教与学整体设计

全品学练考

导学案

LEARN PRACTISE TEST

高中数学

选修2-2 新高考（RJA）

主编：肖德好

黄河出版传媒集团
阳光出版社

Contents
目录 | 导学案

新课学案 · 接力教材

导学案
DAO XUE AN

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题

1.1.2　导数的概念

预习探究　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　函数的平均变化率

一般地，把$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$称为函数 $y=f(x)$从 x_1 到 x_2 的平均变化率.若用 Δx 表示 x_2-x_1，即 $\Delta x=$________，可把 Δx 看作是相对于 x_1 的一个“增量”，可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2；类似地，$\Delta y=$____________，于是，平均变化率可以表示为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1)增量 Δx，Δy 均为正值.　(　　)

(2)平均变化率一定为正值.　(　　)

[探究] 已知函数 $y=2x^2-3x+5$，求当 $x_1=4$，$x_2=5$ 时，函数增量 Δy 和平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

▶ 知识点二　瞬时速度

如果物体的运动方程是 $s=s(t)$，那么物体在时刻 t 的瞬时速度 v 就是在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，当 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限，即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=$____________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1)瞬时速度就是平均变化率.　(　　)

(2)瞬时速度是在某一时刻的速度.　(　　)

[探究] 如果某物体的运动方程为 $s=2(1-t^2)$(s 的单位为 m，t 的单位为 s)，那么其在 1.2 s 末的瞬时速度是多少?

▶ 知识点三　导数的概念

一般地，函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，我们称它为函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数，记作____________，即 $f'(x_0)=$____________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1)函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数与 Δx 有关.　(　　)

(2)设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x=x-x_0$，当 Δx 趋近于 0 时，x 趋近于 x_0，因此，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.　(　　)

[讨论] 导数或瞬时变化率可以反映函数变化的什么特征?

考点类析　考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　函数的平均变化率

例1 (1)已知函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 $y=f(x)$的改变量 Δy 是　(　　)

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

(2)函数 $y=\frac{1}{x}$从 $x=1$ 到 $x=2$ 的平均变化率为　(　　)

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$

C. -2　　D. 2

▶ 考点二　瞬时变化率

[导入] (1)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数是函数在该点处平均变化率的极限，即____________________.

(2)若函数 $f(x)$为物体的运动方程，则 $f'(x_0)$表示物体在 x_0 时刻的__________.

(3)当 Δt 趋近于 0 时,平均速度 $\bar{v}$ 有什么样的变化趋势?

例2 在赛车过程中,汽车位移 s 与比赛时间 t 满足函数关系式 $s=10t+5t^2$(s 的单位为 m,t 的单位为 s).

(1)求 $t=20$ s,$\Delta t=0.1$ s 时的 Δs 与 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$;

(2)求 $t=20$ s 时的瞬时速度.

【变式】保持例 2 的条件不变,则 $t=$________ s 时的瞬时速度为 60 m/s.

拓展 如果质点 A 的运动方程为 $s(t)=2t^3$(位移单位:m,时间单位:s),那么它在 $t=3$ s 时的瞬时速度为 (　　)

A. 6 m/s　　B. 18 m/s

C. 54 m/s　　D. 81 m/s

考点三　导数定义的应用

[导入] 请仔细观察函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的定义式 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,探究下列问题:

(1)设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,则当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的值与 x_0,Δx 的值都有关吗?

(2)函数在定义域内的每一点处都有导数吗?

例3 若函数 $f(x)$ 可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=$ (　　)

A. $-2f'(1)$　　B. $\frac{1}{2}f'(1)$

C. $-\frac{1}{2}f'(1)$　　D. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

【变式】若函数 $f(x)=ax^2+c$,且 $f'(1)=2$,求 a 的值.

拓展 已知 $f(x)=x^2$,$g(x)=x^3$,求满足 $f'(x_0)+2=g'(x_0)$ 的 x_0 的值.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 已知物体的运动方程为 $s(t)=3t^2$(位移单位:m,时间单位:s),若 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=18$ (m/s),则下列说法中正确的是 (　　)

A. 18 m/s 是物体从开始到 3 s 这段时间内的平均速度

B. 18 m/s 是物体从 3 s 到 $(3+\Delta t)$s 这段时间内的速度

C. 18 m/s 是物体在 3 s 这一时刻的瞬时速度

D. 18 m/s 是物体从 3 s 到 $(3+\Delta t)$s 这段时间内的平均速度

2. 函数 $y=1$ 在 $[2,2+\Delta x]$ 上的平均变化率是 (　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. Δx

3. 已知 $f'(x_0)=a$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-3\Delta x)}{2\Delta x}$ 的值为 (　　)

A. $-2a$　　B. $2a$

C. a　　D. $-a$

4. 某物体做直线运动,其运动规律是 $s=t^2+\frac{3}{t}$(t 的单位是秒,s 的单位是米),则它在 4 秒末的瞬时速度为 (　　)

A. $\frac{123}{16}$米/秒　　B. $\frac{125}{16}$米/秒

C. 8 米/秒　　D. $\frac{67}{4}$米/秒

1.1.3 导数的几何意义

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　导数的几何意义

(1)割线斜率与切线斜率

设函数 $y=f(x)$的图像如图 1-1-1 所示，AB 是过点 $A(x_0,f(x_0))$与点 $B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$的一条割线，此割线的斜率是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

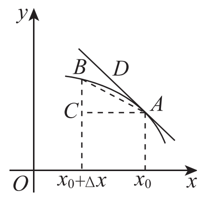


图 1-1-1

当点 B 沿曲线趋近于点 A 时，割线 AB 绕点 A 转动，它的极限位置为直线 AD，这条直线 AD 叫作此曲线在点 A 处的________. 于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，割线 AB 的斜率无限趋近于过点 A 的切线 AD 的斜率 k，即 $k=$________$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

(2)导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数的几何意义是曲线$y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率. 也就是说，曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率是________.

相应地，切线方程为____________________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打"√"，错误的打"×".

(1)若函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数不存在，则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处无切线.　(　　)

(2)若直线与曲线相切，则直线与曲线只有一个交点.　(　　)

(3)与直线 $2x-y+4=0$ 平行的抛物线 $y=x^2$ 的切线方程是 $2x-y-1=0$.　(　　)

(4)由函数 $y=\frac{1}{x}$的图像可知，当 $x<0$ 时，随着 x 的增加，函数值减少得越来越慢；当 $x>0$ 时，随着 x 的增加，函数值减少得越来越快.　(　　)

▶ 知识点二　导函数的定义

从求函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处导数的过程可以看出，当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)$是一个确定的数. 这样，当 x 变化时，$f'(x)$便是x 的一个函数，我们称它为 $f(x)$的________. $y=f(x)$的导函数记作________或________，即 $f'(x)=y'=$________________.

