d}x=\frac12\times\left(3+\frac13\right)\times(3\times3+1)-\frac12\times\left(-\frac13+1\right)\times2=\frac{50}{3}-\frac23=16$.

(3)在平面直角坐标系上，$y=\sqrt{9-x^2}$ 表示的图形为以原点为圆心，以 3 为半径的圆的上半部分，其面积 $S=\frac12\times\pi\times3^2=\frac92\pi$.

由定积分的几何意义知 $\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\frac92\pi$.

变式 解：(1)$\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $y=2x+1$，$x=0$，$x=3$ 与 x 轴围成的直角梯形 $OABC$ 的面积，如图①所示，其面积 $S=\frac12\times(1+7)\times3=12$. 根据定积分的几何意义知 $\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}x=12$.



(2)由定积分的几何意义知，$\int_{-\frac{\sqrt3}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的弓形 CED 的面积与矩形 $ABCD$ 的面积之和，如图②所示.

∵ $S_{弓形}=\frac12\times\frac23\pi\times1^2-\frac12\times1\times1\times\sin\frac23\pi=\frac\pi3-\frac{\sqrt3}{4}$，$S_{矩形}=2\times\frac{\sqrt3}{2}\times\frac12=\frac{\sqrt3}{2}$，

∴ $\int_{-\frac{\sqrt3}{2}}^{\frac{\sqrt3}{2}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac\pi3-\frac{\sqrt3}{4}+\frac{\sqrt3}{2}=\frac\pi3+\frac{\sqrt3}{4}$.

［小结］利用定积分的几何意义求定积分必须准确理解其几何意义，同时要合理利用函数的奇偶性、对称性来解决问题.

拓展 解：解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=8,\\y=\frac12x^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$

∴阴影部分的面积为 $\int_{-2}^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac12x^2\right)\mathrm{d}x$.

∵圆的面积为 8π，∴由几何概型可得阴影部分的面积是 $8\pi\left(\frac14+\frac{1}{6\pi}\right)=2\pi+\frac43$.

由定积分的几何意义得，

$\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac12x^2\right)\mathrm{d}x=\frac12\int_{-2}^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac12x^2\right)\mathrm{d}x=\pi+\frac23$.

【当堂自测】

1. B ［解析］区间 $[1,3]$ 的长度为 2，故 n 等分后每个小区间的长度均为 $\frac2n$.

2. D ［解析］将原曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，取点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，则第 i 个小曲边梯形的面积可近似地表示为 $\frac{b-a}{n}\cdot f(\xi_i)$，所以原曲边梯形的面积 $S=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot f(\xi_i)$.

3. C ［解析］由定积分的几何意义可知，C 正确.

4. 1.02 ［解析］将区间 5 等分所得的小区间为 $\left[1,\frac65\right]$，$\left[\frac65,\frac75\right]$，$\left[\frac75,\frac85\right]$，$\left[\frac85,\frac95\right]$，$\left[\frac95,2\right]$，于是所求平面图形的面积近似等于 $\frac1{10}\times\left(1+\frac{36}{25}+\frac{49}{25}+\frac{64}{25}+\frac{81}{25}\right)=\frac1{10}\times\frac{255}{25}=1.02$.

5. π ［解析］由于 $\int_{-1}^1\sqrt{4-4x^2}\mathrm{d}x=2\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示单位圆的面积 π，所以 $\int_{-1}^1\sqrt{4-4x^2}\mathrm{d}x=\pi$.

1.6 微积分基本定理

【预习探究】

知识点

$F'(x)=f(x)$　$F(b)-F(a)$

探究 (1)$S_上$ (2)$-S_下$ (3)$S_上-S_下$ 0

思考 (1)√ (2)√ (3)√ ［解析］(1)根据微积分基本定理的概念知，该说法正确.

(2)事实上，被积函数的原函数有无数多个，取原函数的常数项为 0，给计算带来方便.

(3)根据微积分基本定理的概念知，该说法正确.

【考点类析】

考点一

导入 (1)正数 (2)负数 (3)零

例1 解：(1)$\int_1^e\left(x+\frac1x+\frac1{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_1^e x\mathrm{d}x+\int_1^e\frac1x\mathrm{d}x+\int_1^e\frac1{x^2}\mathrm{d}x=\frac12x^2\Big|_1^e+\ln x\Big|_1^e-\frac1x\Big|_1^e=\frac12(e^2-1)+(\ln e-\ln1)-\left(\frac1e-\frac11\right)=\frac12e^2-\frac1e+\frac32$.

(2)$\int_0^{\frac\pi2}(\sin x-2\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac\pi2}\sin x\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac\pi2}\cos x\mathrm{d}x=(-\cos x)\Big|_0^{\frac\pi2}-2\sin x\Big|_0^{\frac\pi2}=-\cos\frac\pi2-(-\cos0)-2\left(\sin\frac\pi2-\sin0\right)=-1$.

(3)$\int_0^\pi(2\sin x-3e^x+2)\mathrm{d}x=2\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x-3\int_0^\pi e^x\mathrm{d}x+\int_0^\pi2\mathrm{d}x=2(-\cos x)\Big|_0^\pi-3e^x\Big|_0^\pi+2x\Big|_0^\pi=2[(-\cos\pi)-(-\cos0)]-3(e^\pi-e^0)+2(\pi-0)=7-3e^\pi+2\pi$.

(4)∵ $0\leqslant x\leqslant2$，∴ $|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1,1<x\leqslant2,\\1-x^2,0\leqslant x\leqslant1,\end{cases}$

∴ $\int_0^2|x^2-1|\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\left(x-\frac13x^3\right)\Big|_0^1+\left(\frac13x^3-x\right)\Big|_1^2=2$.

变式 解：(1)$\int_{-\pi}^0(\cos x-e^x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^0\cos x\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^0 e^x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_{-\pi}^0-e^x\Big|_{-\pi}^0=\frac1{e^\pi}-1$.

(2) $\int_1^3(1+x+x^2)\mathrm{d}x=\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^3=\left(3+\frac{1}{2}\times3^2+\frac{1}{3}\times3^3\right)-\left(1+\frac{1}{2}\times1^2+\frac{1}{3}\times1^3\right)=\frac{44}{3}$.

(3) $\int_1^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 6x\mathrm{d}x=\int_1^3\left(x+\frac{1}{x}+2\right)6x\mathrm{d}x=\int_1^3(6x^2+6+12x)\mathrm{d}x=(2x^3+6x+6x^2)\Big|_1^3=(54+18+54)-(2+6+6)=112$.

[**小结**] (1)利用微积分基本定理求定积分,关键是求使 $F'(x)=f(x)$的 $F(x)$,其求法是反方向运用求导公式.

(2)当被积函数是积的形式时,应先化成和差的形式,再利用定积分的性质化简,最后再用微积分基本定理求定积分的值.

(3)对于多项式函数的原函数,应注意 $x^n(n\neq-1)$的原函数为 $\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$,它应用很广泛.

拓展 **解:**(1) $\int_0^2(4-2x)(4-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^2(16-8x-4x^2+2x^3)\mathrm{d}x=\left(16x-4x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2=32-16-\frac{32}{3}+8=\frac{40}{3}$.

(2) $\int_1^2\frac{x^2+2x-3}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x+2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2+2x-3\ln x\right)\Big|_1^2=\frac{7}{2}-3\ln 2$.

考点二

导入 **解:**若 $F_1'(x)=F_2'(x)$,则 $F_1(x)=F_2(x)+c$,易知这些不同的$F(x)$对定积分的值没有影响.

例 2 **解:**$F(x)=\int_0^x(t^2-4t)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{3}t^3-2t^2\right)\Big|_0^x=\frac{1}{3}x^3-2x^2(-1\leqslant x\leqslant5)$,

$F'(x)=x^2-4x$.由 $F'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=4$.

x,$F'(x)$,$F(x)$的变化情况如下表所示:

x	$(-1,0)$	0	$(0,4)$	4	$(4,5)$
$F'(x)$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因此,函数 $F(x)$的极大值为 $F(0)=0$,极小值为 $F(4)=-\frac{32}{3}$.

又 $F(-1)=-\frac{7}{3}$,$F(5)=-\frac{25}{3}$,故函数 $F(x)$的最大值为 0,最小值为$-\frac{32}{3}$.

变式 **解:**$\int_0^1(1-2x+2t)\mathrm{d}t=[(1-2x)t+t^2]\Big|_0^1=2-2x$,即 $f(x)=2-2x$.因为 $x\in[1,2]$,所以 $f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$,即$-2\leqslant f(x)\leqslant0$,所以函数 $f(x)$的值域是$[-2,0]$.

[**小结**] 处理含有参数的定积分问题的注意点:

(1)含有参数的定积分可以与方程、函数或不等式综合起来考查,使用微积分基本定理计算定积分是解决此类问题的前提;

(2)计算含有参数的定积分,必须分清积分变量与被积函数 $f(x)$、积分上限与积分下限、积分区间与函数 $F(x)$等概念.

【当堂自测】

1. D [**解析**] ∵$(x+\sin x)'=1+\cos x$,∴$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)\mathrm{d}x=(x+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\left[-\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pi+2$.

2. D [**解析**] $\int_1^a\left(2x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_1^a 2x\mathrm{d}x+\int_1^a\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x^2\Big|_1^a+\ln x\Big|_1^a=a^2-1+\ln a=3+\ln 2$,解得 $a=2$.

3. B [**解析**] $\int_\pi^{2\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_\pi^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=(-\cos x)\Big|_\pi^{2\pi}-\sin x\Big|_\pi^{2\pi}=-2$.

4. D [**解析**] 根据当 $f(x)$是奇函数时,$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$,当 $f(x)$是偶函数时,$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$,可知选项 D 符合条件.

5. **解:**∵$\int_0^1(6x^2+4ax+a^2)\mathrm{d}x=(2x^3+2ax^2+a^2x)\Big|_0^1=2+2a+a^2$,∴$f(a)=a^2+2a+2=(a+1)^2+1$,

∴当 $a=-1$ 时,$f(a)$有最小值 1.

1.7 定积分的简单应用

1.7.1 定积分在几何中的应用

1.7.2 定积分在物理中的应用

【预习探究】

知识点一

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 2. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

3. $\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

思考 (1)× (2)√ (3)√ [**解析**] (1)作出曲线 $y=\sqrt{x}$与直线 $y=x$(图略)可知,所求面积为 $\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x$.

(2)作出曲线 $y=2-x^2$ 与直线 $y=-2$(图略)可知,所求面积为 $\int_{-2}^2(4-x^2)\mathrm{d}x$.

(3)作出曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=2-x$,$y=0$(图略)可知,所求面积为 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x$.

知识点二

思考 (1)√ (2)√ (3)√ [**解析**] (1)由定积分的物理意义知该说法正确.

(2)由定积分的物理意义知该说法正确.

(3)易知所做的功为 $\int_{10}^{15}4x\mathrm{d}x=2x^2\Big|_{10}^{15}=250(\mathrm{J})$.

【考点类析】

考点一

导入 **解:**(1)点 O,C,D 的坐标分别为$(0,0)$,$(1,1)$,$(-2,4)$.

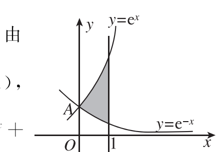
(2)所求图形的面积 $S=S_{梯形ABCD}-(S_{曲边三角形AOD}+S_{曲边三角形BOC})$.

(3)所求图形的面积 $S=\int_{-2}^1(-x+2)\mathrm{d}x-\int_{-2}^1 x^2\mathrm{d}x$.

(4)所求图形的面积 $S=\int_{-2}^1(-x+2)\mathrm{d}x-\int_{-2}^1 x^2\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^1=\frac{9}{2}$.

例 1 **解:**由题意知,所求图形的面积 $S=\int_0^2 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^2=\frac{1}{4}\times2^4-\frac{1}{4}\times0^4=4$.

变式 $\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2$ [**解析**] 如图,由 $\begin{cases}y=\mathrm{e}^x,\\y=\mathrm{e}^{-x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ 所以交点 $A(0,1)$,所以所求面积 $S=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2$.

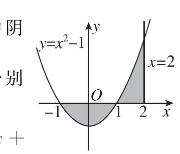


[**小结**] 由曲线所围成的平面图形的面积一般分为两类:

第一类,不分割型图形面积的求解,步骤是:(1)准确求出曲线的交点的横坐标;(2)在坐标系中画出由曲线所围成的平面区域;(3)根据图形写出能表示平面区域面积的定积分;(4)计算定积分得到所求面积.

第二类,分割型图形面积的求解,步骤是:(1)正确画出图形,这是解决此类题目的关键一步;(2)根据平面图形的上、下边界把平面图形进行分割,然后把每一部分的面积用定积分表示;(3)计算定积分之和得到所求面积.

拓展 **解:**如图所示,所求图形的面积为图中阴影部分的面积.



由 $x^2-1=0$,得抛物线与 x 轴的交点坐标分别是$(-1,0)$和$(1,0)$,

因此所求图形的面积 $S=\int_{-1}^1|x^2-1|\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1(1-x^2)\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-1)\mathrm{d}x=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\times2^3-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{8}{3}$.

考点二

导入 (1)① $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ ② $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$

例 2 **解:**(1)在 $t=4$ s 时,该点的位移为 $\int_0^4(t^2-4t+3)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right)\Big|_0^4=\frac{4}{3}$,即在 $t=4$ s 时,该点与出发点间的距离为$\frac{4}{3}$ m.

(2)因为 $v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)$,所以在区间$[0,1]$及$[3,4]$上,$v(t)\geqslant0$,在区间$[1,3]$上,$v(t)\leqslant0$,所以走过的路程 $s=\int_0^1(t^2-4t+3)\mathrm{d}t+\left|\int_1^3(t^2-4t+3)\mathrm{d}t\right|+\int_3^4(t^2-4t+3)\mathrm{d}t=\int_0^1(t^2-4t+3)\mathrm{d}t-\int_1^3(t^2-4t+3)\mathrm{d}t+\int_3^4(t^2-4t+3)\mathrm{d}t=4(\mathrm{m})$,即前 4 s 走过的路程为 4 m.

变式 A [**解析**] 设拉伸弹簧所用的力为 F N,弹簧伸长的长度为x m,则 $F=kx$.由题易知 $20=0.03k$,得 $k=\frac{2000}{3}$,所以 $F=\frac{2000}{3}x$.由变力做功公式,得 $W=\int_0^{0.13}\frac{2000}{3}x\mathrm{d}x=\frac{1000x^2}{3}\Big|_0^{0.13}=\frac{169}{30}(\mathrm{J})$,故把弹簧从平衡位置拉长 13 cm 时所做的功为$\frac{169}{30}$ J.

[**小结**] 解答此类题型的关键是熟练掌握功的计算公式,通过这个公式将物理问题转化为数学问题.

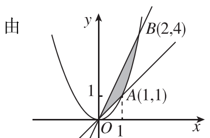
【当堂自测】

1. B [**解析**] $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0-\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}=1-0+1+1=3$.

2. C [**解析**] $h=\int_1^2 gt\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2\Big|_1^2=\frac{3}{2}g$.

3. $\frac{4}{3}$ [**解析**] 抛物线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴的交点坐标为$(0,0)$,$(2,0)$,所以抛物线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴所围成的图形的面积$S=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}$.

4. **解:**如图所示,由 $\begin{cases}y=x^2,\\y=x\end{cases}$ 得 $A(1,1)$,由 $\begin{cases}y=x^2,\\y=2x\end{cases}$ 得 $B(2,4)$.



故所求面积

$S=\int_0^1(2x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x$

$=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{7}{6}$.

本章总结提升

【单元回眸】

知识辨析

1. √ 2. √ 3. × 4. × 5. × 6. ×

【整合创新】

题型一

例 1 (1)D (2)1 [**解析**] (1)因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $a-1=0$,即 $a=1$,所以 $f(x)=x^3+x$,所以 $f'(x)=3x^2+1$.因为 $f'(0)=1$,所以曲线 $y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为 $y=x$.故选 D.

(2)∵$f'(x)=a-\frac{1}{x}$,∴$f'(1)=a-1$,又 $f(1)=a$,∴函数$f(x)=ax-\ln x$的图像在点$(1,f(1))$处的切线 l 的方程为 $y-a=(a-1)(x-1)$,整理得$y=(a-1)x+1$,∴切线 l 在 y 轴上的截距为 1.

变式 (1)$y=-2x-1$ (2)$1-\ln 2$ [**解析**] (1)设 $x>0$,则$-x<0$.∵$x<0$ 时,$f(x)=\ln(-x)+3x$,∴$f(-x)=\ln x-3x$,又∵$f(-x)=f(x)$,∴当 $x>0$ 时,$f(x)=\ln x-3x$,∴$f'(x)=\frac{1}{x}-3$,即 $f'(1)=-2$,∴曲线 $y=f(x)$在点$(1,-3)$处的切线方程为 $y+3=-2(x-1)$,整理得 $y=-2x-1$.

(2)曲线 $y=\ln x+2$ 的切线为 $y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1+1$(其中 x_1 为切点横坐标),曲线 $y=\ln(x+1)$的切线为 $y=\frac{1}{x_2+1}\cdot x+\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$(其中 x_2 为切点横坐标).

由题可知$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1},\\\ln x_1+1=\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1},\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\x_2=-\frac{1}{2},\end{cases}$

∴$b=\ln x_1+1=1-\ln 2$.

题型二

例 2 **解:**(1)$y'=(x^3\cdot\mathrm{e}^x)'=(x^3)'\cdot\mathrm{e}^x+x^3\cdot(\mathrm{e}^x)'=3x^2\cdot\mathrm{e}^x+x^3\cdot\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(x^3+3x^2)$.

(2)$y'=\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot x-\cos x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{-x\cdot\sin x-\cos x}{x^2}=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$.

(3)函数 $y=5\log_2(1-x)$可看作函数 $y=5\log_2 u$ 和 $u=1-x$ 的复合函数,所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(5\log_2 u)'\cdot(1-x)'=\frac{-5}{u\ln 2}=\frac{5}{(x-1)\ln 2}$.