[探究] 曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与曲线 $y=f(x)$过某点(x_0,y_0)的切线有何不同?

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　曲线的切线及切线的斜率

[导入] 如图 1-1-2 所示，当点 $P_n(x_n,f(x_n))(n=1,2,3,4)$沿着曲线 $y=f(x)$趋近于点 $P(x_0,f(x_0))$时，我们发现，割线 PP_n 趋近于确定的位置，这个确定位置的直线 PT 称为曲线在点 P 处的切线. 请问：割线 PP_n 的斜率 k_n 与切线 PT 的斜率 k 有什么关系?

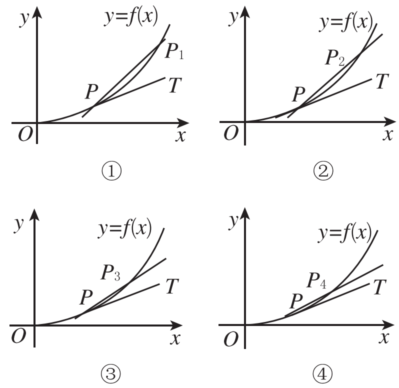


图 1-1-2

例 1 已知曲线 $y=3x^2$，求曲线在点 $P(1,3)$处的切线的斜率.

【变式】已知曲线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 上一点 $P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，则曲线在 P 处的切线的倾斜角为________.

▶ 考点二　利用图像理解导数的几何意义

[导入] 当点 Q 沿着曲线趋近于点 P 时，割线 PQ 的变化情况如图 1-1-3 所示.

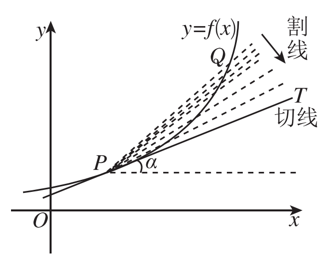


图 1-1-3

(1)若曲线 $y=f(x)$在点 $P(x_0,f(x_0))$处的导数不存在，但切线存在，则切线与________平行；

(2)若 $f'(x_0)=0$，则切线与________平行；

(3)若 $f'(x_0)>0$，则切线的倾斜角为________；

(4)若 $f'(x_0)<0$，则切线的倾斜角为________.

例2 函数 $f(x)$ 的图像如图 1-1-4 所示,则下列不等关系中正确的是 ( )

A. $0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$

B. $0<f'(2)<f(3)-f(2)<f'(3)$

C. $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

D. $0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

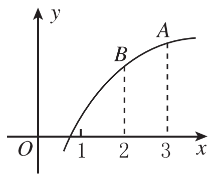


图 1-1-4

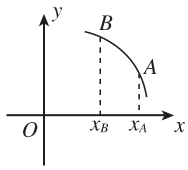


图 1-1-5

【变式】 已知函数 $f(x)$ 的图像如图 1-1-5 所示,则 $f'(x_A)$ 与 $f'(x_B)$ 的大小关系是 ( )

A. $f'(x_A)>f'(x_B)$　　B. $f'(x_A)<f'(x_B)$

C. $f'(x_A)=f'(x_B)$　　D. 不能确定

拓展 已知曲线 $y=2x^2-7$,则曲线在哪一点的切线平行于直线 $4x-y-2=0$?

▶ 考点三　曲线的切线方程

[导入] (1)已知点 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上一点.

①若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率存在,则切线方程为________;

②若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率不存在,则切线方程为________.

(2)已知点 $M(x_1,y_1)$ 为不在曲线 $y=f(x)$ 上的一点,过点 M 作曲线的切线.

①设切点为 $P(x_0,y_0)$,则切线的斜率 $k=$________;

②由 $k_{PM}=k$,得 $k=f'(x_0)=$________;

③化简上述方程,得关于 x_0 的方程,可求得 x_0;

④确定 y_0,k,利用点斜式求切线方程.

例3 已知点 $A\left(2,\frac{5}{2}\right)$ 在曲线 $y=f(x)=x+\frac{1}{x}$ 上.

(1)求点 A 处切线的斜率;

(2)求点 A 处的切线方程.

【变式】 过点 $(1,-1)$ 与曲线 $y=x^3-2x$ 相切的直线方程为________.

拓展 已知曲线方程为 $y=x^2$.

(1)曲线在点 $A(2,4)$ 处的切线方程为________;

(2)过点 $B(3,5)$ 且与曲线相切的直线方程为________.

当堂自测　查漏补缺　巩固提升

1. 如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$,那么 ( )

A. $f'(x_0)>0$　　B. $f'(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$　　D. $f'(x_0)$ 不存在

2. 已知函数 $f(x)=ax^2+1$ 的图像与直线 $y=x$ 相切,则 $a=$ ( )

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 已知曲线 $y=2x^2+4x$ 在点 P 处的切线斜率为 16,则点 P 的坐标为________.

4. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\frac{1}{2}x+2$,则 $f(1)+f'(1)$ 的值等于________.

1.2　导数的计算

1.2.1　几个常用函数的导数

1.2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

预习探究　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　几个常用函数的导数

1. 函数 $f(x)=c$ 的导数是 $f'(x)=$________.

2. 函数 $f(x)=x$ 的导数是 $f'(x)=$________.

3. 函数 $f(x)=x^2$ 的导数是 $f'(x)=$________.

4. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数是 $f'(x)=$________.

5. 函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的导数是 $f'(x)=$________.

▶ 知识点二　基本初等函数的导数公式

1. 若 $f(x)=c$（c 为常数），则 $f'(x)=$________.
2. 若 $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q}^{*})$，则 $f'(x)=$________.
3. 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=$________.
4. 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=$________.
5. 若 $f(x)=a^{x}$，则 $f'(x)=$________.
6. 若 $f(x)=e^{x}$，则 $f'(x)=$________.
7. 若 $f(x)=\log_{a}x$，则 $f'(x)=$________.
8. 若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=$________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1) $\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)'=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　(　　)

(2) $(\log_{2}x)'=\frac{1}{x\ln 2}$.　(　　)

(3) $(3^{x})'=3^{x}\log_{3}e$.　(　　)

[探究] 由导数的计算公式求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点(1,1)处的切线方程.

▶ 知识点三　导数的运算法则

已知 $f(x)$，$g(x)$ 为可导函数，且 $g(x)\neq 0$.

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=$__________.

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=$________________，特别地，$[cf(x)]'=$________.

(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=$__________.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1) 因为两个函数的和(或差)的导数等于这两个函数的导数的和(或差)，所以 $[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\cdots\pm f_n'(x)$.　(　　)

(2) 若函数 $y=\frac{x}{4^{x}}$，则 $y'=\left(\frac{x}{4^{x}}\right)'=\frac{x'\cdot 4^{x}-x\cdot(4^{x})'}{(4^{x})^{2}}=\frac{4^{x}-x\cdot 4^{x}\ln 4}{(4^{x})^{2}}=\frac{1-x\ln 4}{4^{x}}$.　(　　)

▶ 知识点四　复合函数的求导法则

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过变量 u，y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作__________.

复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 的导数间的关系为__________，其中 y_x' 表示 y 对 x 的导数，y_u' 表示 y 对 u 的导数，u_x' 表示 u 对 x 的导数.

[探究] 观察函数 $y=2x\cos x$ 及 $y=\ln(x+2)$ 的结构特点，它们分别是由哪些基本函数组成的？

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　基本函数的导数的简单计算

例1 (1) 若函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(1)$ 等于　(　　)

A. 0　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\frac{1}{2}$

(2) 已知 $f(x)=\frac{1}{x}$，若 $f'(\alpha)=-\frac{1}{4}$，则 $\alpha=$________.

(3) 若 $f(x)=2x^{2}$，$g(x)=x^{3}+1$，则满足 $f'(x)+4=g'(x)$ 的 x 的值为________.

【变式】求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x=1$ 处的导数.

▶ 考点二　导数的运算法则在求导中的应用

[导入] (1) 导数的运算法则成立的条件是函数 $f(x)$，$g(x)$ 都是________函数.

(2) 函数和(或差)的求导法则可推广到有限个可导函数，即 $[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]'=$____________.

(3) $[af(x)+bg(x)]'=$____________(其中 a，b 为常数，$f(x)$，$g(x)$ 为可导函数).

例2 求下列函数的导数：

(1) $y=(x^{2}+1)(x-1)$；(2) $y=3^{x}-\lg x$.

【变式】求下列函数的导数：

(1) $f(x)=x\cdot\tan x$；(2) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

▶ 考点三　导数公式及运算法则在切线方程中的应用

[导入] 根据导数的几何意义求曲线的切线方程是导数的典型问题，学习导数公式和运算法则后，求曲线切线的斜率将更加简单. 求解过程中应注意以下问题：

(1) 切线的斜率就是在切点处的________；

(2) 切点既在________上，又在________上.

例3 经过点 $P(2,8)$ 作曲线 $y=x^3$ 的切线，求切线方程.

【变式】(1)曲线 $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 处的切线的斜率为 ( )

A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)设函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+bx+c$，其中 $a>0$，函数 $f(x)$ 的图像在点 $P(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$ 求 b,c 的值.

▶ 考点四　复合函数求导

[导入] 复合函数求导的步骤是什么？

例4 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x-1)^4$；(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$；

(3) $y=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$；(4) $y=10^{2x+3}$.

【变式】求曲线 $y=e^{2x+1}$ 在点 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ 处的切线方程.

拓展 曲线 $y=\ln x+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-x^2$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程是 ( )

A. $x+y-1=0$　B. $3x+2y+2=0$

C. $x+2y-4=0$　D. $x+2y-1=0$

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(3)$ 等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　B. 0　C. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=4$，则 a 的值是 ( )

A. $\frac{19}{3}$　B. $\frac{16}{3}$　C. $\frac{13}{3}$　D. $\frac{10}{3}$

3. 若函数 $y=\sin^2 x$，则 y' 等于 ( )

A. $\sin 2x$　B. $2\sin x$

C. $\sin x\cos x$　D. $\cos^2 x$

4. 若曲线 $y=e^{ax}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，则 $a=$________.

5. 曲线 $y=e^x$ 在点 $(2,e^2)$ 处的切线与坐标轴所围成的三角形的面积 S 为________.

1.3　导数在研究函数中的应用

1.3.1　函数的单调性与导数

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　函数的单调性与导函数的关系

1. 设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，在这个区间内，如果________，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递增；如果________，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递减.

2. 对于可导函数 $y=f(x)$ 来说，“$f'(x)>0$”是“$f(x)$ 在某个区间上为增函数”的__________条件，“$f'(x)<0$”是“$f(x)$ 在某个区间上为减函数”的__________条件.

[探究](1)如果一个函数具有相同单调性的单调区间不止一个,那么如何表示这些区间?
(2)函数的单调区间与其定义域满足什么关系?

知识点二　利用导数判断函数的单调性的一般步骤

(1)确定函数 $y=f(x)$的定义域;
(2)求导数 $y'=f'(x)$;
(3)解不等式____________,解集在定义域内的部分为增区间;
(4)解不等式____________,解集在定义域内的部分为减区间.

[思考]判断下列说法的正误,正确的打"√",错误的打"×".
(1)对于可导函数 $y=f(x)$,若 $f(x)$在某个区间上为增函数,则 $f'(x)>0$. (　　)
(2)函数 $y=x^3+x$ 的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$. (　　)

考点类析

考点全息　深度挖掘

考点一　函数图像与导函数图像的应用

[导入]观察函数 $y=f(x)$的图像,分别探讨函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 处导数的正负及在 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 附近的单调性.

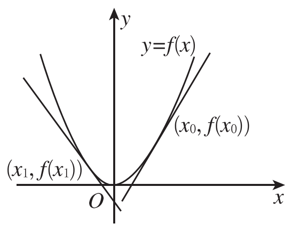


图 1-3-1

例1 已知函数 $y=f(x)$的定义域为$[-1,5]$,部分对应值如下表. $f(x)$的导函数 $y=f'(x)$的图像如图 1-3-2 所示.

x	-1	0	4	5
$f(x)$	1	2	2	1

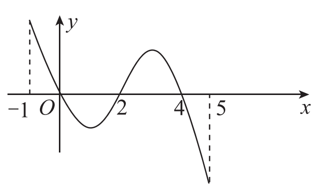


图 1-3-2

给出下列关于函数 $f(x)$的说法:
①函数 $y=f(x)$是周期函数;
②函数 $f(x)$在$[0,2]$上是减函数;
③如果当 $x\in[-1,t]$时,$f(x)$的最大值是 2,那么 t 的最大值为 4;
④当 $1<a<2$ 时,函数 $y=f(x)-a$ 有 4 个零点.
其中正确说法的个数是 (　　)
A. 4　　B. 3
C. 2　　D. 1