(4)函数 $y=\sin^3 x$ 可看作函数 $y=u^3$ 和 $u=\sin x$ 的复合函数,函数 $y=\sin 3x$ 可看作函数 $y=\sin v$ 和 $v=3x$ 的复合函数.

所以 $y'_x=(u^3)'\cdot(\sin x)'+(\sin v)'\cdot(3x)'=3u^2\cdot\cos x+3\cos v=3\sin^2 x\cos x+3\cos 3x$.

题型三

例 3 (1)A (2)D (3)D [**解析**] (1)$f'(x)=[x^2+(a+2)x+a-1]\mathrm{e}^{x-1}$.因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)$的极值点,所以 $f'(-2)=0$,所以 $4-2(a+2)+a-1=0$,解得 $a=-1$,此时 $f'(x)=(x^2+x-2)\mathrm{e}^{x-1}$.由 $f'(x)=0$,解得 $x=-2$ 或$x=1$,且当$-2<x<1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,故 $x=1$ 为 $f(x)$的极小值点,所以 $f(x)$的极小值为 $f(1)=-1$.

(2)由题知函数 $f(x)=x^3-6bx+3b$ 的导函数 $f'(x)=3x^2-6b$ 在$(0,1)$内有零点,且 $f'(0)<0$,$f'(1)>0$,即$-6b<0$ 且 $3-6b>0$,∴$0<b<\frac{1}{2}$,故选 D.

(3)因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin x>0$,$\cos x>0$.由 $f(x)<f'(x)\tan x$,得 $f(x)\cos x<f'(x)\sin x$,即 $f'(x)\sin x-f(x)\cos x>0$.令 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $g'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}>0$,所以函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上为增函数,则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$,即$\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$,所以$\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{1}{2}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,即$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.故选 D.

变式 (1)D (2)$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ [**解析**] (1)由导函数 $y=f'(x)$的图像可知,$y=f'(x)$在 x 轴的负半轴上有一个零点(不妨设为 x_1),并且当 $x<x_1$ 时,$f'(x)<0$,$y=f'(x)$在 x 轴的正半轴上有两个零点(从左到右依次设为 x_2,x_3),且当 $x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)>0$,当 $x\in(x_2,x_3)$时,$f'(x)<0$,当$x>x_3$ 时,$f'(x)>0$.因此函数 $f(x)$在 $x=x_1$ 处取得极小值,在 $x=x_2$ 处取得极大值,在 $x=x_3$ 处取得极小值.由此对照四个选项中的图像,选项 A 中,在 $x=x_1$ 处取得极大值,不符合题意;选项 B 中,极大值点小于 0,也不符合题意;选项 C 中在 $x=x_1$ 处取得极大值,不符合题意;选项 D 符合题意.因此选 D.

(2)因为 $f(-x)=-x^3+2x+\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=-f(x)$,$f(0)=0$,所以

$f(x)$是奇函数，则$f(a-1)+f(2a^2)\leqslant 0$可化为$f(2a^2)\leqslant f(1-a)$.又$f'(x)=3x^2-2+e^x+e^{-x}\geqslant 3x^2-2+2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=3x^2\geqslant 0$，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，则$2a^2\leqslant 1-a$，即$-1\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$.

例4 解：(1)证明：当$a=1$时，$f(x)\geqslant 1$等价于$(x^2+1)e^{-x}-1\leqslant 0$.
设函数$g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则$g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.
当$x\neq 1$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，而$g(0)=0$，故当$x\geqslant 0$时，$g(x)\leqslant 0$，即$f(x)\geqslant 1$.
(2)设函数$h(x)=1-ax^2e^{-x}$.
$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点当且仅当$h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点.
(i)当$a\leqslant 0$时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点.
(ii)当$a>0$时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$.
当$x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$.
所以$h(x)$在$(0,2)$单调递减，在$(2,+\infty)$单调递增.
故$h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$是$h(x)$在$[0,+\infty)$的最小值.
①若$h(2)>0$，即$a<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0,+\infty)$没有零点；
②若$h(2)=0$，即$a=\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点；
③若$h(2)<0$，即$a>\frac{e^2}{4}$，由于$h(0)=1$，所以$h(x)$在$(0,2)$有一个零点.
由(1)知，当$x>0$时，$e^x>x^2$，所以
$h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$.
故$h(x)$在$(2,4a)$有一个零点，因此$h(x)$在$(0,+\infty)$有两个零点.
综上，$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$.

例5 解：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}$.
(i)若$a\leqslant 2$，则$f'(x)\leqslant 0$，当且仅当$a=2$，$x=1$时$f'(x)=0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.
(ii)若$a>2$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.
当$x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$；
当$x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$时，$f'(x)>0$.所以$f(x)$在$\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$单调递减，在$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$单调递增.
(2)证明：由(1)知，$f(x)$存在两个极值点当且仅当$a>2$.
由于$f(x)$的两个极值点x_1,x_2满足$x^2-ax+1=0$，所以$x_1x_2=1$，不妨设$x_1<x_2$，则$x_2>1$.
由于$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$，所以$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$等价于$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.
设函数$g(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，由(1)知，$g(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，又$g(1)=0$，从而当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$，
所以$\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.
变式 解：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.
①若$a\leqslant 0$，因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+a\ln 2<0$，所以不满足题意.
②若$a>0$，由$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$知，当$x\in(0,a)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$.所以$f(x)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增.故$x=a$是$f(x)$在$(0,+\infty)$上的唯一极小值点.
由于$f(1)=0$，所以当且仅当$a=1$时，$f(x)\geqslant 0$，
故$a=1$.
(2)由(1)知当$x\in(1,+\infty)$时，$x-1-\ln x>0$.
令$x=1+\frac{1}{2^n}$，得$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}$，从而$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$.故$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$.
而$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)>2$，所以$m$的最小值为3.

题型四

例6 解：(1)因为蓄水池侧面的建造成本为$100\cdot 2\pi rh=200\pi rh$(元)，底面的建造成本为$160\pi r^2$元，所以蓄水池的总建造成本为$(200\pi rh+160\pi r^2)$元，又$200\pi rh+160\pi r^2=12\,000\pi$，所以$h=\frac{1}{5r}(300-4r^2)$，从而$V(r)=\pi r^2h=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)$.因为$r>0$，又由$h>0$可得$r<5\sqrt{3}$，故函数$V(r)$的定义域为$(0,5\sqrt{3})$.
(2)因为$V(r)=\frac{\pi}{5}(300r-4r^3)$，所以$V'(r)=\frac{\pi}{5}(300-12r^2)$.令$V'(r)=0$，解得$r_1=5,r_2=-5$(舍去).当$r\in(0,5)$时，$V'(r)>0$，故$V(r)$在$(0,5)$上为增函数；当$r\in(5,5\sqrt{3})$时，$V'(r)<0$，故$V(r)$在$(5,5\sqrt{3})$上为减函数.由此可知，$V(r)$在$r=5$处取得最大值，此时$h=8$，即当$r=5$，$h=8$时，该蓄水池的体积最大.
变式 $4\sqrt{15}$ [解析]设$\triangle ABC$的边长为a cm，$0<a<5\sqrt{3}$，则三个等腰三角形的高为$\left(5-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$ cm，折起后所得正三棱锥的高为$\sqrt{\left(5-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}=\sqrt{25-\frac{5\sqrt{3}}{3}a}$(cm)，所以所得三棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times\sqrt{25-\frac{5\sqrt{3}}{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{25a^4-\frac{5\sqrt{3}}{3}a^5}$(cm³).令$u=25a^4-\frac{5\sqrt{3}}{3}a^5$，则$u'=100a^3-\frac{25\sqrt{3}}{3}a^4=25a^3\left(4-\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$，其中$0<a<5\sqrt{3}$.当$0<a<4\sqrt{3}$时，$u'>0$，当$4\sqrt{3}<a<5\sqrt{3}$时，$u'<0$，故$a=4\sqrt{3}$为$u=25a^4-\frac{5\sqrt{3}}{3}a^5$在定义域内唯一的极大值点，也是最大值点，所以当$a=4\sqrt{3}$时，三棱锥的体积最大，即为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\times\sqrt{25-\frac{5\sqrt{3}}{3}\times 4\sqrt{3}}=4\sqrt{3}\times\sqrt{5}=4\sqrt{15}$(cm³).

题型五

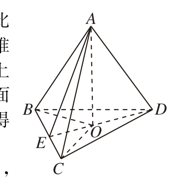
例7 (1)C (2)D [解析](1)$\int_0^1(2x+e^x)dx=(x^2+e^x)\Big|_0^1=(1^2+e^1)-(0^2+e^0)=e$.
(2)直线$y=4x$与曲线$y=x^3$在第一象限的交点坐标是$(2,8)$，所以两者围成的封闭图形的面积为$\int_0^2(4x-x^3)dx=\left(2x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^2=4$，故选D.
变式 2 [解析]由$\begin{cases}y=x^2,\\y=a\end{cases}$可得两个交点$A(-\sqrt{a},a)$，$B(\sqrt{a},a)$，由封闭图形的面积$S=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(a-x^2)dx=\left(ax-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=2\left(a\sqrt{a}-\frac{1}{3}a\sqrt{a}\right)=\frac{4a^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，解得$a=2$.

第二章 推理与证明

2.1 合情推理与演绎推理

2.1.1 合情推理

【预习探究】
知识点一
(1)思维过程 (2)合情推理 演绎推理 (3)条件 结论
思考 解：(1)推理的条件为“两个角为对顶角”，结论为“这两个角相等”.
(2)推理的条件为“$a/\!/b$，$b/\!/c$”，结论为“$a/\!/c$”.
知识点二
全部对象都具有这些特征 类似 某些已知特征 这些特征
部分 一般 特殊 特殊 个别情况 相同性质 一般性命题
相似性 一致性
思考 (1)√ (2)× (3)√ [解析](1)用样本估计总体，是由个别得到一般，所以这种估计属于归纳推理.
(2)类比推理的结论不一定正确，不能作为定理使用.
(3)由归纳推理的概念知该说法正确.
【考点类析】
考点一
导入 解：(1)数表推理，抓关系：对于数表推理，应充分观察数表的结构特征，提炼数表的变化本质，结合已有知识进行归纳推理.
(2)算式推理，看归纳：对于算式推理，应根据条件先写出几个特殊的式子，观察式子的特点，然后归纳出一般结论.
(3)图形推理，重观察：对于与图形有关的推理问题，仔细观察图形的结构特点是解题的关键.
例1 解：(1)因为$a_1=3$，且$S_n=6-2a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，
所以$S_1=6-2a_2=a_1=3$，所以$a_2=\frac{3}{2}$.
又$S_2=6-2a_3=a_1+a_2=3+\frac{3}{2}$，所以$a_3=\frac{3}{4}$.
又$S_3=6-2a_4=a_1+a_2+a_3=3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}$，所以$a_4=\frac{3}{8}$.
(2)由(1)知$a_1=3=\frac{3}{2^0}$，$a_2=\frac{3}{2}=\frac{3}{2^1}$，$a_3=\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}$，$a_4=\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}$，…，猜想$a_n=\frac{3}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.
变式 B [解析]观察题图可以看出有菱形纹的正六边形地面砖的个数依次组成一个以6为首项，以5为公差的等差数列，所以第六个图案中有菱形纹的正六边形地面砖的个数是$6+5\times(6-1)=31$.故选B.
[小结]归纳推理的实质是根据前几项归纳猜想一般规律，是由部分到整体、由特殊到一般的推理.由归纳推理所得的结论不一定正确，通常归纳的个体数目越多，越具有代表性，推广的一般性结论也会越可靠，它是发现一般性规律的重要方法.
拓展 $(-1)^{n+1}\frac{n^2+n}{2}$ [解析]注意到第n个等式的左边有n项，等式右边的绝对值等于$\frac{n^2+n}{2}$.当n为奇数时，等式右边的符号为正；当n为偶数时，等式右边的符号为负.因此所填结果是$(-1)^{n+1}\frac{n^2+n}{2}$.
考点二
导入 解：类比推理是由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理，类比推理的常见分类有以下两种：
(1)平行类比：平行类比是指同一高度层面的不同概念或知识之间的类比推理.
(2)纵向类比：纵向类比通常是由平面到空间、低维到高维的猜想和推理.
例2 解：将直角三角形的一条直角边长类比到有一侧棱AD与一侧面ABC垂直的四棱锥的侧面ABC的面积，将此直角边AB在斜边上的射影及斜边的长，分别类比到$\triangle ABC$在底面的射影$\triangle OBC$及底面$\triangle BCD$的面积，可得$S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}\cdot S_{\triangle DBC}$.



证明如下：如图，设直线OD与BC相交于点E，
∵$AD\perp$平面ABC，∴$AD\perp AE$，$AD\perp BC$，
又∵$AO\perp$平面BCD，∴$AO\perp DE$，$AO\perp BC$.
∵$AD\cap AO=A$，∴$BC\perp$平面AED，∴$BC\perp AE$，$BC\perp DE$，
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE$，$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot OE$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DE$.
在Rt$\triangle ADE$中，由射影定理知$AE^2=OE\cdot DE$，∴$S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle BOC}\cdot S_{\triangle BCD}$.
变式 解：若M，N是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上关于原点对称的两点，点$P$是双曲线上任意一点，当直线$PM$，$PN$的斜率都存在时，且分别记为$k_{PM}$，$k_{PN}$时，$k_{PM}$与$k_{PN}$之积是与点$P$位置无关的定值.证明如下：
设$M(m,n)$，则$N(-m,-n)$，其中$\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=1$.
设$P(x,y)$，由$k_{PM}=\frac{y-n}{x-m}$，$k_{PN}=\frac{y+n}{x+m}$，
得$k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{y-n}{x-m}\cdot\frac{y+n}{x+m}=\frac{y^2-n^2}{x^2-m^2}$，
将$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$，$n^2=\frac{b^2}{a^2}m^2-b^2$代入上式，
得$k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{b^2}{a^2}$(定值).
[小结]类比推理的一般步骤：
(1)找出两类对象之间可以确切表述的相似特征；
(2)用一类对象的已知特征去推测另一类对象的特征，从而得出一个猜想；
(3)检验猜想.
【当堂自测】
1. B [解析]根据合情推理可知，合情推理必须有前提有结论.
2. B [解析]设该图案共有n层，则$1+3+5+\cdots+(2n-1)=1024$，即$n^2=2^{10}$，所以$n=2^5=32$.
3. A [解析]假设乙在高一，则加入“汉服社”，与(2)矛盾，所以乙在高二，根据(3)，可得乙加入“书法社”，根据(1)甲同学没有加入“楹联社”，可得丙同学所在的社团是“楹联社”，故选A.
4. $b_4+b_8>b_5+b_7$ [解析]将乘积与和对应，再注意下标的对应，有$b_4+b_8>b_5+b_7$.

2.1.2 演绎推理

【预习探究】
知识点一
1. 一般到特殊 2. 已知的一般原理 所研究的特殊情况
思考 (1)× (2)√ (3)√
知识点二
思考 解：(1)推理形式错误.大前提中的M是“中国的大学”，它表示中国的各所大学，而小前提中M虽然也是“中国的大学”，但它表示中国的一所大学，二者是两个不同的概念，故推理形式错误.(2)大前提错误.因为所有边长都相等，内角也都相等的凸多边形才是正多边形.
【考点类析】
考点一
例1 解：(1)大前提：平行四边形的对角线互相平分.
小前提：菱形是平行四边形.
结论：菱形的对角线互相平分.
(2)大前提：等腰三角形的两底角相等.
小前提：$\angle A$，$\angle B$是等腰三角形的两个底角.
结论：$\angle A=\angle B$.
(3)大前提：数列$\{a_n\}$中，如果当$n\geqslant 2$时，a_n-a_{n-1}为同一个常数，那么$\{a_n\}$为等差数列.
小前提：对于通项公式为$a_n=2n+3$的数列$\{a_n\}$，当$n\geqslant 2$时，$a_n-a_{n-1}=2n+3-[2(n-1)+3]=2$，为常数.
结论：通项公式为$a_n=2n+3$的数列$\{a_n\}$为等差数列.
[小结]演绎推理是从一般到特殊的推理，其一般模式是三段论，应用三段论解决问题时，应当首先明确什么是大前提和小前提，如果前提是显然的，则可以省略.
考点二
导入 (1)正确的 (3)演绎推理
例2 证明：因为a,b,c都是正数，
所以只需证明$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$.
因为$a^4+b^4\geqslant 2a^2b^2$，$b^4+c^4\geqslant 2b^2c^2$，$c^4+a^4\geqslant 2c^2a^2$，
三式相加得$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$①.
又因为$a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2\sqrt{a^2b^4c^2}=2ab^2c$，$b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2abc^2$，$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$，
三式相加得$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$②.
由①②得$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$.
当且仅当$a=b=c$时等号成立，所以$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c$.
变式 C [解析]这是一个复合三段论，从“名不正”推出“民无所措手足”，连续运用了五次三段论，属于演绎推理.
[小结](1)数学问题的解决和证明都蕴含着演绎推理，即一连串

[小结] (1)根据复数的几何意义可知,复数的加减运算可以转化为点的坐标运算或向量的加减法运算;
(2)复数的加减运算用向量进行时,同样满足平行四边形法则和三角形法则;
(3)复数及其加减运算的几何意义为数形结合思想在复数中的应用提供了可能.对于一些较复杂的复数运算问题,特别是与模有关的问题,将复数与点及向量加以转化可有助于问题的解决.

拓展 **证明:**设复数 z_1,z_2 在复平面内对应的点分别为 Z_1,Z_2,O 为坐标原点,由条件知 $|z_1-z_2|=\sqrt{2}|z_1|=\sqrt{2}|z_2|$,所以以 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边的平行四边形为正方形,又 z_1+z_2 在复平面内对应的向量为正方形的一条对角线,所以 $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

【当堂自测】

1. B [解析] $z=1-(3-4i)=-2+4i$,故选 B.
2. D [解析] $z_1+z_2=2+i+3+ai=(2+3)+(1+a)i=5+(1+a)i$.因为 z_1+z_2 在复平面内所对应的点在实轴上,所以 $1+a=0$,所以 $a=-1$.
3. C [解析] $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA})=4-4i$.
4. $-1+10i$ [解析] $\because z_1=x+2i,z_2=3-yi$,
$\therefore z_1+z_2=x+3+(2-y)i=5-6i$,$\therefore \begin{cases}x+3=5,\\2-y=-6,\end{cases}$解得 $\begin{cases}x=2,\\y=8,\end{cases}$
$\therefore z_1=2+2i,z_2=3-8i$,$\therefore z_1-z_2=(2+2i)-(3-8i)=-1+10i$.
5. -1 [解析] $\because z_1-z_2=(a^2-a-2)+(a-4+a^2-2)i=(a^2-a-2)+(a^2+a-6)i(a\in \mathbf{R})$为纯虚数,$\therefore \begin{cases}a^2-a-2=0,\\a^2+a-6\neq 0,\end{cases}$解得 $a=-1$.

3.2.2 复数代数形式的乘除运算

【预习探究】

知识点一

1. $(ac-bd)+(ad+bc)i$
2. $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$ $z_1z_2+z_1z_3$

讨论 **解:**复数的乘法与多项式的乘法是类似的,有一点不同的是必须在所得结果中把 i^2 换成-1.

知识点二

1. 共轭复数 $a-bi$

思考 (1)√ (2)√

讨论 **解:**(1)在复平面内,两个共轭复数对应的点关于实轴对称.
(2)实数的共轭复数是它本身,即 $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in \mathbf{R}$,利用这个性质可证明一个复数为实数.
(3)若 $z\neq 0$ 且 $z+\overline{z}=0$,则 z 为纯虚数,利用这个性质,可证明一个复数为纯虚数.

知识点三

1. $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$ $\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

思考 **解:**实数的除法可以直接约分化简得出结果,但复数的除法中分母为复数,一般不能直接约分化简.由于两个共轭复数的积是一个实数,因此,两个复数相除时,可以先把它们的商写成分式的形式,然后把分子、分母同乘分母的共轭复数(注意是分母的共轭复数),再把结果化简即可.

【考点类析】

考点一

例 1 **解:**(1)原式$=(24+8i-6i+2)-(28+21i-4i+3)=(26+2i)-(31+17i)=-5-15i$.
(2)原式$=(11-2i)(-2+i)=-20+15i$.

例 2 **解:**(1)$(\sqrt{3}+4i)(\sqrt{3}-4i)=\sqrt{3}^2-(4i)^2=3-(-16)=19$.
(2)$(2+i)^2=2^2+4i+i^2=3+4i$.

[小结] 复数的乘法可以按多项式的乘法法则进行,注意选用恰当的乘法公式进行简便运算,例如平方差公式、完全平方公式等.

考点二

导入 **解:**复数的除法运算通常先写成分式的形式,再把分母"实数化"(方法是分母与分子同时乘分母的共轭复数,若分母是纯虚数,则只需同时乘 i).

例 3 **解:**(1)原式$=[(1+i)^2]^3\cdot\dfrac{1+i}{1-i}+[(1-i)^2]^3\cdot\dfrac{1-i}{1+i}-\dfrac{8(3-4i)(1+i)^3}{i(3-4i)}=(2i)^3\cdot i+(-2i)^3\cdot(-i)-16\cdot(1+i)=8+8-16-16i=-16i$.

(2)$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^{12}+\left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^8=\left[i\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^{12}+(1+i)^8\div\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8=\left[\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^4+[(1+i)^2]^4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\div\left[\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^3=1-(2i)^4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-8+8\sqrt{3}i=-7+8\sqrt{3}i$.

变式 **解:**(1)$\dfrac{7+i}{3+4i}=\dfrac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{25-25i}{25}=1-i$.
(2)原式$=\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{[(1+i)^2]^3}+\dfrac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^3}{(2i)^3}+\dfrac{-2+4i+i+2}{5}=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3}{-i}+i=\dfrac{1}{-i}+i=\dfrac{i}{(-i)i}+i=2i$.

[小结] 对于复数运算,除了应用四则运算法则之外,对于一些简单算式要知道其结果,这样方便计算,达到迅速简捷、少出错的效果.比如$(1\pm i)^2=\pm 2i$,$\dfrac{1}{i}=-i$,$\dfrac{1+i}{1-i}=i$,$\dfrac{1-i}{1+i}=-i$,$\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=1$,$\left(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-1$,以及 $i^n(n\in \mathbf{N}^*)$的周期性等等.

考点三

导入 (1)< 0 (3)$\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

例 4 **解:**设 $z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})$,则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=1$,即 $a^2+b^2=1$.①
因为$(3+4i)z=(3+4i)(a+bi)=(3a-4b)+(3b+4a)i$ 是纯虚数,
所以 $3a-4b=0$ 且 $3b+4a\neq 0$.②
由①②,
解得$\begin{cases}a=\dfrac{4}{5},\\b=\dfrac{3}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\dfrac{4}{5},\\b=-\dfrac{3}{5},\end{cases}$
所以$\overline{z}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$ 或$\overline{z}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

变式 **解:**设 $z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})$,
则 $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$,
$\therefore a^2+b^2+2i(a+bi)=8+6i$,
即 $a^2+b^2-2b+2ai=8+6i$,
$\therefore \begin{cases}a^2+b^2-2b=8,\\2a=6,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=3,\\b=1,\end{cases}$
$\therefore a+b=4$,
$\therefore$复数 z 的实部与虚部的和是 4.

拓展 **解:**(1)$\because (1+2i)\overline{z}=4+3i$,
$\therefore \overline{z}=\dfrac{4+3i}{1+2i}=\dfrac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{10-5i}{5}=2-i$,
$\therefore z=2+i$,$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{2+i}{2-i}=\dfrac{(2+i)^2}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{3+4i}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$.
(2)设 z_1 在复平面内对应的点的坐标为(x,y),由$|z_1-1|=|z|$可得$|x-1+yi|=\sqrt{5}$,即$(x-1)^2+y^2=5$,
$\therefore$复数 z_1 在复平面内对应的点的轨迹方程为$(x-1)^2+y^2=5$.

【当堂自测】

1. A [解析] $z=\dfrac{1}{i}=-i$.
2. C [解析] 由 $M\cap N=\{4\}$,得 $zi=4$,$\therefore z=\dfrac{4}{i}=-4i$.
3. A [解析] $\because (1-i)z=2i$,$\therefore (1+i)(1-i)z=(1+i)\cdot 2i$,化为 $2z=2(-1+i)$,$\therefore z=-1+i$,$\therefore |z|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$,故选 A.
4. i [解析] $i+i^3+i^5+\cdots+i^{33}=\dfrac{i(1-i^{34})}{1-i^2}=i$.
5. $3+4i$ [解析] 设 $z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})$,则 $\sqrt{a^2+b^2}-(a-bi)=\dfrac{10}{1-2i}$,$\therefore (\sqrt{a^2+b^2}-a)+bi=2+4i$,$\therefore \begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=2,\\b=4,\end{cases}$解得 $\begin{cases}a=3,\\b=4,\end{cases}$ $\therefore z=3+4i$.

本章总结提升

【单元回眸】

知识辨析

1. × 2. √ 3. × 4. × 5. √ 6. √

【整合创新】

题型一

例 1 -2 [解析] $\dfrac{a-i}{2+i}=\dfrac{(a-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{(2a-1)-(2+a)i}{5}$,
$\because \dfrac{a-i}{2+i}$为实数,$\therefore 2+a=0$,即$a=-2$.

变式 A [解析] 因为$\dfrac{1+ai}{2-i}=\dfrac{(1+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2-a+(2a+1)i}{5}$为纯虚数,所以 $2-a=0$ 且 $2a+1\neq 0$,所以 $a=2$.故选 A.

题型二

例 2 (1)0 (2)-1 [解析] (1)原式$=\dfrac{i(1+2\sqrt{3}i)}{1+2\sqrt{3}i}+\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right]^{1009}+\dfrac{(4-8i+8i-4)(4-8i+4-8i)}{\sqrt{11}-\sqrt{7}i}=i+(-i)^{1009}+0=0$.
(2)因为$\dfrac{(i-2)(i-1)}{(1+i)(i-1)+i}=\dfrac{(i-2)(i-1)}{i^2-1+i}=i-1$,$\dfrac{-3-2i}{2-3i}=\dfrac{(-3-2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{-13i}{13}=-i$,所以$\dfrac{(i-2)(i-1)}{(1+i)(i-1)+i}+\dfrac{-3-2i}{2-3i}=i-1+(-i)=-1$.

变式 (1)C (2)A (3)D [解析] (1)因为 $i(1+i)^2=-2$,$i^2(1-i)=-1+i$,$(1+i)^2=2i$,$i(1+i)=-1+i$,所以选 C.
(2)由 $zi=1+i$ 得 $z=\dfrac{1+i}{i}=\dfrac{(1+i)i}{i^2}=-(i-1)=1-i$,
$\therefore z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$,故选 A.
(3)$\dfrac{1+2i}{1-2i}=\dfrac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{1+4i-4}{1+4}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

例 3 (1)D (2)B [解析] (1)$\because \dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$,$\therefore$其共轭复数为$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$,对应的点位于第四象限.
(2)因为$(1-i)(a+i)=a+i-ai-i^2=a+1+(1-a)i$,所以其对应的点为$(a+1,1-a)$.因为复数对应的点在第二象限,所以$\begin{cases}1+a<0,\\1-a>0,\end{cases}$解得$a<-1$,故选 B.

变式 四 [解析] $\because z=1-i$,$\therefore z^2+\dfrac{2}{z}=(1-i)^2+\dfrac{2}{1-i}=-2i+\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-2i+1+i=1-i$,$\therefore$在复平面内 $z^2+\dfrac{2}{z}$对应的点的坐标为$(1,-1)$,该点位于第四象限.

例 4 $\sqrt{10}$ [解析] 因为 $z=(1+i)(1+2i)$,所以$|z|=|1+i|\cdot|1+2i|=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{10}$.

变式 (1)B (2)5 [解析] (1)由已知得 $z=\dfrac{2+i}{1-2i}=\dfrac{(2+i)(1+2i)}{5}=i$,$\therefore |z|+\dfrac{1}{z}=1-i$.
(2)由题意知 $z=\dfrac{1-7i}{1+i}=\dfrac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-6-8i}{2}=-3-4i$,所以$|z|=|-3-4i|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$.

练习册 LIAN XI CE

参考答案

第一章 导数及其应用

1.1 变化率与导数

1.1.1 变化率问题

1.1.2 导数的概念

1. B [解析] $\Delta y=(2+0.1)^2+1-(2^2+1)=0.41$.
2. B [解析] $\Delta y=h(2)-h(0)=-4.9\times 4+6.5\times 2+10-10=-6.6$,$\Delta t=2-0=2$,则$\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=-3.3$.
3. D [解析] 由导数的物理意义知,$s'(5)=42$ 表示物体在 $t=5$ s 时的瞬时速度.故选 D.
4. D [解析] $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+\Delta x+\dfrac{1}{1+\Delta x}-\left(1+\dfrac{1}{1}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{1+\Delta x}\right)=0$.
5. B [解析] $\Delta S=4\pi(R+\Delta R)^2-4\pi R^2=8\pi R\Delta R+4\pi(\Delta R)^2$.
6. C [解析] 因为 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a(1+\Delta x)+3-(a+3)}{\Delta x}=a$,所以 $f'(1)=a=3$.
7. A [解析] $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-\dfrac{1}{2}f'(x_0)=-6$.
8. 2.1 2.001 [解析] $\because \Delta y=(1+\Delta x)^2+1-(1^2+1)=2\Delta x+(\Delta x)^2$,$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x$,$\therefore$割线的斜率为 $2+\Delta x$.
当 $\Delta x=0.1$ 时,割线 PQ 的斜率 $k=2+0.1=2.1$.
当 $\Delta x=0.001$ 时,割线 PQ 的斜率 $k=2+0.001=2.001$.
9. 2 [解析] $\Delta s=(t_0+\Delta t)^2-4(t_0+\Delta t)+5-(t_0^2-4t_0+5)=2t_0\Delta t+(\Delta t)^2-4\Delta t$,因为 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=2t_0-4=0$,所以 $t_0=2$.
10. 16 [解析] 因为 $\Delta s=4(t+\Delta t)^2+1-(4t^2+1)=8t\cdot\Delta t+4(\Delta t)^2$,所以$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{8t\cdot\Delta t+4(\Delta t)^2}{\Delta t}=8t+4\Delta t$,故质点 M 在 $t=2$ s 时的瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(16+4\Delta t)=16$(cm/s).
11. 3 [解析] $v_{初}=s'\big|_{t=0}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3(0+\Delta t)-(0+\Delta t)^2-3\times 0+0^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(3-\Delta t)=3$.
12. **解:**(1)当 $t=20$ s,$\Delta t=0.1$ s 时,
$\Delta s=s(20+0.1)-s(20)=10\times(20+0.1)+5\times(20+0.1)^2-(10\times 20+5\times 20^2)=1+20+5\times 0.01=21.05$.
所以$\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\dfrac{21.05}{0.1}=210.5$.
(2)$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{10(t+\Delta t)+5(t+\Delta t)^2-10t-5t^2}{\Delta t}$
$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(\Delta t)^2+10\Delta t+10t\Delta t}{\Delta t}$
$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(5\Delta t+10+10t)=10+10t$,
所以当 $t=20$ s 时的瞬时速度为 $10+10\times 20=210$(m/s).
13. **解:**$\because \Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\sqrt{(1+\Delta x)^2+1}-\sqrt{2}=\sqrt{(\Delta x)^2+2\Delta x+2}-\sqrt{2}$,$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2+2\Delta x+2}-\sqrt{2}}{\Delta x}$,
$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2+2\Delta x+2}-\sqrt{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x[\sqrt{(\Delta x)^2+2\Delta x+2}+\sqrt{2}]}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x+2}{\sqrt{(\Delta x)^2+2\Delta x+2}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
14. $3\sqrt{2}$ [解析] $\because f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[13-8(x_0+\Delta x)+\sqrt{2}(x_0+\Delta x)^2]-(13-8x_0+\sqrt{2}x_0^2)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-8\Delta x+2\sqrt{2}x_0\Delta x+\sqrt{2}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-8+2\sqrt{2}x_0+\sqrt{2}\Delta x)=-8+2\sqrt{2}x_0=4$，∴$x_0=3\sqrt{2}$.

15. 解：设 $f(x)=x^2$，则由平均变化率的几何意义知，函数在区间 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 内的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)-f(0)}{-\frac{1}{2}-0}=\frac{\frac{1}{4}-0}{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$；

函数在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=\frac{\frac{1}{4}-0}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$；

函数在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 内的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$.

由上面所求结果可以看出，函数在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 内的平均变化率大于在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内的平均变化率，所以函数在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 内的图像比在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内的图像要陡一些. 函数在区间 $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ 内的平均变化率与在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 内的平均变化率的符号相反，绝对值相等，所以函数在这两个区间内的图像升降变化的快慢相同，但平均变化率为正时，图像从左向右上升，平均变化率为负时，图像从左向右下降.

1.1.3 导数的几何意义

1. C ［解析］$f'(x_0)$不存在只说明曲线在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率不存在，而当切线斜率不存在时，切线也可能存在，其方程为$x=x_0$.
2. C ［解析］曲线在点 A 处的切线斜率即为函数 $y=2x^2$ 在 $x=2$ 处的导数，易求得 $y'|_{x=2}=8$.
3. B ［解析］因为 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2-2$，所以 $y'|_{x=1}=1$，即切线的斜率为 1，所以切线的倾斜角为 45°.
4. B ［解析］由切线斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x\Delta x+3x^2+(\Delta x)^2]=3x^2=3$，得 $x=\pm1$，所以点 P 的坐标为(1,1)或(−1,−1).
5. A ［解析］由于 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3+a(x+\Delta x)+b-(x^3+ax+b)}{\Delta x}=3x^2+a$，所以 $y'|_{x=1}=3+a=k$. 将(1,3)代入 $y=kx+1$，得 $k=2$，所以 $a=-1$，又点(1,3)在曲线 $y=x^3+ax+b$ 上，故 $1+a+b=3$，可得 $b=3$.
6. A ［解析］因为函数 $f(x)$ 的图像在 $x=2$ 处的切线方程是 $y=-x+1$，所以 $f(2)=-1$，$f'(2)=-1$，故 $f(2)+f'(2)=-2$，故选 A.
7. B ［解析］∵$f'(x)$是二次函数，且 $f'(x)$ 的图像开口向上，顶点坐标为$(1,\sqrt{3})$，∴设 $f'(x)=a(x-1)^2+\sqrt{3}(a>0)$，则曲线 $y=f(x)$ 的切线斜率 $k=f'(x)=a(x-1)^2+\sqrt{3}\geqslant\sqrt{3}$，即 $\tan\alpha\geqslant\sqrt{3}$，解得 $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$.
8. −2 ［解析］由导数的概念和几何意义知，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)=k_{AB}=\frac{0-4}{2-0}=-2$.
9. −4 ［解析］∵$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1)-f(1-\Delta x)}{2\Delta x}=-2$，∴$\frac{1}{2}f'(1)=-2$，∴$f'(1)=-4$，故所求斜率是−4.
10. 2 ［解析］∵$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a(1+\Delta x)^2-a}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a\Delta x+2a)=2a=2$，∴$a=1$. 又 $3=a\times1^2+b$，∴$b=2$，∴$\frac{b}{a}=2$.
11. $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ ［解析］$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)+3-(x^2+2x+3)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(2x+2)\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+2)=2x+2$.
设 P 点横坐标为 x_0，则曲线 C 在 P 点处的切线斜率为 $2x_0+2$.
由已知得 $0\leqslant2x_0+2\leqslant1$，∴$-1\leqslant x_0\leqslant-\frac{1}{2}$，
∴点 P 横坐标的取值范围为 $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$.
12. 解：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.
设抛物线上点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线平行于直线 $4x-y+1=0$，
则 $y'|_{x=x_0}=2x_0=4$，解得 $x_0=2$，
所以 $y_0=x_0^2=4$，即 $P(2,4)$.
设抛物线上点 $Q(x_1,y_1)$ 处的切线垂直于直线 $4x-y+1=0$，
则 $y'|_{x=x_1}=2x_1=-\frac{1}{4}$，解得 $x_1=-\frac{1}{8}$，
所以 $y_1=x_1^2=\frac{1}{64}$，即 $Q\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{64}\right)$.
故抛物线 $y=x^2$ 在点(2,4)处的切线平行于直线 $4x-y+1=0$，在点 $\left(-\frac{1}{8},\frac{1}{64}\right)$ 处的切线垂直于直线 $4x-y+1=0$.
13. 解：因为 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)-(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}-\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{x(x+\Delta x)}-\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\right)$
$=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$，
所以 $y'|_{x=4}=-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=-\frac{5}{16}$，
所以曲线 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$ 在点 $P\left(4,-\frac{7}{4}\right)$ 处的切线方程为 $y+\frac{7}{4}=-\frac{5}{16}(x-4)$，即 $5x+16y+8=0$.
14. D ［解析］由题知，$y_1'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_1}{\Delta x}=\frac{1}{x^2}$，$y_2'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y_2}{\Delta x}=3x^2-2x+2$，所以两曲线在 $x=x_0$ 处的切线的斜率分别为 $\frac{1}{x_0^2}$，$3x_0^2-2x_0+2$. 由题可知，$\frac{3x_0^2-2x_0+2}{x_0^2}=3$，所以 $x_0=1$.
15. 解：∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $P(1,1)$，
∴$a+b+c=1$. ①
∵$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2ax+b+a\Delta x)=2ax+b$，
∴$y'|_{x=2}=4a+b$，∴$4a+b=1$. ②
又抛物线过点 $Q(2,-1)$，∴$4a+2b+c=-1$. ③
联立①②③，得 $a=3$，$b=-11$，$c=9$.