【变式】已知函数 $y=xf'(x)$的图像如图 1-3-3 所示(其中 $f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数),下面四个图像中,可能是函数$y=f(x)$的大致图像的是 (　　)

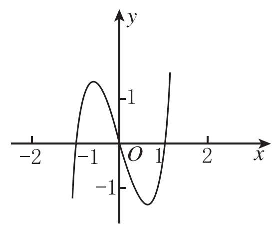


图 1-3-3

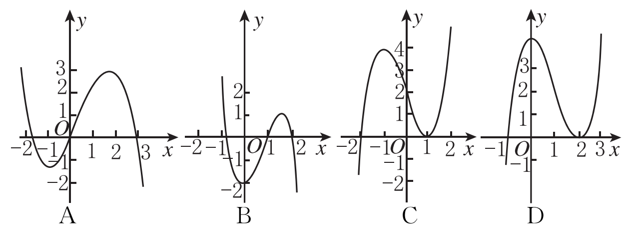


图 1-3-4

考点二　利用导数判断函数的单调性及求函数的单调区间

[导入]对于在区间(a,b)内的可导函数 $f(x)$,若 $f'(x)$在(a,b)的任意子区间内都不恒等于 0,则 $f'(x)\geqslant 0\Rightarrow f(x)$为________,$f'(x)\leqslant 0\Rightarrow f(x)$为________.

例2 已知函数 $f(x)=\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-x+310$,试求函数 $f(x)$的单调区间.

【变式】求函数 $f(x)=x^2e^{-x}$的单调区间.

拓展 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{m}{x}$，若 $m>0$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

▶ 考点三 利用导数解决含参函数的单调性问题

[导入] 已知函数的单调性求参数的取值范围是一种常见的题型，常利用导数与函数单调性的关系，即若函数单调递增，则________，若函数单调递减，则________来求解.注意不等式中的等号不能省略，否则会漏解.

例3 设函数 $f(x)=ax-\dfrac{a}{x}-2\ln x$.

(1)若 $f'(2)=0$，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 在定义域内是增函数，求实数 a 的取值范围.

【变式】已知函数 $y=\dfrac{1}{3}x^3+bx^2+(b+2)x+3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则实数 b 的取值范围为 ( )

A. $[0,1]$ B. $[1,2]$

C. $[-1,2]$ D. $[1,+\infty)$

拓展 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{2a}{x}$，$a\in\mathbf{R}$，若函数 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数，求实数 a 的取值范围.

当堂自测

查漏补缺 巩固提升

1. 函数 $f(x)=x+\ln x$ ( )

A. 在 $(0,6)$ 上是增函数

B. 在 $(0,6)$ 上是减函数

C. 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上是减函数，在 $\left(\dfrac{1}{e},6\right)$ 上是增函数

D. 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上是增函数，在 $\left(\dfrac{1}{e},6\right)$ 上是减函数

2. 已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，若 $y=f'(x)$ 的图像如图 1-3-5 所示，则函数 $y=f(x)$ 的图像可能是 ( )

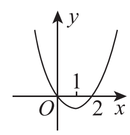


图 1-3-5

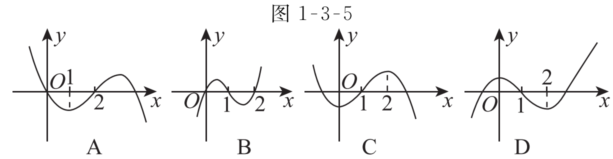


图 1-3-6

3. 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像如图 1-3-7 所示，若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则下列不等式一定成立的是 ( )

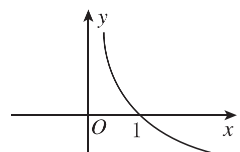


图 1-3-7

A. $f(\cos A)<f(\cos B)$

B. $f(\sin A)<f(\cos B)$

C. $f(\sin A)>f(\sin B)$

D. $f(\sin A)>f(\cos B)$

4. 若函数 $f(x)=-x+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数，则实数 b 的取值范围是 ( )

A. $[1,+\infty)$ B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$ D. $(-\infty,1)$

5. 若函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的单调递减区间为 $[-1,2]$，则 $b=$________，$c=$________.

1.3.2 函数的极值与导数

预习探究

梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 函数极值的定义

1. 对于函数 $y=f(x)$，若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都________，$f'(a)=$________，而且在点 $x=a$ 附近的左侧________，右侧________，就把________叫作函数 $y=f(x)$ 的极小值点，________叫作函数 $f(x)$ 的极小值.

2. 对于函数 $y=f(x)$，若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点的函数值都________，$f'(b)=0$，而且在点 $x=b$ 附近的左侧________，右侧________，就把________叫作函数 $y=f(x)$ 的极大值点，________叫作函数 $f(x)$ 的极大值.

[思考] 判断下列说法的正误，正确的打“√”，错误的打“×”.

(1)函数的极值是唯一的. ( )

(2)一个函数的极大值一定大于极小值. ( )

(3)函数的极值点一定出现在区间的内部，区间的端点不

能成为极值点.（　　）

(4)导数为 0 的点一定是极值点.（　　）

(5)极值点处的导数一定为 0.（　　）

▶ 知识点二　求函数极值的步骤

(1)确定函数的定义域,求________.

(2)求方程 $f'(x)=0$ 的根.

(3)判断 $f'(x)$ 在根的左右两侧的值的符号.如果__________,那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值;如果__________,那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值;如果____________,那么 $f(x)$ 在这个根处无极值.

[探究] 函数 $f(x)$ 的定义域为 (a,b),导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图像如图 1-3-8 所示,则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有________个极小值点.

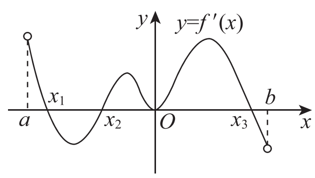


图 1-3-8

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　求函数的极值

[导入] (1)如果 $f'(x_0)=0$,并且在点 $x=x_0$ 附近的左侧 $f'(x)>0$,右侧 $f'(x)<0$,那么 $f(x_0)$ 是________.

(2)如果 $f'(x_0)=0$,并且在点 $x=x_0$ 附近的左侧 $f'(x)<0$,右侧 $f'(x)>0$,那么 $f(x_0)$ 是________.

可将 x,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况列成如下所示的表格:

x	x_0 左侧	x_0	x_0 右侧
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大值	↘

x	x_0 左侧	x_0	x_0 右侧
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

例 1 求函数 $f(x)=\frac{3}{x}+3\ln x$ 的极值.

【变式】 已知函数 $f(x)=(x^2+ax-2a^2+3a)e^x(x\in\mathbf{R})$,当实数 $a\neq\frac{2}{3}$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值.