1.2 导数的计算

1.2.1 几个常用函数的导数

1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

1. B ［解析］$(\cos x)'=-\sin x$，故 A 不正确；$(\ln 2x)'=\frac{1}{2x}\times2=\frac{1}{x}$，故 B 正确；$(3^x)'=3^x\ln3$，故 C 不正确；$(x^2e^x)'=2xe^x+x^2e^x$，故 D 不正确. 故选 B.
2. B ［解析］对函数求导得 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)$，∴$f'(0)=1$，∴函数 $f(x)=e^x\cos x$ 的图像在点$(0,f(0))$处的切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.
3. B ［解析］∵$f(x)=x\ln x$，∴$f'(x)=\ln x+1$，由 $f'(x_0)=2$，得 $\ln x_0+1=2$，即 $\ln x_0=1$，解得 $x_0=e$.
4. D ［解析］由 $y=\sin x$ 得 $y'=\cos x$，为偶函数，所以 A 错；由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x$，为非奇非偶函数，所以 B 错；C 中 $y=\ln x$ 的定义域为$\{x|x>0\}$，所以 C 错；由 $y=\cos x-\frac{1}{2}$ 得 $y'=-\sin x$，为奇函数，所以 D 正确. 故选 D.
5. B ［解析］由 $f(x)=\ln(ax-1)$ 可得 $f'(x)=\frac{a}{ax-1}$，由 $f'(2)=2$，可得 $\frac{a}{2a-1}=2$，解得 $a=\frac{2}{3}$.
6. B ［解析］设 $M(x_0,f(x_0))$，∵$f'(x_0)=2x_0+2=0$，∴$x_0=-1$，∴$f(-1)=(-1)^2+2\times(-1)-2=-3$，∴$M(-1,-3)$.
7. A ［解析］∵$y=x^{-\frac{1}{2}}$，∴$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，∴曲线在点$(a,a^{-\frac{1}{2}})$处的切线的斜率 $k=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}$，∴切线方程为 $y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}(x-a)$. 令 $x=0$，得 $y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$；令 $y=0$，得 $x=3a$. 故该切线与两坐标轴围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\times3a\cdot\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}=\frac{9}{4}a^{\frac{1}{2}}=18$，∴$a=64$.
8. 3 ［解析］由 $y=x^n$，得 $y'=nx^{n-1}$，又曲线 $y=x^n$ 在 $x=2$ 处的导数为 12，所以 $n\cdot2^{n-1}=12$，所以 $n=3$.
9. (1,3) ［解析］由题意知 $y'=\frac{3}{x}+1=4$，解得 $x=1$，此时 $4\times1-y-1=0$，解得 $y=3$，所以点 P_0 的坐标是(1,3).
10. $e^x(\cos x-\sin x)-1$ ［解析］$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)-1=e^x(\cos x-\sin x)-1$.
11. 2e ［解析］$f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+2x$，则 $f'(1)=f'(1)-f(0)+2$，∴$f(0)=2$，∴$f(x)=f'(1)e^{x-1}-2x+x^2$，则有 $f(0)=f'(1)e^{-1}$，解得 $f'(1)=2e$.
12. 解：(1)$f'(x)=(1+\sin x)'(1-4x)+(1+\sin x)(1-4x)'=\cos x(1-4x)-4(1+\sin x)=\cos x-4x\cos x-4-4\sin x$.
(2)$f(x)=\frac{x}{x+1}-2^x=1-\frac{1}{x+1}-2^x$，
则 $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-2^x\ln2$.
13. 解：$f'(x)=\frac{a\left(\frac{x+1}{x}-\ln x\right)}{(x+1)^2}-\frac{b}{x^2}$.
由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，且过点(1,1)，故 $f(1)=1$ 且 $f'(1)=-\frac{1}{2}$，则 $b=1$ 且 $\frac{a}{2}-b=-\frac{1}{2}$，解得 $a=1$，$b=1$.
14. 0 ［解析］$F(x)=f(x^3-1)+f(1-x^3)$，则 $F'(x)=3x^2f'(x^3-1)-3x^2f'(1-x^3)$，故 $F'(1)=3f'(0)-3f'(0)=0$.
15. 解：(1)由 $7x-4y-12=0$，得 $y=\frac{7}{4}x-3$.
当 $x=2$ 时，$y=\frac{1}{2}$，∴$f(2)=\frac{1}{2}$. ①
又 $f'(x)=a+\frac{b}{x^2}$，∴$f'(2)=\frac{7}{4}$. ②
由①②得 $\begin{cases}2a-\frac{b}{2}=\frac{1}{2},\\a+\frac{b}{4}=\frac{7}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=3,\end{cases}$
故 $f(x)=x-\frac{3}{x}$.
(2)证明：设 $P(x_0,y_0)$ 为曲线上任一点，由 $f'(x)=1+\frac{3}{x^2}$ 知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$，即 $y-\left(x_0-\frac{3}{x_0}\right)=\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$.
令 $x=0$，得 $y=-\frac{6}{x_0}$，从而得切线与直线 $x=0$ 的交点坐标为 $\left(0,-\frac{6}{x_0}\right)$.
令 $y=x$，得 $y=x=2x_0$，从而得切线与直线 $y=x$ 的交点坐标为 $(2x_0,2x_0)$.
故曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线与直线 $x=0$，$y=x$ 所围成的三角形面积为 $\frac{1}{2}\times\left|-\frac{6}{x_0}\right|\times|2x_0|=6$，
故曲线 $y=f(x)$ 上任一点处的切线与直线 $x=0$，$y=x$ 所围成的三角形的面积为定值，此定值为 6.

滚动习题（一）

1. A ［解析］$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$表示函数从 x_0 到 x_1 的平均变化率.
2. D ［解析］因为 $s'=2t-\frac{3}{t^2}$，所以 $s'|_{t=2}=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$，故选 D.
3. A ［解析］由 $f(x)=f'(1)+x\ln x$，得 $f'(x)=1+\ln x$，令 $x=1$ 得 $f'(1)=1+\ln1=1$，故 $f(e)=f'(1)+e\ln e=1+e$. 故选 A.
4. A ［解析］依题意得 $f'(x)=g'(x)+2x$，∴$f'(1)=g'(1)+2=4$.
5. B ［解析］$f'(x)=(ae^x)'+x'=ae^x+1$，则 $f'(0)=a+1$，因为 $1<f'(0)<2$，所以有 $1<a+1<2$，解得 $0<a<1$.
6. A ［解析］函数 $y=x^2\cos x$，求导得 $y'=2x\cos x+x^2(-\sin x)=2x\cos x-x^2\sin x$，故选 A.
7. D ［解析］∵$f(x)=x^3+3x^2+6x-10$，∴$f'(x)=3x^2+6x+6=3(x+1)^2+3$，当 $x=-1$ 时，$f'(x)$取到最小值 3，∴曲线 $y=f(x)$ 的切线中，斜率最小的切线的斜率为 3. ∵$f(-1)=-1+3-6-10=-14$，∴切点坐标为$(-1,-14)$，∴切线方程为 $y+14=3(x+1)$，即 $3x-y-11=0$.
8. A ［解析］由题意可知，$f_1(x)=\sin x+\cos x$，$f_2(x)=f_1'(x)=\cos x-\sin x$，$f_3(x)=f_2'(x)=-\sin x-\cos x$，$f_4(x)=f_3'(x)=-\cos x+\sin x$，$f_5(x)=f_4'(x)=\sin x+\cos x$，…，显然函数 $f_n(x)$ 以 4 为周期. 因为 $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=0$，所以 $f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cdots+f_{2019}\left(\frac{\pi}{2}\right)=f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)+f_3\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.
9. $\frac{1}{x}\cos(\ln x)$ ［解析］根据题意，令 $t=\ln x$，则 $y=\sin t$，由求导法则得 $y'=\cos t\cdot(\ln x)'=\cos(\ln x)\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$.
10. −4 ［解析］$f'(x)=3x^2+b$，∵$f(x)$的图像在点$(-1,f(-1))$处的切线与直线 $y=-x+2a$ 平行，∴$f'(-1)=3\times(-1)^2+b=-1$，解得 $b=-4$.
11. $-e^{-1}$ ［解析］因为 $f(x)=2xf'(e)+\ln x$，所以 $f'(x)=2f'(e)+\frac{1}{x}$，所以 $f'(e)=2f'(e)+\frac{1}{e}$，解得 $f'(e)=-\frac{1}{e}=-e^{-1}$.
12. ln 2 ［解析］由题意可得，$f'(x)=e^x-\frac{a}{e^x}$是奇函数，∴$f'(0)=1-a=0$，∴$a=1$，∴$f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$. ∵曲线 $y=f(x)$ 的一条切线的斜率是 $\frac{3}{2}$，∴$\frac{3}{2}=e^x-\frac{1}{e^x}$，可得 $e^x=2$，∴$x=\ln2$.
13. 解：(1)$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+6\right)'=x^2-2x^3$.
(2)$f'(x)=[(5x-4)\cos x]'=5\cos x-5x\sin x+4\sin x$.
(3)$f'(x)=\frac{(\ln x)'\times x-\ln x\times x'}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.
14. 解：由题意知
$y'=(e^{2x})'\cos3x+e^{2x}(\cos3x)'$
$=2e^{2x}\cos3x+3(-\sin3x)\cdot e^{2x}$
$=2e^{2x}\cos3x-3e^{2x}\sin3x$，
所以曲线在点(0,1)处的切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=2$.
所以该切线方程为 $y-1=2x$，即 $y=2x+1$.
设直线 l 的方程为 $y=2x+m$，
则两直线间的距离 $d=\frac{|m-1|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解得 $m=-4$ 或 $m=6$.
当 $m=-4$ 时，l 的方程为 $y=2x-4$；
当 $m=6$ 时，l 的方程为 $y=2x+6$.
综上可知，l 的方程为 $y=2x-4$ 或 $y=2x+6$.
15. 解：设 l 与 C_1 相切于点 $P(x_1,x_1^2)$，与 C_2 相切于点 $Q(x_2,-(x_2-2)^2)$.
对于 C_1，$y'=2x$，则与 C_1 相切于点 P 的切线方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，

即 $y=2x_1x-x_1^2$.①

对于 C_2，$y'=-2(x-2)$，则与 C_2 相切于点 Q 的切线方程为 $y+(x_2-2)^2=-2(x_2-2)(x-x_2)$，

即 $y=-2(x_2-2)x+x_2^2-4$.②

因为两切线重合，所以由①②得 $\begin{cases}2x_1=-2(x_2-2),\\ -x_1^2=x_2^2-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=0,\\ x_2=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=0,\end{cases}$

所以直线 l 的方程为 $y=0$ 或 $y=4x-4$.

16. 解:(1)由 $f(x)=x^3-3x$，得 $f'(x)=3x^2-3$. 过点 P 且以 $P(1,-2)$ 为切点的直线 l 的斜率为 $f'(1)=0$，故所求直线 l 的方程为 $y=-2$.

(2)设过点 $P(1,-2)$ 的直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 $(x_0,x_0^3-3x_0)$. 由 $f'(x_0)=3x_0^2-3$，得直线 l 的方程为 $y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$. 又直线 l 过点 $P(1,-2)$，所以 $-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$，即 $(x_0-1)^2(x_0+2)=3(x_0^2-1)(x_0-1)$，解得 $x_0=1$(舍去)或 $x_0=-\frac{1}{2}$，故直线 l 的斜率 $k=-\frac{9}{4}$，故直线 l 的方程为 $y-(-2)=-\frac{9}{4}(x-1)$，即 $9x+4y-1=0$.

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 函数的单调性与导数

1. D [解析] 从 $f'(x)$ 的图像可以看出，在区间 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 内，导函数 $f'(x)$ 单调递增，在区间 $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 内，导函数 $f'(x)$ 单调递减，即函数 $f(x)$ 的图像在 $\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 内越来越陡，在 $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 内越来越平缓. 故选 D.

2. A [解析] $f(x)=\ln x-4x+1$ 的定义域是 $\{x|x>0\}$，$f'(x)=\frac{1}{x}-4=\frac{1-4x}{x}$，当 $f'(x)>0$ 时，解得 $0<x<\frac{1}{4}$. 故选 A.

3. B [解析] 函数 $y=x\cos x-\sin x$，求导得 $y'=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$. 由选项可知当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\sin x<0$，则 $y'>0$. 故选 B.

4. D [解析] $y'=\ln x+1$，令 $y'=0$，得 $x=\frac{1}{e}$. 当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$y'<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},5\right)$ 时，$y'>0$. 所以函数 $y=x\ln x$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},5\right)$ 上单调递增.

5. B [解析] $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，可得 $x=1$. 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 是减函数；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 是增函数；当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}$ 是减函数. 故选 B.

6. A [解析] 由 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，由图可知 $f'(-2)=0$，$f'(3)=0$，且 $a<0$，由一元二次方程根与系数的关系可得 $-2+3=-\frac{2b}{3a}$，即 $\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$，所以 $y=ax^2+\frac{3}{2}bx+\frac{c}{3}$ 的图像为开口向下的抛物线，对称轴方程为 $x=-\frac{3b}{4a}=\frac{9}{8}$. 所以函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}bx+\frac{c}{3}$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty,\frac{9}{8}\right]$. 故选 A.

7. B [解析] 由题意得，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+1)=f(1-x)$，即 $f(x)=f(2-x)$ 成立，所以函数图像的对称轴方程为 $x=1$，所以 $f(3)=f(-1)$. 因为当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$(x-1)f'(x)<0$，所以 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增. 因为 $-1<0<\frac{1}{2}$，所以 $f(-1)<f(0)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，即 $f(3)<f(0)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以 $c<a<b$. 故选 B.

8. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ [解析] 由 $f'(x)=1-2\sin x<0$，得 $\sin x>\frac{1}{2}$，又 $x\in(0,\pi)$，$\therefore x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，故答案为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

9. $(0,+\infty)$ [解析] $f'(x)=3ax^2+1$，$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，$\therefore 3ax^2+1\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立. 又 $a\neq 0$，$\therefore a>0$.

10. $(-\infty,-1)$ [解析] $f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-2}$，令 $f'(x)<0$，得 $x<-1$ 或 $\frac{1}{2}<x<2$. 因为函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，所以函数的单调递减区间为 $(-\infty,-1)$.

11. $\{x|x>1\}$ [解析] 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F'(x)=f'(x)-1<0$，故 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，而 $F(1)=f(1)-1=1$，故 $f(x)<x+1$ 即为 $F(x)<1=F(1)$，解得 $x>1$，故不等式的解集是 $\{x|x>1\}$.

12. 解:(1)$\because f'(x)=\frac{1}{x}-b$，$\therefore f'(1)=1-b$，

又切线斜率为 -1，$\therefore 1-b=-1$，从而 $b=2$.

将 $(1,f(1))$ 代入方程 $x+y+4=0$，

得 $1+f(1)+4=0$，从而 $f(1)=-5$，

$\therefore f(1)=-b+c=-5$，将 $b=2$ 代入得 $c=-3$，

故 $f(x)=\ln x-2x-3$.

(2)依题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{2}$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

13. 解:(1)由已知得 $h'(x)=2ax+b$，

其图像为直线，且过 $(0,-8)$，$(4,0)$ 两点，

$\therefore \begin{cases}8a+b=0,\\ b=-8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-8,\end{cases}$

$\therefore h(x)=x^2-8x+2$，$h'(x)=2x-8$，

$\therefore f(x)=6\ln x+x^2-8x+2$.