拓展 设函数 $f(x)=xe^x$,则（　　）

A. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

D. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

▶ 考点二　利用极值求参数问题

[导入] 假设 $f'(x_0)$ 存在,那么"x_0 为极值点"与"$f'(x_0)=0$"有何关系?

例 2 已知 $f(x)=ax^5-bx^3+c(a>0)$ 在 $x=\pm1$ 处有极值,且极大值为 4,极小值为 0,试确定 a,b,c 的值.

【变式】 已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx+1$,仅当 $x=-1$ 和 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得极值,且极大值比极小值大 4,求 a,b 的值.

拓展 已知函数 $f(x)=x^3-3bx+3b$ 在区间 $(0,1)$ 内有极值,则实数 b 的取值范围是________.

▶ 考点三　利用极值求方程解的问题

［导入］对于方程 $f(x)=m$ 的解的个数问题，如何利用极值来解决？

例3 已知函数 $f(x)=x^3-12x+4$，讨论方程 $f(x)=m$ 的解的个数.

【变式】设函数 $f(x)=x^3-6x+5, x\in \mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实根，求实数 a 的取值范围.

拓展 若函数 $f(x)=2x^3-6x+k$ 在 $\mathbf{R}$ 上只有一个零点，求实数 k 的取值范围.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. “函数 $y=f(x)$ 在一点处的导数值为 0”是“函数 $y=f(x)$ 在这点处取得极值”的　　(　　)
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. 若函数 $y=ax^3+bx^2$ 取得极大值和极小值时，x 的值分别为 0 和 $\frac{1}{3}$，则　　(　　)
   A. $a-2b=0$　　B. $2a-b=0$
   C. $2a+b=0$　　D. $a+2b=0$
3. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，导函数 $f'(x)$ 的图像如图 1-3-9 所示，则函数 $f(x)$　　(　　)
   A. 无极大值点，有四个极小值点
   B. 有三个极大值点，两个极小值点
   C. 有两个极大值点，两个极小值点
   D. 有四个极大值点，无极小值点

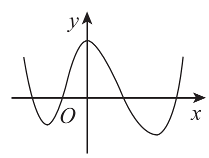


图 1-3-9

4. 若直线 $y=a$ 与函数 $f(x)=x^3-3x$ 的图像有三个交点，则 a 的取值范围是__________.

1.3.3　函数的最大（小）值与导数

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　函数最值的定义

1. 一般地，如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图像是____________，那么它必有最大值与最小值.
2. 对于函数 $f(x)$，给定区间 I，若对任意 $x\in I$，存在 $x_0\in I$，使得 $f(x)$________$f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最小值；若对任意 $x\in I$，存在 $x_0\in I$，使得 $f(x)$________$f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值.

［思考］如图 1-3-10 所示，观察区间 $[a,b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图像，找出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值、最小值. 若将区间改为 (a,b)，$f(x)$ 在 (a,b) 上还有最值吗？

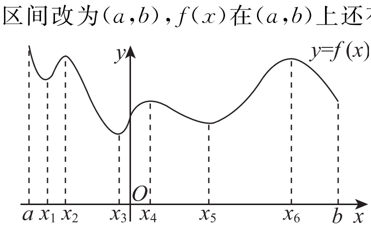


图 1-3-10

知识点二　求函数的最大值与最小值的步骤

函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，在区间(a,b)内可导，求$f(x)$在$[a,b]$上的最大值与最小值的步骤如下：

(1)求函数 $y=f(x)$在(a,b)内的________；

(2)将函数 $y=f(x)$的各极值与端点处的函数值________进行比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值.

［探究］当 $x\in[-1,1]$时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$的值域是________.

考点类析

考点全息　深度挖掘

考点一　求函数的最大值与最小值

［导入］函数 $y=f(x)$的图像的最高点和最低点对应的横坐标分别为函数 $f(x)$的最大值点和最小值点. 如果函数 $f(x)$存在最大值，那么其最大值是否唯一？最大值点是否唯一？

例1　已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2-2x+c$ 在 $x=-2$ 处有极大值 6，在 $x=1$ 处有极小值.

(1)求 a,b,c 的值；

(2)求 $f(x)$在区间$[-3,3]$上的最大值和最小值.

【变式】求下列函数的最值：

(1)$f(x)=2x^3-12x,x\in[-2,3]$；

(2)$f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x,x\in[0,2\pi]$.

拓展　函数 $f(x)=2x^3-6x^2+m$(m 是常数)在区间$[-2,2]$上有最大值 3，则 $f(x)$在区间$[-2,2]$上的最小值为　(　　)

A. -37　　B. -29　　C. -5　　D. -11

考点二　与函数的最值有关的问题

［导入］与函数的最值有关的问题有哪些？如何利用函数的最值来解决？

例2　已知函数 $f(x)=\ln x+kx(k\in\mathbf{R})$.

(1)当 $k=-2$ 时，求函数 $f(x)$的极值点；

(2)当 $k=0$ 时，若 $f(x)+\dfrac{b}{x}-a\geqslant 0(a,b\in\mathbf{R})$恒成立，求 $e^{a-1}-b+1$ 的最大值.

【变式】已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+ax^2-x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=\dfrac{1}{4}$时，求函数 $f(x)$的单调区间和极值；

(2)若对任意实数 $b\in(1,2)$，当 $x\in(-1,b]$时，函数 $f(x)$的最大值为 $f(b)$，求实数 a 的取值范围.

拓展　设函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+8c$.

(1)若对任意 $x\in[0,3]$，都有 $f(x)<c^2$ 成立，求 c 的取值范围；

(2)若对任意 $x\in(0,3)$，都有 $f(x)<c^2$ 成立，求 c 的取值范围.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上　(　　)

A. 极大值一定比极小值大

B. 极大值一定是最大值

C. 最大值一定是极大值

D. 最大值一定大于极小值

2. 当 $x\in(-1,1)$时，函数 $f(x)=x^3-3x$　(　　)

A. 有最大值，但无最小值

B. 有最大值，也有最小值

C. 无最大值，也无最小值

D. 无最大值，但有最小值

3. 函数 $y=x-\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$的最大值是　(　　)

A. $\pi-1$　　B. $\frac{\pi}{2}-1$

C. π　　D. $\pi+1$

4. 函数 $y=x^3-3x^2-9x(-2<x<2)$的最大值为________.

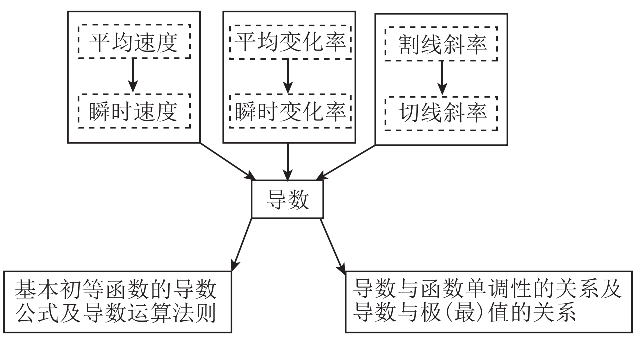
5. 函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$ 在区间$[-4,4]$上的最大值为 10，则其最小值为________.

本章总结提升

单元回眸

构建网络　高屋建瓴

【知识网络】



【知识辨析】

判断下列说法是否正确.(请在括号中填写"√"或"×")

1. 设 $f(x)$是 **R** 上的可导函数，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-2f'(x_0)$.　(　　)

2. 曲线上某一点处的切线，若有，则只有一条；过某一点的切线，若有，则可能不止一条.　(　　)

3. $(\sin 2x)'=\cos 2x$.　(　　)

4. 若 $f(x)$在区间(a,b)上单调递增，则 $f'(x)>0$ 在区间(a,b)上恒成立.　(　　)

5. "$f'(x_0)=0$"是"$f(x_0)$为极值"的充要条件.　(　　)

整合创新

提炼方法　融会贯通

▶ 题型一　导数与曲线的切线

[类型总述] (1)利用导数求切点坐标；(2)利用导数求切线方程.

例1 设函数 $f(x)=x^3-3ax+b(a\neq 0)$，若曲线 $y=f(x)$在点$(2,f(2))$处与直线 $y=8$ 相切，求 a，b 的值.

【变式】[2018·全国卷Ⅱ] 曲线 $y=2\ln(x+1)$在点$(0,0)$处的切线方程为________.

▶ 题型二　导数与函数的单调性

[类型总述] (1)利用导数求单调区间；

(2)已知函数的单调性求参数的取值范围.

例2 求下列函数的单调区间.

(1)$f(x)=(x-3)e^x$，$x\in(0,+\infty)$；

(2)$f(x)=x(x-a)^2$.

【变式】已知函数 $f(x)=x-2\ln x-\dfrac{a}{x}+1$，若函数 $f(x)$ 在定义域上是增函数，求实数 a 的取值范围.

▶ 题型三　利用导数研究函数的极值、最值

[类型总述] (1)利用导数求单调区间；(2)已知函数的单调性，求参数的取值范围；(3)求极值；(4)求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最值；(5)解决恒成立问题.

例3 函数 $f(x)=2x^3+3ax^2+3bx+8c$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处取得极值.

(1)求 a,b 的值；

(2)若对于任意的 $x\in[0,3]$，都有 $f(x)<c^2$ 成立，求 c 的取值范围.

【变式】[2018·北京卷] 设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a；

(2)若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

▶ 题型四　数形结合思想在导数中的应用

[类型总述] 根据图像交点的个数求参数的取值范围；根据函数的单调性和导函数的正负关系判断函数图像.

例4 已知函数 $f(x)=x^3-3ax-1$，$a\neq 0$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，直线 $y=m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像有三个不同的交点，求 m 的取值范围.

【变式】函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图 T1-1 所示，则函数 $y=f(x)$ 的图像可能是　　(　　)

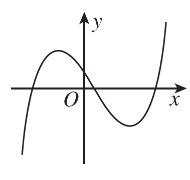


图 T1-1

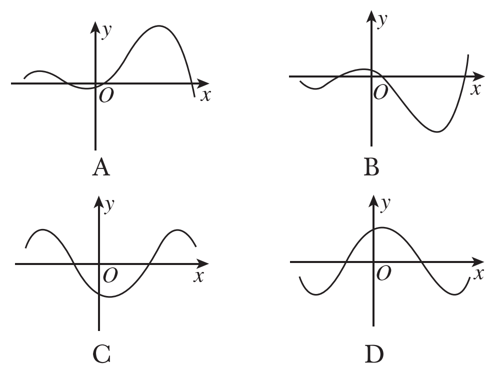


图 T1-2

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题

1.1.2　导数的概念

【预习探究】

知识点一

x_2-x_1　$f(x_2)-f(x_1)$

思考 (1)×　(2)×

探究 解：令 $f(x)=2x^2-3x+5$，

则 $\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$

$=2(x_1+\Delta x)^2-3(x_1+\Delta x)+5-(2x_1^2-3x_1+5)$

$=2[(\Delta x)^2+2x_1\Delta x]-3\Delta x$

$=2(\Delta x)^2+(4x_1-3)\Delta x$，

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2(\Delta x)^2+(4x_1-3)\Delta x}{\Delta x}=2\Delta x+(4x_1-3)$，

当 $x_1=4$，$x_2=5$ 时，$\Delta x=1$，$\Delta y=2(\Delta x)^2+(4x_1-3)\Delta x=2+13=15$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=15$.

知识点二

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

思考 (1)×　(2)√

探究 解：$\because \Delta s=2[1-(1.2+\Delta t)^2]-2\times(1-1.2^2)=-2(\Delta t)^2-4.8\Delta t$，$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t}=-4.8-2\Delta t$，当 $\Delta t\to 0$ 时，1.2 s 末的瞬时速度为 -4.8 m/s.

知识点三

$f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

思考 (1)×　(2)√

讨论 解：导数或瞬时变化率可以反映函数在一点处变化的快慢程度.

【考点类析】

考点一

例 1 (1)D　(2)B　[解析] (1)当自变量 x 由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，相应的函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，故函数值的改变量为 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

(2)平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}-1}{2-1}=-\frac{1}{2}$.

[小结] 求平均变化率的三个步骤：

(1)计算 Δy：计算函数值的增量 $f(x_2)-f(x_1)$.

(2)计算 Δx：计算自变量的增量 x_2-x_1.

(3)计算 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$：平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

考点二

导入 (1)瞬时变化率　(2)瞬时速度

(3)解：当 Δt 趋近于 0 时，平均速度 $\bar{v}$ 趋近于一个确定的值. 从物理的角度看，时间间隔 $|\Delta t|$ 无限变小时，平均速度 $\bar{v}$ 就无限趋近于某时刻的瞬时速度，即 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

例 2 解：(1)$\Delta s=10\times(20+0.1)+5\times(20+0.1)^2-10\times20-5\times20^2=21.05$(m). $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{21.05}{0.1}=210.5$(m/s).