(2)$f'(x)=\frac{6}{x}+2x-8=\frac{2(x-1)(x-3)}{x}$，

$\because x>0$，$\therefore x$，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表:

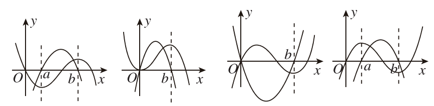
x	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增		单调递减		单调递增

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$ 和 $(3,+\infty)$，单调递减区间为 $(1,3)$.

要使函数 $f(x)$ 在区间 $\left(1,m+\frac{1}{2}\right)$ 上是单调函数，

则 $\begin{cases}1<m+\frac{1}{2},\\ m+\frac{1}{2}\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<m\leqslant\frac{5}{2}$.

14. B [解析] 由图像可知，①②中在每个区间上函数的单调性与对应的导函数的符号是一致的，即单调递增区间上导函数大于零，单调递减区间上导函数小于零；在③中，在区间 $(0,b)$ 上导函数的值为负，而该区间上的函数图像不单调，二者不一致，所以③不正确；在④中，在区间 (a,b) 上导函数的值为正，而相应区间上的函数图像却单调递减，二者相矛盾，所以④不正确. 故选 B.



① ② ③ ④

15. 解:$f'(x)=e^x-a$.

(1)若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)=e^x-a>0$，

此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

若 $a>0$，由 $e^x-a\geqslant 0$，得 $e^x\geqslant a$，即 $x\geqslant\ln a$，

此时 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[\ln a,+\infty)$.

(2)由 $f'(x)=e^x-a\leqslant 0$ 在 $(-2,3)$ 上恒成立，

得 $a\geqslant e^x$ 在 $(-2,3)$ 上恒成立.

$\because -2<x<3$，$\therefore e^{-2}<e^x<e^3$，故只需 $a\geqslant e^3$，

故存在实数 $a\in[e^3,+\infty)$，使 $f(x)$ 在 $(-2,3)$ 上为减函数.

1.3.2 函数的极值与导数

1. B [解析] 对于 $y=x-e^x$，$y'=1-e^x$，令 $y'=0$，得 $x=0$. 在区间 $(-\infty,0)$ 上，$y'>0$；在区间 $(0,+\infty)$ 上，$y'<0$. 故 $x=0$ 为函数 $y=x-e^x$ 的极大值点.

2. B [解析] 由导函数的图像可知，$f'(1)=0$，当 $x\in(-3,1)$ 时，$f'(x)>0$，函数是增函数，当 $x\in(1,2.5)$ 时，$f'(x)<0$，函数是减函数，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

3. D [解析] $f'(x)=x^2-2mx+1$，若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个极值点，则 $f'(x)=0$ 有两个不相等的实数根，$\therefore \Delta=4m^2-4>0$，解得 $m>1$ 或 $m<-1$.

4. C [解析] $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$，令 $(x+1)(x-3)=0$，可得 $x=-1$ 或 $x=3$. 又 $f(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+9>0$，$f(3)=9-9-9+9=0$，当 $x<-1$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，当 $-1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，所以 $x=-1$ 时，函数取得极大值，$x=3$ 时，函数取得极小值，所以 $f(x)$ 的零点个数为 2.

5. A [解析] 因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值，所以在 $x=-2$ 附近，当 $x>-2$ 时，$f'(x)>0$，当 $x=-2$ 时，$f'(x)=0$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$. 所以在 $x=-2$ 附近，当 $x>-2$ 时，$xf'(x)<0$；当 $x=-2$ 时，$xf'(x)=0$；当 $x<-2$ 时，$xf'(x)>0$. 故选 A.

6. A [解析] 因为函数 $y=-x^3+2ax+a$ 在 $(-1,0)$ 内有极小值，所以令 $y'=-3x^2+2a=0$，则有一根在 $(-1,0)$ 内. 分类讨论:当 $a>0$ 时，方程的根为 $\pm\frac{\sqrt{6a}}{3}$，满足题意时，较小的根在 $(-1,0)$ 内，则 $-1<-\frac{\sqrt{6a}}{3}<0$，即 $0<a<\frac{3}{2}$. 当 $a=0$ 时，两根相等，均为 0，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内无极小值. 当 $a<0$ 时，方程无实根，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内无极小值. 综上可得，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

7. D [解析] 设三次函数为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$\because$ 函数 $f(x)$ 的图像过原点，$\therefore d=0$，$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+cx$，$\therefore f'(x)=3ax^2+2bx+c$. $\because$ 该函数当 $x=1$ 时有极大值 4，当 $x=3$ 时有极小值 0，$\therefore 3ax^2+2bx+c=0$ 有两个实根 1 和 3，$\therefore \begin{cases}1+3=-\frac{2b}{3a},\\ 1\times 3=\frac{c}{3a},\\ a+b+c=4,\end{cases}$ $\therefore a=1$，$b=-6$，$c=9$，$\therefore$ 三次函数为 $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

8. -12 [解析] $f'(x)=3x^2+2ax+b$. 由题易知，-1，3 是 $3x^2+2ax+b=0$ 的两个根，$\therefore a=-3$，$b=-9$，故 $a+b=-12$.

9. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ [解析] $f'(x)=3x^2+6ax+3(a+2)$，令 $3x^2+6ax+3(a+2)=0$，即 $x^2+2ax+a+2=0$. $\because$ 函数 $f(x)$ 有极大值和极小值，$\therefore$ 方程 $x^2+2ax+a+2=0$ 有两个不相等的实数根，即 $\Delta=4a^2-4a-8>0$，解得 $a>2$ 或 $a<-1$.

10. -3 [解析] 由函数 $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$，求导得 $f'(x)=3x^2-4ax+a^2$. 根据题意得 $f'(-1)=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=-3$. 当 $a=-1$ 时，$f'(x)=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1)$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $x=-1$ 为极大值点，不满足题意. 当 $a=-3$ 时，$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$，当 $x\in(-3,-1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $x=-1$ 为极小值点，满足题意. 所以 $a=-3$.

11. $a>1$ [解析] $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. $\because f(x)=\ln x+\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+1$，$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}+ax-(a+1)=\frac{(ax-1)(x-1)}{x}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{a}$ 或 $x=1$. 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，则 $0<\frac{1}{a}<1$，解得 $a>1$.

12. 解:(1)由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$，得 $f'(x)=x^2-2x-3$，

$\therefore f'(1)=-4$，$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 -4，

又 $f(1)=-\frac{8}{3}$，

故所求切线方程为 $y+\frac{8}{3}=-4(x-1)$，即 $y=-4x+\frac{4}{3}$.

(2)令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=3$，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由表知，$f(x)$ 的极大值点为 $x=-1$，极小值点为 $x=3$.

13. 解:(1)因为 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$，所以 $f'(x)=6x^2+2ax+b$，从而 $f'(x)=6\left(x+\frac{a}{6}\right)^2+b-\frac{a^2}{6}$，即 $f'(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{a}{6}$ 对称，从而由条件可知 $-\frac{a}{6}=-\frac{1}{2}$，解得 $a=3$，又由 $f'(1)=0$，得 $6+2a+b=0$，解得 $b=-12$.

(2)由(1)知 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$，$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=-2$，

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上是增函数，当 $x\in(-2,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(-2,1)$ 上是减函数，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数，从而 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取到极大值 $f(-2)=21$，在 $x=1$ 处取到极小值 $f(1)=-6$.

14. B [解析] $\because f(x)=x^3+bx^2+ax-b^2-7b$，$\therefore f'(x)=3x^2+2bx+a$，又 $f(x)=x^3+bx^2+ax-b^2-7b$ 在 $x=1$ 处取得极大值 10，$\therefore f'(1)=3+2b+a=0$，$f(1)=1+b+a-b^2-7b=10$，$\therefore b=-2$，$a=1$ 或 $b=-6$，$a=9$. 当 $b=-2$，$a=1$ 时，$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$，当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，与题意不符；当 $b=-6$，$a=9$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，符合题意. $\therefore \frac{b}{a}=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$.

15. 解:(1)依题意，$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+b$.

由切线方程可知，$f(1)=-\frac{1}{2}$，斜率 $k=\frac{1}{2}$，

所以 $\begin{cases}f'(1)=1+2a+b=\frac{1}{2},\\ f(1)=a+b=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}$.

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}(x>0)$.

当 $x>0$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)_{极大值}=f(2)=\ln 2-1$，无极小值.

(2)依题意，$f(x)=\ln x+ax^2+x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+1=\frac{2ax^2+x+1}{x}(x>0)$.

①当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 无极值.

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $2ax^2+x+1=0$，则 $\Delta=1-8a>0$，且两根之积 $x_1x_2=\frac{1}{2a}<0$，

不妨设 $x_1<0$，$x_2>0$，则 $f'(x)=\frac{2a(x-x_1)(x-x_2)}{x}$，即求使 $f(x_2)>0$ 的实数 a 的取值范围.

由方程组 $\begin{cases}2ax_2^2+x_2+1=0,\\ \ln x_2+ax_2^2+x_2>0,\end{cases}$ 消去参数 a 后，得 $\ln x_2+\frac{x_2-1}{2}>0$.

构造函数 $g(x)=\ln x+\frac{x-1}{2}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=0$,所以由 $g(x)>0$ 解得 $x>1$,

即 $x_2=\frac{-1-\sqrt{1-8a}}{4a}>1$,解得 $-1<a<0$.

由①②可得,a 的取值范围是 $-1<a<0$.

1.3.3 函数的最大(小)值与导数

1. A [解析] 因为 $f(x)=\frac{x}{e^x}$,所以 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$.所以当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.所以在$[0,2]$上,$f(x)_{max}=f(1)=\frac{1}{e}$.故选 A.

2. A [解析] ∵$f(x)$在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处有最值,∴$x=\frac{\pi}{3}$是函数 $f(x)$的极值点.又∵$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$,∴$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi=0$,解得 $a=2$.

3. C [解析] 令 $y'=\frac{4(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}=0$,得 $x=\pm1$.

当 x 变化时,y',y 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	极小值	↗	极大值	↘

由上表及函数的图像(图略)易知,当 $x=-1$ 时,函数取得极小值也是最小值,即为-2;当 $x=1$ 时,函数取得极大值也是最大值,即为 2.

4. B [解析] $f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$,∵当 $a\leq0$ 时,$f'(x)\geq0$,$f(x)$单调递增,不满足题意,∴$a>0$.由 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\sqrt{a}$,依题意可知 $0<\sqrt{a}<1$,解得 $0<a<1$.

5. D [解析] 由 $f(x)>0$ 得 $0<x<2$,故①正确.$f'(x)=(2-x^2)e^x$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\pm\sqrt2$,当 $x<-\sqrt2$ 或 $x>\sqrt2$ 时,$f'(x)<0$,当 $-\sqrt2<x<\sqrt2$ 时,$f'(x)>0$,∴当 $x=-\sqrt2$ 时,$f(x)$取得极小值,当 $x=\sqrt2$ 时,$f(x)$取得极大值,故②正确.当 $x\to-\infty$时,$f(x)<0$,当 $x\to+\infty$时,$f(x)<0$,结合函数的单调性可知,函数 $f(x)$有最大值无最小值,故③不正确.

6. A [解析] 构造函数 $F(x)=x^2f(x)$,则 $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=x[2f(x)+xf'(x)]$.当 $x>0$ 时,$F'(x)>x^3>0$,$F(x)$单调递增;当 $x<0$ 时,$F'(x)<x^3<0$,$F(x)$单调递减.所以 $F(x)=x^2f(x)$在 $x=0$ 处取最小值,从而 $F(x)=x^2f(x)\geq F(0)=0$,故选 A.

7. C [解析] ∵$f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+1(a>0)$,∴$f'(x)=3ax^2-3x$,由 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=\frac1a$.

①当 $\frac1a\geq\frac12$,即 $0<a\leq2$ 时,

∵$f\left(-\frac12\right)=\frac58-\frac a8$,$f\left(\frac12\right)=\frac58+\frac a8$,$f(0)=1$,

∴在区间$\left[-\frac12,\frac12\right]$上,$f(x)_{min}=\frac58-\frac a8$.

∵在区间$\left[-\frac12,\frac12\right]$上,$f(x)>0$ 恒成立,

∴$f(x)_{min}=\frac58-\frac a8>0$,解得 $a<5$,∴$0<a\leq2$.

②当 $\frac1a<\frac12$,即 $a>2$ 时,

∵$f\left(-\frac12\right)=\frac58-\frac a8$,$f\left(\frac12\right)=\frac58+\frac a8$,$f(0)=1$,

$f\left(\frac1a\right)=1-\frac{1}{2a^2}$,∴在区间$\left[-\frac12,\frac12\right]$上,$f(x)_{min}=\frac58-\frac a8$,

∵在区间$\left[-\frac12,\frac12\right]$上,$f(x)>0$ 恒成立,

∴$f(x)_{min}=\frac58-\frac a8>0$,解得 $a<5$,∴$2<a<5$.

综上所述,a 的取值范围是$(0,5)$.

8. $y=1$ [解析] 令 $f'(x)=\frac12(e^x-e^{-x})=0$,得 $x=0$,易知 $x_0=0$ 为最小值点,所以切点坐标为$(0,1)$,切线斜率 $k=f'(0)=0$,所以切线方程为 $y=1$.

9. $[-4,-2]$ [解析] $f'(x)=m-2x$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac m2$.

由题意得 $\frac m2\in[-2,-1]$,故 $m\in[-4,-2]$.

10. e [解析] 不等式 $e^x\geq kx$ 对任意实数 x 恒成立,即 $e^x-kx\geq0$ 恒成立,设 $f(x)=e^x-kx$,$x\in\mathbf R$,则有 $f(x)_{min}\geq0$.$f'(x)=e^x-k$,当 $k\leq0$ 时,可得 $f'(x)>0$ 恒成立,$f(x)$单调递增,无最小值.当 $k>0$ 时,$x>\ln k$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;$x<\ln k$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.所以 $x=\ln k$ 时 $f(x)$取得最小值,最小值为 $k-k\ln k$,由 $k-k\ln k\geq0$,解得 $k\leq e$,即 k 的最大值为 e.

11. $[4,+\infty)$ [解析] 当 $x\in(0,1]$时,不等式 $ax^3-3x+1\geq0$ 可化为 $a\geq\frac{3x-1}{x^3}$.设 $g(x)=\frac{3x-1}{x^3}$,$x\in(0,1]$,则 $g'(x)=\frac{3x^3-(3x-1)\cdot3x^2}{x^6}=-\frac{6\left(x-\frac12\right)}{x^4}$.令 $g'(x)=0$,得 $x=\frac12$.

$g'(x)$与 $g(x)$随 x 的变化情况如下表:

x	$\left(0,\frac12\right)$	$\frac12$	$\left(\frac12,1\right]$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

因此 $g(x)$的最大值等于极大值 4,

则实数 a 的取值范围是$[4,+\infty)$.

12. 解:(1)$f'(x)=3x^2+2ax+b$,

∵函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 在 $x=-1$ 与 $x=2$ 处有极值,

∴-1,2 是 $f'(x)=0$ 的两个实数根,∴$\begin{cases}3-2a+b=0,\\12+4a+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac32,\\b=-6,\end{cases}$∴$f(x)=x^3-\frac32x^2-6x+1$.

(2)由(1)可得 $f'(x)=3x^2-3x-6=3(x-2)(x+1)$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=-1$ 或 2.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$[-2,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,3]$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由表格可知:当 $x=-1$ 时,函数 $f(x)$取得极大值,即 $f(-1)=\frac92$;当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$取得极小值,即 $f(2)=-9$.又 $f(-2)=-1$,$f(3)=-\frac72$,故当 $x=-1$ 时,函数 $f(x)$取得最大值$\frac92$;当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$取得最小值-9.

13. 解:(1)$f'(x)=\frac{-x(x+3)}{e^x}$,当 $x<-3$ 时,$f'(x)<0$,当$-3<x<0$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>0$ 时,$f'(x)<0$,

所以函数 $f(x)$在$(-\infty,-3)$上为减函数,在$(-3,0)$上为增函数,在$(0,+\infty)$上为减函数,

因此函数 $f(x)$在 $x=0$ 处有极大值 $f(0)=5$.

(2)由(1)得,函数 $f(x)$在$(-\infty,-3)$上为减函数,在$(-3,0)$上为增函数,所以函数 $f(x)$在 $x=-3$ 处有最小值 $f(-3)=-e^3$.

(3)由题意知 $a\leq\frac{x^2+5x+5}{e^x}=f(x)$.

由(2)得,函数 $f(x)$在区间$(-\infty,0]$上有最小值 $-e^3$,

当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,

所以函数 $f(x)$在定义域内的最小值为 $-e^3$,所以 $a\leq-e^3$,

即 a 的取值范围为 $(-\infty,-e^3]$.

14. A [解析] $f'(x)=\frac mx+8-2x=\frac{m+8x-2x^2}{x}$,若函数 $f(x)=m\ln x+8x-x^2$ 在$[1,+\infty)$上单调递减,则 $-2x^2+8x+m\leq0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立,即 $m\leq2x^2-8x$ 在$[1,+\infty)$上恒成立.令 $h(x)=2x^2-8x$,$x\in[1,+\infty)$,则 $h'(x)=4x-8$,令 $h'(x)>0$,解得 $x>2$,令 $h'(x)<0$,解得 $1\leq x<2$,故 $h(x)$在$[1,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,故 $h(x)_{min}=h(2)=-8$,故 $m\leq-8$.

15. 解:(1)因为曲线 $y=f(x)$和曲线 $y=g(x)$都过点 $P(0,2)$,所以 $b=d=2$.

因为 $f'(x)=2x+a$,所以 $f'(0)=a=4$.又 $g'(x)=e^x(cx+d+c)$,故 $g'(0)=2+c=4$,故 $c=2$.

从而 $a=4$,$b=2$,$c=2$,$d=2$.

(2)令 $F(x)=kg(x)-f(x)=ke^x(2x+2)-x^2-4x-2$,

则 $F'(x)=(ke^x-1)(2x+4)$,

由题设可得 $F(0)\geq0$,故 $k\geq1$,

令 $F'(x)=0$,得 $x_1=-\ln k$,$x_2=-2$.