(2)在 t 时刻的瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{10(t+\Delta t)+5(t+\Delta t)^2-10t-5t^2}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{5(\Delta t)^2+10t\cdot\Delta t+10\Delta t}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(5\Delta t+10t+10)$

$=10t+10$，

故当 $t=20$ 时，$v=10\times20+10=210$(m/s).

变式 5　[解析] 由例 2 可知，在 t 时刻的瞬时速度 $v=10t+10$，

令 $10t+10=60$，得 $t=5$，即 $t=5$ s 时的瞬时速度为 60 m/s.

[小结] 求瞬时速度的步骤：

(1)计算 $\bar{v}$：平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

(2)计算瞬时速度：求平均速度的极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

拓展 C　[解析] 质点 A 在 $t=3$ s 时的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{2(3+\Delta t)^3-2\times3^3}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{54\Delta t+18(\Delta t)^2+2(\Delta t)^3}{\Delta t}=54$ (m/s).

考点三

导入 解：(1)导数即为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，是一个局部概念，只与函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其附近的函数值有关，与 Δx 无关.

(2)并不是任何一个函数在定义域内的每一点处都有导数，导数研究的是函数在 $x=x_0$ 处及其附近函数值的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比的极限，是一个局部概念，若极限存在，则函数在 $x=x_0$ 处有导数，否则就没有导数. 例如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不存在导数，因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1,\Delta x>0,\\-1,\Delta x<0,\end{cases}$ 所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限不存在，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数不存在.

例 3 C　[解析] $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$

$=-\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f[1+(-\Delta x)]-f(1)}{-\Delta x}=-\frac{1}{2}f'(1)$.

变式 解：$\because f(1+\Delta x)-f(1)=a(1+\Delta x)^2+c-a-c=a(\Delta x)^2+2a\Delta x$，

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a(\Delta x)^2+2a\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(a\Delta x+2a)=2a=2$，$\therefore a=1$.

[小结] 利用定义求导数的步骤：

(1)求函数值增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(3)求极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

拓展 解:由导数的定义知,

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0$,

$g'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=3x_0^2$.

$\because f'(x_0)+2=g'(x_0)$,$\therefore 2x_0+2=3x_0^2$,

即 $3x_0^2-2x_0-2=0$,解得 $x_0=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$或 $x_0=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$.

【当堂自测】

1. C [解析]根据导数的定义可知,$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=18$(m/s)表示物体在3 s这一时刻的瞬时速度.

2. A [解析] $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-1}{\Delta x}=0$.

3. B [解析]由题意 $f'(x_0)=a$,

得$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-3\Delta x)}{3\Delta x}=a$,

则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-3\Delta x)}{2\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-3\Delta x)}{2\Delta x}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{3}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-3\Delta x)}{3\Delta x}$

$=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a=2a$.

4. B [解析]该物体在4秒末的瞬时速度为$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(4+\Delta t)-s(4)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{(4+\Delta t)^2+\frac{3}{4+\Delta t}-4^2-\frac{3}{4}}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{16+8\Delta t+(\Delta t)^2+\frac{3}{4+\Delta t}-16-\frac{3}{4}}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta t)^2+8\Delta t-\frac{3\Delta t}{4(4+\Delta t)}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\Delta t+8-\frac{3}{16+4\Delta t}\right)=\frac{125}{16}$(米/秒).

1.1.3 导数的几何意义

【预习探究】

知识点一

(1)切线 $f'(x_0)$ (2)$f'(x_0)$ $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

思考 (1)× (2)× (3)√ (4)×

知识点二

导函数 $f'(x)$ y' $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

探究 解:对于曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线,点$(x_0,f(x_0))$一定是切点,只要求出 $k=f'(x_0)$,利用点斜式写出切线方程即可;而曲线 $y=f(x)$过某点(x_0,y_0)的切线,给出的点(x_0,y_0)不一定在曲线上,即使在曲线上也不一定是切点.

【考点类析】

考点一

导入 解:割线 PP_n 的斜率 $k_n=\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$,当点 P_n 无限趋近于点 P 时,k_n 无限趋近于切线 PT 的斜率 k,即 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.

例 1 解:$\because y'|_{x=1}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3(1+\Delta x)^2-3\times 1^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{3+6\Delta x+3(\Delta x)^2-3}{\Delta x}=6$,

$\therefore$曲线在点 $P(1,3)$处的切线的斜率为 6.

变式 45° [解析]$\because y=\frac{1}{2}x^2-2$,

$\therefore y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+\Delta x)^2-2-\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2+x\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)=x$,$\therefore y'|_{x=1}=1$,$\therefore$曲线在点$P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$处的切线的斜率为 1,则切线的倾斜角为 45°.

[小结]求曲线在点 P 处的切线方程的基本步骤:

(1)求出点 P 的坐标$(x_0,f(x_0))$;

(2)求出函数在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,得到曲线在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率;

(3)利用点斜式求切线方程.

考点二

导入 (1)y轴 (2)x轴 (3)锐角 (4)钝角

例 2 C [解析]$k_{AB}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f(3)-f(2)$,$f'(2)$为函数 $f(x)$的图像在点 $B(2,f(2))$处的切线的斜率,$f'(3)$为函数 $f(x)$的图像在点 $A(3,f(3))$处的切线的斜率,根据图像可知 $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$.

变式 B [解析]由图可知函数 $f(x)$的图像在 A 处的切线斜率小于在 B 处的切线斜率,根据导数的几何意义可知 $f'(x_A)<f'(x_B)$,故选 B.

[小结]导数的几何意义就是切线的斜率,因此比较导数大小的问题可以用数形结合思想来解决.

拓展 解:$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[2(x+\Delta x)^2-7]-(2x^2-7)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x)=4x$.

设切点为(x_0,y_0),则 $4x_0=4$,$\therefore x_0=1$,$\therefore y_0=-5$,

$\therefore$切点坐标为$(1,-5)$.

故曲线在点$(1,-5)$处的切线平行于直线 $4x-y-2=0$.

考点三

导入 (1)①$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ ②$x=x_0$

(2)①$f'(x_0)$ ②$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

例 3 解:(1)$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)$

$=2+\Delta x+\frac{1}{2+\Delta x}-\left(2+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{-\Delta x}{2(2+\Delta x)}+\Delta x$,

所求斜率 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\frac{-\Delta x}{2\Delta x(2+\Delta x)}+\frac{\Delta x}{\Delta x}\right]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{2(2+\Delta x)}+1\right]=\frac{3}{4}$.

(2)点 A 处的切线方程为 $y-\frac{5}{2}=\frac{3}{4}(x-2)$,

即 $3x-4y+4=0$.