①若 $1\leq k<e^2$,则 $-2<x_1\leq0$,

当 $x\in[-2,x_1)$ 时,$F'(x)<0$,当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时,$F'(x)>0$,

即 $F(x)$在$[-2,+\infty)$上的最小值为 $F(x_1)=2x_1+2-x_1^2-4x_1-2=-x_1(x_1+2)\geq0$,此时 $f(x)\leq kg(x)$恒成立;

②若 $k=e^2$,则 $F'(x)=(e^{x+2}-1)(2x+4)\geq0$ 在$[-2,+\infty)$上恒成立,故 $F(x)$在$[-2,+\infty)$上单调递增,

因为 $F(x)_{min}=F(-2)=0$,所以 $f(x)\leq kg(x)$恒成立;

③若 $k>e^2$,则 $F(x)_{min}=F(-2)=-2ke^{-2}+2=-2e^{-2}(k-e^2)<0$,

从而当 $x\in[-2,+\infty)$时,$f(x)\leq kg(x)$不可能恒成立.

综上所述,k 的取值范围为 $[1,e^2]$.

滚动习题(二)

1. C [解析] $g(x)=x^3-x$,由 $g'(x)=3x^2-1=0$,解得 $x_1=\frac{\sqrt3}{3}$,$x_2=-\frac{\sqrt3}{3}$(舍去).当 x 变化时,$g'(x)$与 $g(x)$的变化情况如下表:

x	0	$\left(0,\frac{\sqrt3}{3}\right)$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\left(\frac{\sqrt3}{3},1\right)$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	极小值	↗	0

所以当 $x=\frac{\sqrt3}{3}$ 时,$g(x)$有最小值 $g\left(\frac{\sqrt3}3\right)=-\frac{2\sqrt3}{9}$.

2. D [解析] 由函数的单调性与其导函数的正负关系知,选 D.

3. C [解析] 令 $f'(x)=3x^2-3=0$,解得 $x=-1$($x=1$ 舍去).

∵$f(-3)=-17$,$f(0)=1$,$f(-1)=3$,∴$f(x)$的最大值为 3,最小值为-17.

4. D [解析] ∵$f(x)=-x^3+ax^2-x-1$ 在 $\mathbf R$ 上是单调函数,

∴$f'(x)=-3x^2+2ax-1\leq0$ 恒成立,则 $\Delta=(2a)^2-4\times3\leq0$,解得 $-\sqrt3\leq a\leq\sqrt3$.

5. D [解析] 由 $y=f(x)e^x=e^x(ax^2+bx+c)\Rightarrow y'=f'(x)e^x+e^xf(x)=e^x[ax^2+(b+2a)x+b+c]$,由 $x=-1$ 为函数 $y=f(x)e^x$ 的一个极值点,得-1 是方程 $ax^2+(b+2a)x+b+c=0$ 的一个根,所以有 $a-(b+2a)+b+c=0\Rightarrow c=a$,所以函数 $f(x)=ax^2+bx+a$,其图像的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$,且 $f(-1)=2a-b$,$f(0)=a$.对于 A,由图得 $a>0$,$f(0)>0$,$f(-1)=0$,不矛盾;对于 B,由图得 $a<0$,$f(0)<0$,$f(-1)=0$,不矛盾;对于 C,由图得 $a<0$,$f(0)<0$,$x=-\frac b{2a}>0\Rightarrow b>0\Rightarrow f(-1)<0$,不矛盾;对于 D,由图得 $a>0$,$f(0)>0$,$x=-\frac b{2a}<-1\Rightarrow b>2a\Rightarrow f(-1)<0$,与原图中 $f(-1)>0$ 矛盾,故选 D.

6. C [解析] $f'(x)=3ax^2+1$,若函数 $f(x)=ax^3+x$ 恰有 3 个单调区间,则 $f'(x)$有两个不同的零点,所以 $a<0$.故选 C.

7. A [解析] $y=2f(x)+f'(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt2\sin\left(2x+\frac\pi3\right)$,令 $\frac\pi2+2k\pi\leq2x+\frac\pi3\leq\frac{3\pi}2+2k\pi$,$k\in\mathbf Z$,得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leq x\leq\frac{7\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf Z$,所以函数 $y=2f(x)+f'(x)$的一个单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$,故选 A.

8. B [解析] 令 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则 $F'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$,从而 $F(x)$为 $\mathbf R$ 上的增函数,又 $F(0)=2$,所以 $\frac{f(x)}{e^x}>2$ 即为 $F(x)>F(0)$,从而不等式的解集为$(0,+\infty)$.故选 B.

9. 10 [解析] ∵$y=3x^3-9x+5$,∴$y'=9x^2-9$.令 $y'>0$,解得 $x>1$ 或 $x<-1$;令 $y'<0$,解得 $-1<x<1$.∴函数在$[-2,-1)$上单调递增,在$(-1,1)$上单调递减,在$(1,2]$上单调递增,∴$x=-1$ 时,函数取极大值,极大值是 11,$x=1$ 时,函数取极小值,极小值是-1,而 $x=-2$ 时,$y=-1$,$x=2$ 时,$y=11$,故函数的最小值与最大值之和是 10.

10. ③ [解析] 由导函数 $y=f'(x)$的图像可知,函数 $y=f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-2)$,$(2,4)$,单调递增区间为$(-2,2)$,$(4,+\infty)$,故只有③正确.

11. $[-1,1]$ [解析] $f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{e^x}$,令 $f'(x)<0$,解得 $-1<x<3$,故 $f(x)$在$(-1,3)$上单调递减,故$(m,m+2)\subseteq(-1,3)$,得$\begin{cases}m\geq-1,\\m+2\leq3,\end{cases}$解得$-1\leq m\leq1$.

12. $(-1,+\infty)$ [解析] $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac1x-ax-b$.由 $f'(1)=0$,得 $b=1-a$,所以 $f'(x)=\frac1x-ax+a-1=\frac{-ax^2+(a-1)x+1}{x}$.当 $a=0$ 时,易知 $x=1$ 是 $f(x)$的极大值点,满足题意.当 $a\neq0$ 时,令 $g(x)=-ax^2+(a-1)x+1=0$,得 $x=1$ 或 $x=-\frac1a$.

①若 $a>0$,则当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,此时 $f(x)$单调递增;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,此时 $f(x)$单调递减.故 $x=1$ 是 $f(x)$的极大值点.

②若 $a<0$,因为 $x=1$ 是 $f(x)$的极大值点,所以 $-\frac1a>1$,解得 $-1<a<0$.

综上所述,a 的取值范围是 $a>-1$.

13. 解:(1)因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$,所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,则$\begin{cases}f'(1)=3+2a+b=2a,\\f'(2)=12+4a+b=-b,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac32,\\b=-3.\end{cases}$

所以 $f(x)=x^3-\frac32x^2-3x+1$,所以 $f(1)=-\frac52$,$f'(1)=-3$,

所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为

$y-\left(-\frac52\right)=-3(x-1)$,即 $6x+2y-1=0$.

(2)由(1)知 $g(x)=(3x^2-3x-3)e^{-x}$,

所以 $g'(x)=(-3x^2+9x)e^{-x}$,

令 $g'(x)=0$,即 $(-3x^2+9x)e^{-x}=0$,得 $x=0$ 或 $x=3$.

当 $x\in(-\infty,0)$时,$g'(x)<0$,

故 $g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减;

当 $x\in(0,3)$时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$在$(0,3)$上单调递增;

当 $x\in(3,+\infty)$时,$g'(x)<0$,

故 $g(x)$在$(3,+\infty)$上单调递减.

从而函数 $g(x)$在 $x=0$ 处取得极小值,且极小值为 $g(0)=-3$,在 $x=3$ 处取得极大值,且极大值为 $g(3)=15e^{-3}$.

14. 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=\frac12x^2+\ln x$,$f'(x)=x+\frac1x=\frac{x^2+1}{x}$,

当 $x\in[1,e]$时,有 $f'(x)>0$,∴$f(x)$在区间$[1,e]$上为增函数,

∴$f(x)_{max}=f(e)=1+\frac{e^2}{2}$,$f(x)_{min}=f(1)=\frac12$.

(2)$f'(x)=(2a-1)x+\frac1x=\frac{(2a-1)x^2+1}{x}(x>0)$.

①当 $2a-1\geq0$,即 $a\geq\frac12$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,故 $f(x)$无极值点.

②当 $2a-1<0$,即 $a<\frac12$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x_1=\sqrt{\frac1{1-2a}}$,

$x_2=-\sqrt{\frac1{1-2a}}$(舍去).

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$\left(0,\sqrt{\frac1{1-2a}}\right)$	$\sqrt{\frac1{1-2a}}$	$\left(\sqrt{\frac1{1-2a}},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

由上表可知,当 $x=\sqrt{\frac1{1-2a}}$ 时,$f(x)_{极大值}=-\frac12-\frac12\ln(1-2a)$,无极小值.

15. 解:(1)由已知得函数 $g(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$,

$g'(x)=\dfrac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

当 $x>e$ 时,$g'(x)>0$,所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(e,+\infty)$;

当 $0<x<e$ 且 $x\neq1$ 时,$g'(x)<0$,所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$,$(1,e)$.

(2)因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数,且 $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}-ax$,

所以 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-a\leqslant0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)_{\max}\leqslant0$.

又 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}-a=-\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)^2+\dfrac{1}{\ln x}-a=-\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}-a$,故当 $\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{2}$,即 $x=e^2$ 时,$f'(x)_{\max}=\dfrac{1}{4}-a$,

所以 $\dfrac{1}{4}-a\leqslant0$,于是 $a\geqslant\dfrac{1}{4}$,

故 a 的最小值为 $\dfrac{1}{4}$.

16. 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2\ln x-x$,

则 $f'(x)=x-\dfrac{2}{x}-1=\dfrac{x^2-x-2}{x}=\dfrac{(x+1)(x-2)}{x}$,

∴当 $x\in(1,2)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(2,e)$ 时,$f'(x)>0$,

∴$f(x)$ 在 $(1,2)$ 上是减函数,在 $(2,e)$ 上是增函数,

∴当 $x=2$ 时,$f(x)$ 取得最小值,且最小值为 $f(2)=-2\ln 2$.

又 $f(1)=-\dfrac{1}{2}$,$f(e)=\dfrac{e^2}{2}-e-2$,

∴$f(e)-f(1)=\dfrac{e^2}{2}-e-2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^2-2e-3}{2}<0$,∴$f(e)<f(1)$,∴$f(x)_{\max}=f(1)=-\dfrac{1}{2}$.

(2)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=x-\dfrac{2a}{x}+a-2=\dfrac{x^2+(a-2)x-2a}{x}=\dfrac{(x-2)(x+a)}{x}$.

①当 $-2<a<0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上是增函数,在 $(-a,2)$ 上是减函数,在 $(2,+\infty)$ 上是增函数.

②当 $a=-2$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

③当 $a<-2$ 时,$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是增函数,在 $(2,-a)$ 上是减函数,在 $(-a,+\infty)$ 上是增函数.

(3)假设存在实数 a,对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1\neq x_2$,都有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>a$ 恒成立.

不妨设 $0<x_1<x_2$,则 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>a$,即 $f(x_2)-ax_2>f(x_1)-ax_1$,令 $g(x)=f(x)-ax=\dfrac{1}{2}x^2-2a\ln x+(a-2)x-ax=\dfrac{1}{2}x^2-2a\ln x-2x$,

则只需 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数. $g'(x)=x-\dfrac{2a}{x}-2=\dfrac{x^2-2x-2a}{x}=\dfrac{(x-1)^2-1-2a}{x}$,

要使 $g'(x)\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,只需 $-1-2a\geqslant0$,即 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$,故存在 $a\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ 满足题意.

1.4 生活中的优化问题举例

1. C [解析] 依题意得,$y'=-3x^2+27=-3(x-3)(x+3)$. 当 $0<x<3$ 时,$y'>0$;当 $x>3$ 时,$y'<0$. 因此,当 $x=3$ 时,该商品的年利润最大. 故选 C.

2. C [解析] 设底面边长为 x,则表面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{4\sqrt{3}}{x}V(x>0)$,

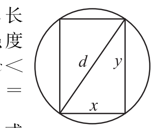
∴$S'=\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}(x^3-4V)$. 令 $S'=0$,得 $x=\sqrt[3]{4V}$,∴表面积最小时底面边长为 $\sqrt[3]{4V}$.

3. A [解析] 设圆柱的底面半径为 r,高为 h,体积为 V,则 $4r+2h=l$,∴$h=\dfrac{l-4r}{2}$,∴$V=\pi r^2h=\dfrac{l}{2}\pi r^2-2\pi r^3\left(0<r<\dfrac{l}{4}\right)$,则 $V'=l\pi r-6\pi r^2$. 令 $V'=0$,得 $r=\dfrac{l}{6}$,∴当 $r=\dfrac{l}{6}$ 时,V 取得最大值,最大值为 $\left(\dfrac{l}{6}\right)^3\pi$.

4. C [解析] 原油温度的瞬时变化率为 $f'(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1(0\leqslant x\leqslant5)$,所以当 $x=1$ 时,$f'(x)$ 取得最小值 -1,即原油温度的瞬时变化率取得最小值 -1.

5. D [解析] 设总利润为 $P(x)$,则由题意得 $P(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^3}{900}+300x-20\,000, & 0\leqslant x\leqslant390,\\ 70\,090-100x, & x>390,\end{cases}$ 则 $P'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{300}x^2+300, & 0\leqslant x\leqslant390,\\ -100, & x>390,\end{cases}$ 令 $P'(x)=0$,得 $x=300$,因为当 $0\leqslant x<300$ 时,$P'(x)>0$,当 $x>300$ 时,$P'(x)<0$,所以当 $x=300$ 时,总利润最大. 故选 D.

6. C [解析] 如图所示,设矩形横断面的宽为 x,长为 y,则由题意知,当 xy^2 取最大值时,横梁的强度最大. ∵$y^2=d^2-x^2$,∴$xy^2=x(d^2-x^2)(0<x<d)$. 令 $f(x)=x(d^2-x^2)(0<x<d)$,则 $f'(x)=d^2-3x^2(0<x<d)$. 令 $f'(x)=0$,解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$ 或 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$(舍去). 当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$ 时,$f'(x)>0$;当 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}d<x<d$ 时,$f'(x)<0$. 故当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$ 时,$f(x)$ 取得极大值,也是最大值,



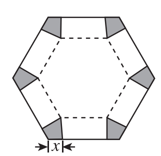
∴当矩形横断面的长为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}d$,宽为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$ 时,横梁的强度最大.

7. B [解析] 设矩形中与半圆直径垂直的一边的长为 x,则另一边的长为 $2\sqrt{R^2-x^2}$,则周长 $l=2x+4\sqrt{R^2-x^2}(0<x<R)$,则 $l'=2-\dfrac{4x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. 令 $l'=0$,解得 $x_1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}R$,$x_2=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}R$(舍去). 当 $0<x<\dfrac{\sqrt{5}}{5}R$ 时,$l'>0$;当 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}R<x<R$ 时,$l'<0$. 故当 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}R$ 时,l 取得最大值,即周长最大时,矩形的两边长分别为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}R$ 和 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}R$.

8. $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ [解析] 设圆锥的高为 x cm,则底面半径为 $\sqrt{20^2-x^2}$ cm,所以圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi x(400-x^2)$,$0<x<20$,所以 $V'=\dfrac{1}{3}\pi(400-3x^2)$,令 $V'=0$,得 $x=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$. 当 $0<x<\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ 时,$V'>0$;当 $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}<x<20$ 时,$V'<0$. 所以当 $x=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ 时,V 取得最大值.

9. $\dfrac{\sqrt{6\pi S}}{3\pi}$ [解析] 设圆柱的底面半径为 r,则圆柱的表面积 $S=2\pi r^2+2\pi rh$,所以 $h=\dfrac{S-2\pi r^2}{2\pi r}$,所以圆柱的体积 $V=\pi r^2h=\dfrac{r}{2}(S-2\pi r^2)=\dfrac{rS-2\pi r^3}{2}\left(0<r<\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}\right)$,所以 $V'=\dfrac{S-6\pi r^2}{2}$. 令 $V'=0$ 得 $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$,易知当 $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ 时,V 取得最大值,此时 $S=6\pi r^2$,所以 $h=2r$,又 $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$,所以 $h=2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}=\dfrac{\sqrt{6\pi S}}{3\pi}$,即当圆柱的体积 V 最大时,圆柱的高 h 的值为 $\dfrac{\sqrt{6\pi S}}{3\pi}$.

10. $\dfrac{2}{3}$ [解析] 设被切去的全等四边形的一边长为 x,如图所示,则正六棱柱的底面边长为 $1-2x$,高为 $\sqrt{3}x$,所以正六棱柱的体积 $V=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}(1-2x)^2\cdot\sqrt{3}x=\dfrac{9}{2}(4x^3-4x^2+x)\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$,则 $V'=\dfrac{9}{2}(12x^2-8x+1)$. 令 $V'=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$(舍去)或 $x=\dfrac{1}{6}$. 当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{6}\right)$ 时,$V'>0$;当 $x\in\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{2}\right)$ 时,$V'<0$. 故当 $x=\dfrac{1}{6}$ 时,V 有极大值,也是最大值,此时正六棱柱的底面边长为 $\dfrac{2}{3}$.



11. 30 [解析] 由题意知,毛利润 $L(x)=xQ-20Q=Q(x-20)=(8300-170x-x^2)(x-20)=-x^3-150x^2+11\,700x-166\,000$,所以 $L'(x)=-3x^2-300x+11\,700$,令 $L'(x)=0$,解得 $x=30$ 或 $x=-130$(舍去),所以当 $x=30$ 时,毛利润最大.

12. 解:(1)据题意可知 $\pi x^2h=3\pi$,得 $h=\dfrac{3}{x^2}$,

则 $S=\dfrac{1}{2}\cdot4\pi x^2+\pi x^2+2\pi x\cdot\dfrac{3}{x^2}=3\pi x^2+\dfrac{6\pi}{x}(x>0)$.

(2)$S'=6\pi x-\dfrac{6\pi}{x^2}$,

令 $S'=0$,得 $x=1$. 列表如下:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
S'	$-$	0	$+$
S	↘	极小值 9π	↗

当 $x=1$ 时,S 取得极小值,且是最小值,

故当圆柱体的底面半径为 1 时,可使表面积 S 取得最小值 9π.

13. 解:(1)依题意有,$W=\begin{cases}-\dfrac{1}{30}x^3+8.1x-10(0\leqslant x\leqslant10),\\ \dfrac{170}{3}-1.9x(x>10).\end{cases}$

(2)设 $f(x)=-\dfrac{1}{30}x^3+8.1x-10$,$0\leqslant x\leqslant10$,则 $f'(x)=-\dfrac{1}{10}x^2+8.1$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=9$ 或 $x=-9$(舍去). 当 $0\leqslant x<9$ 时,$f'(x)>0$;当 $9<x\leqslant10$ 时,$f'(x)<0$. 故当 $x=9$ 时,$f(x)$ 取得最大值 38.6. 当 $x>10$ 时,$\dfrac{170}{3}-1.9x<\dfrac{113}{3}<38.6$. 综上可知,当年产量为 9 万件时,该公司所获年利润最大.

14. 2∶5 [解析] 设总造价为 y,底面单位面积造价为 a,则 $y=2\pi rh\cdot\dfrac{a}{2}+\pi r^2a+\pi r^2\cdot\dfrac{1}{4}a=\pi a\left(rh+r^2+\dfrac{1}{4}r^2\right)=\pi a\left(rh+\dfrac{5}{4}r^2\right)$. 由 $V=\pi r^2h$,得 $y=\pi a\left(\dfrac{V}{\pi r}+\dfrac{5}{4}r^2\right)$,由 $y'=0$,得 $\dfrac{5}{2}r-\dfrac{V}{r^2\pi}=0$,解得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{2V}{5\pi}}$,易知 y 在 $r=\sqrt[3]{\dfrac{2V}{5\pi}}$ 处取得极小值,且为最小值. 此时,$\dfrac{r}{h}=\dfrac{r}{\frac{V}{\pi r^2}}=\dfrac{\pi r^3}{V}=\dfrac{2}{5}$,所以当容器的底面半径 r 与高 h 之比为 2∶5 时,总造价最低.

15. 解:(1)$S_{扇形OBD}=\dfrac{1}{2}R^2\theta$,$S_{\triangle OBD}=\dfrac{1}{2}R^2\sin\theta$,

则 $S_{弓}=f(\theta)=\dfrac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$,$\theta\in(0,\pi)$.

(2)设总利润为 y 元,出租儿童乐园利润为 y_1 元,种植草坪成本为 y_2 元,种植观赏植物成本为 y_3 元,则 $y_1=\dfrac{1}{2}R^2\sin\theta\cdot95$,

$y_2=\dfrac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)\cdot5$,$y_3=\dfrac{1}{2}R^2(\pi-\theta)\cdot55$,

所以 $y=y_1-y_2-y_3=\dfrac{1}{2}R^2(100\sin\theta+50\theta-55\pi)$.

设 $g(\theta)=100\sin\theta+50\theta-55\pi$,$\theta\in(0,\pi)$,

则 $g'(\theta)=100\cos\theta+50$.

由 $g'(\theta)<0$,得 $\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$,则 $\theta\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$,故 $g(\theta)$ 在 $\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right)$ 上为减函数;

由 $g'(\theta)>0$,得 $\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$,则 $\theta\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$,故 $g(\theta)$ 在 $\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 上为增函数.

故当 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ 时,$g(\theta)$ 取到最大值,

此时总利润最大,即 $y_{\max}=\dfrac{1}{2}R^2\left(50\sqrt{3}-\dfrac{65}{3}\pi\right)$,所以当 $\angle BOD=\dfrac{2\pi}{3}$ 时,总利润取得最大值 $\dfrac{1}{2}R^2\left(50\sqrt{3}-\dfrac{65}{3}\pi\right)$ 元.

1.5 定积分的概念

1.5.1 曲边梯形的面积

1.5.2 汽车行驶的路程

1.5.3 定积分的概念

1. D [解析] 区间 $[a,b](a<b)$ 的长度为 $(b-a)$,n 等分之后,每个小区间的长度均为 $\dfrac{b-a}{n}$,故第 i 个小区间是 $\left[a+\dfrac{i-1}{n}(b-a),a+\dfrac{i}{n}(b-a)\right]$.

2. C [解析] 设 $y=\sqrt{16-x^2}$,整理得到 $x^2+y^2=16(0\leqslant x\leqslant4,y\geqslant0)$,

所以定积分 $\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$ 表示半径为 4 的圆面积的 $\dfrac{1}{4}$,故选 C.

3. D [解析] 将区间 $[0,1]$ 四等分,得到 4 个小区间:$\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$,$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$,$\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$,$\left[\dfrac{3}{4},1\right]$. 以每个小区间右端点的函数值为高,则曲边梯形面积的近似值为 4 个小矩形的面积和,即面积的近似值 $S=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{4}+1^3\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{25}{64}$.

4. D [解析] 对于 A,因为 $f(x)$ 是奇函数,所以图像关于原点对称,所以 x 轴上方的面积和 x 轴下方的面积相等,故积分是 0,所以 A 正确. 对于 B,因为 $f(x)$ 是偶函数,所以图像关于 y 轴对称,故图像在 y 轴左、右两侧的面积相等,故 B 正确. C 显然正确. D 选项中 $f(x)$ 也可以小于 0,但必须有大于 0 的部分,且 $f(x)>0$ 的曲线部分围成的面积比 $f(x)<0$ 的曲线部分围成的面积大.

5. C [解析] $\int_a^b[2f(x)+g(x)]dx=2\int_a^bf(x)dx+\int_a^bg(x)dx=2\times1-3=-1$.

6. D [解析] 由题意知,速度与时间的关系式为 $v(t)=v_0+at=10-2t$. 令 $v(t)=0$,得 $t=5$,即从刹车到停车需要 5 s. 将区间 $[0,5]$ 进行 5 等分,用每个小区间的左端点的函数值近似替代每个小区间上的平均速度,可得汽车刹车距离的过剩估计值为 $(10+10-2\times1+10-2\times2+10-2\times3+10-2\times4)\times1=30$(m). 故选 D.

7. B [解析] 根据定积分的几何意义知,定积分 $\int_{-2}^m\sqrt{-x^2-2x}\,dx$ 的值就是函数 $y=\sqrt{-x^2-2x}$ 的图像与 x 轴及直线 $x=-2$,$x=m$ 所围成的图形的面积. $y=\sqrt{-x^2-2x}$ 表示一个半径为 1,圆心为点 $(-1,0)$ 的半圆,其面积等于 $\dfrac{\pi}{2}$,而 $\int_{-2}^m\sqrt{-x^2-2x}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $m=0$.

8. 55 [解析] ∵把区间 $[0,10]$ 10 等分后,每个小区间右端点处的函数值为 $n(n=1,2,\cdots,10)$,每个小区间的长度为 1,

∴物体运动路程的近似值为 $1\times(1+2+\cdots+10)=55$.

9. -2 [解析] 因为 $\int_0^2f(x)dx=\int_0^1f(x)dx+\int_1^2f(x)dx$,

所以 $\int_1^2f(x)dx=\int_0^2f(x)dx-\int_0^1f(x)dx=-2$.

10. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$ [解析] $\int_0^1(x-\sqrt{1-x^2})dx=\int_0^1xdx-\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$,其中 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ 的几何意义为曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与直线 $x=0$,$x=1$ 及 x 轴所围成的图形的面积,即圆 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的部分的面积,其值为 $\dfrac{\pi}{4}$. 而 $\int_0^1xdx$ 的几何意义为直线 $y=x$ 与直线 $y=0$,$x=0$,$x=1$ 所围成图形的面积,其值为 $\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{1}{2}$,所以原式 $=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{4}$.

11. $>$ [解析] $\int_{-2}^0e^xdx-\int_{-2}^0xdx=\int_{-2}^0(e^x-x)dx$,令 $f(x)=e^x-x(-2\leqslant x\leqslant0)$,则 $f'(x)=e^x-1\leqslant0$,∴$f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上为减函数,又 $f(0)=1>0$,∴$f(x)>0$. 由定积分的几何意义知 $\int_{-2}^0f(x)dx>0$,则 $\int_{-2}^0e^xdx>\int_{-2}^0xdx$.

12. 解：令 $f(x)=-x^2+2x$.

(1)分割

将区间$[1,2]$等分为 n 个小区间$\left[1+\frac{i-1}{n},1+\frac{i}{n}\right](i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac{1}{n}$.

(2)近似代替、求和

取 $\xi_i=1+\frac{i}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 n 个小矩形的面积之和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}f\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left[-\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+2\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]\cdot\frac{1}{n}=-\frac{1}{n^3}[(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2]+\frac{2}{n^2}[(n+1)+(n+2)+(n+3)+\cdots+2n]=-\frac{1}{n^3}\left[\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1+2n)}{2}=-\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+3+\frac{1}{n}$.

(3)取极限

$\int_1^2(-x^2+2x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+3+\frac{1}{n}\right]=\frac{2}{3}$.

$\int_1^2(-x^2+2x)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=1,x=2,y=0$ 与函数 $f(x)=-x^2+2x$ 的图像所围成的曲边梯形的面积.

13. 解：(1) $\int_0^2 3x^3\mathrm{d}x=3\int_0^2 x^3\mathrm{d}x=3\left(\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2 x^3\mathrm{d}x\right)=3\times\left(\frac{1}{4}+\frac{15}{4}\right)=12$.

(2) $\int_1^4 6x^2\mathrm{d}x=6\int_1^4 x^2\mathrm{d}x=6\left(\int_1^2 x^2\mathrm{d}x+\int_2^4 x^2\mathrm{d}x\right)=6\times\left(\frac{7}{3}+\frac{56}{3}\right)=126$.

(3) $\int_1^2(3x^2-2x^3)\mathrm{d}x=\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x-\int_1^2 2x^3\mathrm{d}x=3\int_1^2 x^2\mathrm{d}x-2\int_1^2 x^3\mathrm{d}x=3\times\frac{7}{3}-2\times\frac{15}{4}=-\frac{1}{2}$.

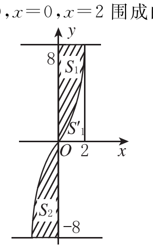
14. 解：由定积分的几何意义知 $\int_{-2}^{2}x^3\mathrm{d}x=0$,

$\int_2^\pi 2x\mathrm{d}x=\frac{(\pi-2)(2\pi+4)}{2}=\pi^2-4$，$\int_\pi^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=0$,

由定积分的性质得

$\int_{-2}^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}x^3\mathrm{d}x+\int_2^\pi 2x\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=\pi^2-4$.

15. 解：如图所示，由对称性知 $S_1=S_2$，故所求面积为 $2S_1$. 先求由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=0,x=0,x=2$ 围成的图形的面积 S_1'.



(1)分割：将区间$[0,2]$等分成 n 个小区间$\left[\frac{2(i-1)}{n},\frac{2i}{n}\right](i=1,2,3,\cdots,n)$，则每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac{2}{n}$.

(2)近似代替：$\Delta S_i\approx\left(\frac{2i}{n}\right)^3\cdot\Delta x$.

(3)求和：$\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^3\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$.

(4)取极限：$S_1'=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{4}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^3\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^4\times[1^3+2^3+\cdots+n^3]}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^4\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(n^2+2n+1)}{n^2}=4$.

所以由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=0,x=0,x=2$ 围成的图形的面积 $S_1'=4$，所以 $S_1=2\times 8-4=12$，故所求面积 $S=2S_1=24$.

1.6 微积分基本定理

1. D [解析] $\int_1^e\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^e=1-0=1$.

2. B [解析] $\because(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$,

$\therefore$ 定积分 $\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=(x+\ln x)\Big|_1^e=(e+\ln e)-(1+\ln 1)=e$.

3. A [解析] $m=\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_0^1=e-1$，$n=\int_1^e\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^e=1$，所以 $m>n$.

4. B [解析] $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_0^1 1\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}+x\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$，故选 B.

5. C [解析] $\int_0^3|x^2-4|\mathrm{d}x=\int_0^2(4-x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2-4)\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2+\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)\Big|_2^3=\frac{23}{3}$.

6. D [解析] $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{4}$.

7. A [解析] $\because\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}$，$\int_1^a\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^a=\ln a$，$\therefore\ln a=\frac{1}{2}$，$\therefore a=\sqrt{e}$.

8. (0,2) [解析] $\int_2^3(k+2)\mathrm{d}x=(k+2)x\Big|_2^3=k+2$，因为 $2<\int_2^3(k+2)\mathrm{d}x<4$，所以 $2<k+2<4$，解得 $0<k<2$.

9. $1-\cos 1$ [解析] 因为 $f(a)=\int_0^a\sin x\mathrm{d}x=(-\cos x)\Big|_0^a=1-\cos a$，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\cos\frac{\pi}{2}=1$，所以 $f\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=f(1)=1-\cos 1$.

10. 1 [解析] 因为 $x=1>0$，所以 $f(1)=\lg 1=0$. 又当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x+\int_0^a 3t^2\mathrm{d}t=x+t^3\Big|_0^a=x+a^3$，所以 $f(0)=a^3$.

因为 $f[f(1)]=1$，所以 $a^3=1$，解得 $a=1$.

11. $f(x)=4x+3$ [解析] 设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，则

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(ax+b)\mathrm{d}x=\int_0^1 ax\mathrm{d}x+\int_0^1 b\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+b=5$,

$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(ax+b)\mathrm{d}x=\int_0^1 ax^2\mathrm{d}x+\int_0^1 bx\mathrm{d}x=\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{17}{6}$. 由 $\begin{cases}\frac{1}{2}a+b=5,\\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{17}{6},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=4,\\ b=3,\end{cases}$ $\therefore f(x)=4x+3$.

12. 解：由定积分的性质知，

$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_2^3 2^x\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2+\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_2^3=\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}+\frac{8}{\ln 2}-\frac{4}{\ln 2}=-\frac{5}{12}+\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{4}{\ln 2}$.

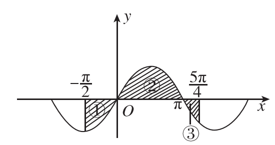
13. 解：$\because\left(\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{2}a^2x^2\right)'=2ax^2-a^2x$,

$\therefore\int_0^1(2ax^2-a^2x)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{2}a^2x^2\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}a^2$,

即 $f(a)=\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}a^2=-\frac{1}{2}\left(a^2-\frac{4}{3}a+\frac{4}{9}\right)+\frac{2}{9}=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}$,

$\therefore$ 当 $a=\frac{2}{3}$ 时，$f(a)$ 有最大值 $\frac{2}{9}$.

14. $4-\frac{\sqrt{2}}{2}$ [解析] 如图，在区间$\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$和$\left[\pi,\frac{5\pi}{4}\right]$上，定积分的值为负，所以①③部分的面积应为定积分值的相反数. 所求的是①②③部分面积的和，所以所求面积 $S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin x|\mathrm{d}x=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\mathrm{d}x+\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x-\int_\pi^{\frac{5\pi}{4}}\sin x\mathrm{d}x=1+2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



15. 解：由题意知，抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 在点 A 处的切线斜率 $k_1=y'\big|_{x=0}=4$，在点 B 处的切线斜率 $k_2=y'\big|_{x=3}=-2$，因此，抛物线在点 A 处的切线方程为 $y=4x-3$，在点 B 处的切线方程为 $y=-2x+6$.

设两切线相交于点 M，由 $\begin{cases}y=4x-3,\\ y=-2x+6,\end{cases}$ 消去 y，得 $x=\frac{3}{2}$，即点 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},3\right)$.

在区间$\left[0,\frac{3}{2}\right]$上，切线 $y=4x-3$ 在抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 的上方；

在区间$\left(\frac{3}{2},3\right]$上，切线 $y=-2x+6$ 在抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 的上方.

因此，所求图形的面积 $S=\int_0^{\frac{3}{2}}[(4x-3)-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[(-2x+6)-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}(x^2-6x+9)\mathrm{d}x=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$.

1.7 定积分的简单应用

1.7.1 定积分在几何中的应用

1.7.2 定积分在物理中的应用

1. D [解析] $\because x\in[a,b]$ 时，$f(x)\leqslant 0$，$x\in[b,c]$ 时，$f(x)\geqslant 0$，

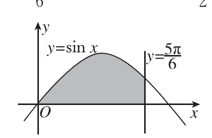
$\therefore$ 阴影部分的面积 $S=\int_b^c f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

2. B [解析] 由题意得，物体在 $t=0$ s 到 $t=3$ s 时间段内的位移是 $\int_0^3(3t^2+2t)\mathrm{d}t=(t^3+t^2)\Big|_0^3=3^3+3^2=36$(m).

3. A [解析] $v=0$ 时物体达到最高点，此时 $40-10t^2=0$，则 $t=2$，

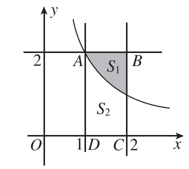
$\therefore$ 所求高度 $h=\int_0^2(40-10t^2)\mathrm{d}t=\left(40t-\frac{10}{3}t^3\right)\Big|_0^2=\frac{160}{3}$.

4. A [解析] 由直线 $x=0,x=\frac{5\pi}{6},y=0$ 与曲线 $y=\sin x$ 所围成的图形如图中阴影部分所示，其面积 $S=\int_0^{\frac{5\pi}{6}}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{5\pi}{6}}=-\cos\frac{5\pi}{6}-(-\cos 0)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.



5. B [解析] $W=\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1+e^x)\mathrm{d}x=(x+e^x)\Big|_0^1=(1+e)-1=e$.

6. B [解析] 如图所示，曲线 $y=\frac{2}{x}$ 与直线 $x=1,x=2,y=0$ 所围成的面积 $S_2=\int_1^2\frac{2}{x}\mathrm{d}x=2\ln x\Big|_1^2=2\ln 2$，所以曲线 $y=\frac{2}{x}$ 与直线 $x=1,x=2,y=2$ 所围成的封闭图形的面积 $S_1=S_{矩形ABCD}-S_2=2-2\ln 2$.



7. D [解析] 由题图可得 $v(t)=\begin{cases}3t,0\leqslant t\leqslant 10,\\ -\frac{3}{5}t+36,10<t\leqslant 60,\end{cases}$ 所以汽车在 1 min 内行驶的路程为 $\int_0^{10}3t\mathrm{d}t+\int_{10}^{60}\left(-\frac{3}{5}t+36\right)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2\Big|_0^{10}+\left(-\frac{3}{10}t^2+36t\right)\Big|_{10}^{60}=150+750=900$(m).

8. $\pi+2$ [解析] 所求面积为 $\int_0^\pi(1+\sin x)\mathrm{d}x=(x-\cos x)\Big|_0^\pi=2+\pi$.

9. 21.95 m [解析] 设 t s 时汽车的速度为 $v(t)$ m/s，当 $t=0$ 时，$v_0=32$ km/h $=\frac{32\times 1000}{3600}$ m/s $=\frac{80}{9}$ m/s. 刹车后减速行驶，$v(t)=v_0+at=\frac{80}{9}-1.8t$，停止时，$v(t)=0$，则 $\frac{80}{9}-1.8t=0$，得 $t=\frac{400}{81}$，所以汽车所走的路程 $s=\int_0^{\frac{400}{81}}v(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{80}{9}t-\frac{1}{2}t^2\times 1.8\right)\Big|_0^{\frac{400}{81}}\approx 21.95$(m).

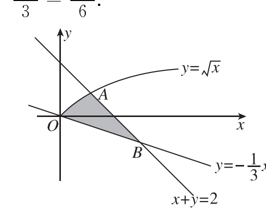
10. e^2 [解析] 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=0,x=1,x=a$ 所围成的封闭图形的面积 $S=\int_1^a\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^a=\ln a-\ln 1=\ln a=2$，$\therefore a=e^2$.

11. $\frac{32}{3}$ [解析] 由图知直线 $y=2x$ 与抛物线 $y=3-x^2$ 的交点坐标分别为$(-3,-6)$和$(1,2)$，则阴影部分的面积 $S=\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)\mathrm{d}x=\left(3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-3}^{1}=3-\frac{1}{3}-1-(-9+9-9)=\frac{32}{3}$.

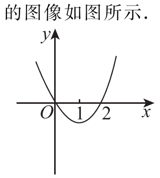
12. 解：如图所示，阴影部分的面积即为所求.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{x},\\ x+y=2,\end{cases}$ 得 $A(1,1)$，由 $\begin{cases}x+y=2,\\ y=-\frac{1}{3}x,\end{cases}$ 得 $B(3,-1)$.

所以所求面积 $S=\int_0^1\left[\sqrt{x}-\left(-\frac{1}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x+\int_1^3\left[(2-x)-\left(-\frac{1}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(2-\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}x^2\right)\Big|_0^1+\left(2x-\frac{1}{3}x^2\right)\Big|_1^3=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+6-\frac{1}{3}\times 9-2+\frac{1}{3}=\frac{13}{6}$.



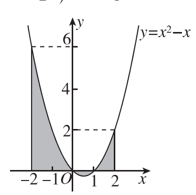
13. 解:(1)由 $v(t)=8t-2t^2\geq0$,得 $0\leq t\leq4$,
即当 $0\leq t\leq4$ 时,P 点向 x 轴正方向运动,
当 $t>4$ 时,P 点向 x 轴负方向运动.
故 $t=6$ 时,点 P 运动的路程 $s=\int_0^4(8t-2t^2)dt-\int_4^6(8t-2t^2)dt=\left(4t^2-\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^4-\left(4t^2-\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_4^6=\frac{128}{3}$.
(2)依题意知 $\int_0^t(8t-2t^2)dt=0$,即 $4t^2-\frac{2}{3}t^3=0$,
解得 $t=0$ 或 $t=6$,所以 t 的值为 6.
14. A [解析]停车时 $v(t)=0$,由 $27-0.9t=0$,得 $t=30$,∴所求路程 $s=\int_0^{30}v(t)dt=\int_0^{30}(27-0.9t)dt=(27t-0.45t^2)\big|_0^{30}=405$.
15. 解:作出 $y=x^2-2x$ 的图像如图所示.



(1)当 $a<0$ 时,
$S=\int_a^0(x^2-2x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_a^0=-\frac{a^3}{3}+a^2=\frac{4}{3}$,
∴$(a+1)(a-2)^2=0$. ∵$a<0$,∴$a=-1$.
(2)当 $a>0$ 时,
① 若 $0<a\leq2$,则 $S=-\int_0^a(x^2-2x)dx=-\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_0^a=a^2-\frac{1}{3}a^3=\frac{4}{3}$,
∴$a^3-3a^2+4=0$,即$(a+1)(a-2)^2=0$.
∵$0<a\leq2$,∴$a=2$.
② 当 $a>2$ 时,
$S=-\int_0^2(x^2-2x)dx+\int_2^a(x^2-2x)dx=-\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_0^2+\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Big|_2^a=-\left(\frac{8}{3}-4\right)+\left(\frac{1}{3}a^3-a^2-\frac{8}{3}+4\right)=\frac{4}{3}+\left(\frac{1}{3}a^3-a^2-\frac{8}{3}+4\right)=\frac{4}{3}$,∴$\frac{1}{3}a^3-a^2+\frac{4}{3}=0$,即$(a+1)(a-2)^2=0$,∴$a>2$ 不合题意.
综上,$a=-1$ 或 $a=2$.

滚动习题(三)

1. D [解析] $\int_1^e\left(x-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)\Big|_1^e=\left(\frac{1}{2}e^2-\ln e\right)-\frac{1}{2}=\frac{e^2-3}{2}$.
2. C [解析] $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx=(-\cos x)\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=1+1+1+1=4$.故选 C.
3. D [解析]函数 $y=x^2-1$ 的图像与 x 轴的交点坐标分别为$(-1,0)$,$(1,0)$,且函数图像关于 y 轴对称,故所求面积 $S=2\int_0^1(1-x^2)dx=2\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.
4. B [解析] $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]=\int_0^1x^pdx$.
5. B [解析] $W=\int_0^4F(x)dx=\int_0^2 10dx+\int_2^4(3x+4)dx=10x\big|_0^2+\left(\frac{3}{2}x^2+4x\right)\Big|_2^4=46$ J.
6. C [解析] $\int_2^4\frac{x^3-3x^2+5}{x^2}dx=\int_2^4\left(x-3+\frac{5}{x^2}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{5}{x}\right)\Big|_2^4=\left(8-12-\frac{5}{4}\right)-\left(2-6-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}$.
7. B [解析]由于 $v(t)=t^2-2t+1\geq0$,因此该质点在第 2 s 内所走的路程 $s=\int_1^2v(t)dt=\int_1^2(t^2-2t+1)dt=\left(\frac{1}{3}t^3-t^2+t\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}$(m),故选 B.
8. B [解析]由 $\begin{cases}y=x^2,\\y=cx^3\end{cases}$ 得 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{c}$.当 $0<x<\frac{1}{c}$ 时,$x^2>cx^3$,∴$\int_0^{\frac{1}{c}}(x^2-cx^3)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}cx^4\right)\Big|_0^{\frac{1}{c}}=\frac{1}{3c^3}-\frac{1}{4c^3}=\frac{1}{12c^3}=\frac{2}{3}$,∴$c^3=\frac{1}{8}$,∴$c=\frac{1}{2}$.故选 B.
9. $\frac{16}{3}$ [解析]由 $v(t)=-t^2+4=0$,得 $t=2$.故这辆车行驶的路程是 $\int_0^2(-t^2+4)dt=\left(-\frac{1}{3}t^3+4t\right)\Big|_0^2=-\frac{8}{3}+8=\frac{16}{3}$(km).
10. -1 或 $\frac{1}{3}$ [解析] $\int_{-1}^1(3x^2+2x+1)dx=(x^3+x^2+x)\big|_{-1}^1=4$,所以 $2(3a^2+2a+1)=4$,即 $3a^2+2a-1=0$,解得 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{3}$.
11. $\frac{17}{3}$ [解析]如图所示,所求面积 S 为图中阴影部分的面积,所以所求面积 $S=\int_{-2}^0(x^2-x)dx+\left|\int_0^1(x^2-x)dx\right|+\int_1^2(x^2-x)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-2}^0+\left|\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1\right|+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=0-\left(-\frac{8}{3}-2\right)+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|+\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{3}$.



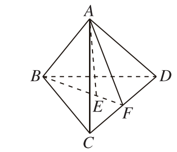
12. -1 [解析] $f'(x)=-3x^2+2ax+b$. ∵$f'(0)=0$,∴$b=0$,∴$f(x)=-x^3+ax^2$.令 $f(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=a(a<0)$,∴$S_{阴影}=-\int_a^0(-x^3+ax^2)dx=\frac{1}{12}a^4=\frac{1}{12}$,∴$a=-1$.
13. 解:由题意得 $v(t)=\begin{cases}2t,0\leq t<1,\\2,1\leq t<3,\\\frac{1}{3}t+1,3\leq t\leq6,\end{cases}$
所以该物体在 $t=\frac{1}{2}$ s 到 $t=6$ s 之间的运动路程
$s=\int_{\frac{1}{2}}^6v(t)dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 2tdt+\int_1^3 2dt+\int_3^6\left(\frac{1}{3}t+1\right)dt=t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1+2t\Big|_1^3+\left(\frac{1}{6}t^2+t\right)\Big|_3^6=\frac{49}{4}$(m).
14. 解:(1)∵$y=x^2$,∴$y'=2x$,
∴直线 l 的斜率 $k=y'|_{x=2}=4$,
∴l:$y-4=4(x-2)$,即 $y=4x-4$ 为所求.
(2)切线 $y=4x-4$ 与 x 轴的交点坐标为$(1,0)$,
则面积 $S=\int_0^1x^2dx+\int_1^2[x^2-(4x-4)]dx=\frac{2}{3}$.
15. 解:(1)设点 P 的横坐标为 $t(0<t<2)$,
则点 P 的坐标为(t,t^2),直线 OP 的方程为 $y=tx$.
$S_1=\int_0^t(tx-x^2)dx=\frac{1}{6}t^3$,$S_2=\int_t^2(x^2-tx)dx=\frac{8}{3}-2t+\frac{1}{6}t^3$.
因为 $S_1=S_2$,所以 $t=\frac{4}{3}$,则点 P 的坐标为 $\left(\frac{4}{3},\frac{16}{9}\right)$.
(2)$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}t^3+\frac{8}{3}-2t+\frac{1}{6}t^3=\frac{1}{3}t^3-2t+\frac{8}{3}$,
$S'=t^2-2$,
令 $S'=0$,得 $t^2-2=0$,
因为 $0<t<2$,所以 $t=\sqrt{2}$.
当 $0<t<\sqrt{2}$ 时,$S'<0$;
当 $\sqrt{2}<t<2$ 时,$S'>0$.
故当 $t=\sqrt{2}$ 时,S_1+S_2 取得最小值 $\frac{8}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$,
此时点 P 的坐标为$(\sqrt{2},2)$.

第二章 推理与证明

2.1 合情推理与演绎推理

2.1.1 合情推理

1. A [解析]观察可发现规律:①每行、每列中,方、圆、三角三种形状均各出现一次,②每行、每列有两阴影一空白,即得结果.
2. C [解析]今天研究一件,明天又研究一件,将事物的规律一个一个找出来,即由个别到一般的推理,故为归纳推理.
3. D [解析]根据对数运算法则,可得 A 不正确;利用向量的数量积运算,可得 B 不正确;利用乘方运算,可得 C 不正确;把长方体与长方形类比,则有长方体的体对角线的平方等于长、宽、高的平方和,可知 D 正确.
4. C [解析]观察梯形数的前几项,得
$5=2+3=a_1$,
$9=2+3+4=a_2$,
$14=2+3+4+5=a_3$,
…
$a_n=2+3+\cdots+(n+2)=\frac{(n+1)(2+n+2)}{2}=\frac{1}{2}(n+1)(n+4)$,
由此可得 $a_{2019}=\frac{1}{2}\times2020\times2023$,
∴$a_{2019}-5=\frac{1}{2}\times2020\times2023-5=2025\times1009$,故选 C.
5. D [解析]由归纳推理可知偶函数的导函数是奇函数,因为 $f(x)$ 是偶函数,则 $g(x)=f'(x)$ 是奇函数,所以 $g(-x)=-g(x)$,故选 D.
6. B [解析]易知切点在面内而不在边上,则选项 A,C 错误.由正三角形的内切圆切于三边的中点,类比猜想出四面都为正三角形的正四面体的内切球切于四个面的正三角形的中心.故选 B.
7. C [解析]观察可以发现,第 n 个不等式左端有 $n+1$ 项,分子为 1,分母依次为 $1^2,2^2,3^2,\cdots,(n+1)^2$;右端分母为 $n+1$,分子成等差数列(首项为 3,公差为 2),因此第 n 个不等式为 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{2n+1}{n+1}$,所以当 $n=2018$ 时,不等式为 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2019^2}<\frac{4037}{2019}$.
8. $n+(n+1)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$
9. $\frac{1}{3}$ [解析]从平面图形类比到空间图形,从二维类比到三维,可得如下结论:正四面体的内切球和外接球的半径之比是 1∶3.
10. $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{5}$ $\frac{2}{n+1}$ [解析]易知 $x_2=f(x_1)=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$,$x_3=f(x_2)=\frac{2\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$,$x_4=f(x_3)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2}=\frac{2}{5}$,归纳猜想可得 $x_n=\frac{2}{n+1}$.
11. 5 [解析]类比点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,可知在空间中,点$(2,4,1)$到平面 $x+2y+2z+3=0$ 的距离 $d=\frac{|2+8+2+3|}{\sqrt{1+4+4}}=5$.
12. 解:猜想:四面体 A-BCD 中,AB,AC,AD 两两垂直,$AE\perp$平面 BCD 于 E,则 $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.猜想正确.理由如下:
如图所示,连接 BE,并延长交 CD 于 F,连接 AF.
∵$AB\perp AC$,$AB\perp AD$,
∴$AB\perp$平面 ACD.而 $AF\subset$平面 ACD,
∴$AB\perp AF$.
在 Rt△ABF 中,$AE\perp BF$,
∴$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AF^2}$.
在 Rt△ACD 中,$AF\perp CD$,
∴$\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$,∴$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$,故猜想正确.



13. 解:因为 $f(x)=\frac{1}{3^x+\sqrt{3}}$,
所以 $f(0)+f(1)=\frac{1}{3^0+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
$f(-1)+f(2)=\frac{1}{3^{-1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
$f(-2)+f(3)=\frac{1}{3^{-2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
归纳猜想一般性结论:$f(-x)+f(x+1)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.证明如下:
$f(-x)+f(x+1)=\frac{1}{3^{-x}+\sqrt{3}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}=\frac{3^x}{1+\sqrt{3}\cdot3^x}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x}{\sqrt{3}+3^{x+1}}+\frac{1}{3^{x+1}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}+3^{x+1}}=\frac{\sqrt{3}\cdot3^x+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\cdot3^x)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
14. $\frac{7}{30}$ [解析]∵$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$,$0.\dot{1}\dot{8}=\frac{18}{99}=\frac{2}{11}$,$0.\dot{3}5\dot{2}=\frac{352}{999}$,$0.000\dot{5}\dot{9}=\frac{1}{1000}\times\frac{59}{99}=\frac{59}{99000}$,∴$0.2\dot{3}=0.2+0.1\times0.\dot{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{6}{30}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30}$.
15. 解:(1)$f(4)=37$,$f(5)=61$.由于 $f(2)-f(1)=7-1=6$,$f(3)-f(2)=19-7=2\times6$,$f(4)-f(3)=37-19=3\times6$,$f(5)-f(4)=61-37=4\times6$,…,因此,当 $n\geq2$ 时,有 $f(n)-f(n-1)=6(n-1)$,所以 $f(n)=[f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)]+\cdots+[f(2)-f(1)]+f(1)=6[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]+1=3n^2-3n+1$.又 $f(1)=1=3\times1^2-3\times1+1$,所以 $f(n)=3n^2-3n+1$.
(2)证明:当 $n=1$ 时,$\frac{1}{f(1)}=1<\frac{4}{3}$.当 $n\geq2$ 时,$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{3n^2-3n+1}<\frac{1}{3n^2-3n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$,所以 $\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}<1+\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=1+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

2.1.2 演绎推理

1. D [解析]选项 A 是由特殊到一般的推理过程,为归纳推理.选项 B 是由特殊到一般的推理过程,为归纳推理.选项 C 是由特殊情况到与它类似的另一个特殊情况的推理过程,是类比推理.选项 D 中,半径为 r 的圆的面积 $S=\pi r^2$,因为单位圆的半径为 1,所以单位圆的面积 $S=\pi$,
其中,半径为 r 的圆的面积 $S=\pi r^2$,是大前提;
单位圆的半径为 1,是小前提;
单位圆的面积 $S=\pi$,为结论.
2. C [解析]①③④都正确.
3. D [解析]用三段论的形式写出的演绎推理是:
大前提:矩形的四个内角相等.
小前提:正方形是矩形.
结论:正方形的四个内角相等.
故选 D.
4. C [解析] 由于函数 $f(x)=\sin(x^2+1)$不是正弦函数,故小前提不正确.
5. B [解析] 利用三段论分析:
大前提:矩形的对角线相等.