变式 $x-y-2=0$ 或 $5x+4y-1=0$ [解析]若直线与曲线切于点(x_0,y_0),则直线的斜率 $k=\frac{y_0+1}{x_0-1}=\frac{x_0^3-2x_0+1}{x_0-1}=x_0^2+x_0-1$,

又∵ $k=y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-2(x_0+\Delta x)-x_0^3+2x_0}{\Delta x}=3x_0^2-2$,

∴ $x_0^2+x_0-1=3x_0^2-2$,即 $2x_0^2-x_0-1=0$,

∴ $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$,

∴切点为$(1,-1)$或$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{8}\right)$,切线斜率为 1 或 $-\frac{5}{4}$,

∴过点$(1,-1)$与曲线 $y=x^3-2x$ 相切的直线方程为 $x-y-2=0$ 或 $5x+4y-1=0$.

[小结]求曲线的切线方程时,首先要判断所给点是否在曲线上.若求的是"在某点"的切线,则该点为切点;若求的是"过某点"的切线,则该点不一定是切点;若求的是"过曲线外一点"的切线,则该点一定不是切点.

拓展 (1)$4x-y-4=0$ (2)$2x-y-1=0$ 或 $10x-y-25=0$ [解析](1)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x)=2x$,

∴ $y'=2x$,∴ $y'|_{x=2}=4$,

∴所求切线方程为 $y-4=4(x-2)$,即 $4x-y-4=0$.

(2)设切点为 $P(x_0,y_0)$,

由(1)知,$y'=2x$,∴ $y'|_{x=x_0}=2x_0$,

又 $k_{PB}=2x_0$,∴ $\frac{5-y_0}{3-x_0}=2x_0$,

将 $y_0=x_0^2$ 代入上式解得 $x_0=1$ 或 $x_0=5$,

∴切点坐标为$(1,1)$或$(5,25)$,切线斜率为 2 或 10,

∴所求直线方程为 $2x-y-1=0$ 或 $10x-y-25=0$.

【当堂自测】

1. B [解析]由切线 $x+2y-3=0$ 的斜率 $k=-\frac{1}{2}$,知 $f'(x_0)=-\frac{1}{2}<0$.

2. B [解析] $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2ax$,设切点为$(x_0,y_0)$,则 $2ax_0=1$,

∴ $x_0=\frac{1}{2a}$.∵切点在直线 $y=x$ 上,∴ $y_0=\frac{1}{2a}$,得 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{4a}+1$,

∴ $a=\frac{1}{4}$.

3. (3,30) [解析]令 $f(x)=2x^2+4x$,设点 $P(x_0,2x_0^2+4x_0)$,则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2+4x_0\cdot\Delta x+4\Delta x}{\Delta x}=4x_0+4$,

令 $4x_0+4=16$,得 $x_0=3$,∴ $P(3,30)$.

4. 3 [解析]因为点 $M(1,f(1))$在切线上,所以 $f(1)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$,因为切点处的导数为切线斜率,所以 $f'(1)=\frac{1}{2}$,所以 $f(1)+f'(1)=3$.

1.2 导数的计算

1.2.1 几个常用函数的导数

1.2.2 基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

【预习探究】

知识点一

1. 0 2. 1 3. $2x$ 4. $-\frac{1}{x^2}$ 5. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

知识点二

1. 0 2. $\alpha x^{\alpha-1}$ 3. $\cos x$ 4. $-\sin x$ 5. $a^x\ln a$

6. e^x 7. $\frac{1}{x\ln a}$ 8. $\frac{1}{x}$

思考 (1)× (2)√ (3)×

探究 解:曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点(1,1)处切线的斜率就是导函数在该点处的函数值,因为 $y'|_{x=1}=-\frac{1}{1^2}=-1$,所以切线的斜率为$-1$,所以曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点(1,1)处的切线方程为 $y=-x+2$.

知识点三

(1)$f'(x)\pm g'(x)$ (2)$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $cf'(x)$

(3)$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

思考 (1)√ (2)√

知识点四

$y=f(g(x))$ $y_x'=y_u'\cdot u_x'$

探究 解:$y=2x\cos x$ 是由 $u=2x$ 及 $v=\cos x$ 相乘得到的;而 $y=\ln(x+2)$是由 $u=x+2(x>-2)$与 $y=\ln u$ 经过"复合"得到的,即 y 可以通过中间变量 u 表示为自变量 x 的函数.

【考点类析】

考点一

例 1 (1)D (2)±2 (3)2 或$-\frac{2}{3}$ [解析](1)因为 $f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,所以 $f'(1)=\frac{1}{2}$.

(2)$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,由 $f'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha^2}=-\frac{1}{4}$,解得 $\alpha=\pm 2$.

(3)由导数公式知,$f'(x)=4x$,$g'(x)=3x^2$.因为 $f'(x)+4=g'(x)$,所以 $4x+4=3x^2$,即 $3x^2-4x-4=0$,解得 $x=2$ 或 $x=-\frac{2}{3}$.

变式 解:∵ $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

∴ $f'(1)=1$,∴函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的导数为 1.

考点二

导入 (1)可导 (2)$f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\cdots\pm f_n'(x)$

(3)$af'(x)+bg'(x)$

例 2 解:(1)∵ $y=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$,

∴ $y'=(x^3)'-(x^2)'+x'-1'=3x^2-2x+1$.

(2)函数 $y=3^x-\lg x$ 是函数 $f(x)=3^x$ 与函数 $g(x)=\lg x$ 的差.由导数公式可分别得出 $f'(x)=3^x\ln 3$,$g'(x)=\frac{1}{x\ln 10}$,

利用函数差的求导法则可得

$y'=(3^x-\lg x)'=f'(x)-g'(x)=3^x\ln 3-\frac{1}{x\ln 10}$.

变式 解:(1)$f'(x)=(x\cdot\tan x)'=\left(\frac{x\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(x\sin x)'\cos x-x\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{(\sin x+x\cos x)\cos x+x\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x\cos x+x}{\cos^2 x}$.

(2)∵ $f(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$,

∴ $f'(x)=\left(1-\frac{2}{x+1}\right)'=\left(-\frac{2}{x+1}\right)'=-\frac{2'(x+1)-2(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.

[小结] 一般情况下，应用导数的运算法则和基本初等函数的导数公式求导数时，要尽量少用积、商的求导法则，在求导之前，可先对函数进行化简，再求导，这样可减少运算量，提高运算速度，避免出错.

考点三

导入 (1)导数值 (2)切线 曲线

例 3 解：∵$y=x^3$，∴$y'=3x^2$.

∵点 $P(2,8)$，曲线为 $y=x^3$，

∴点 P 在曲线上.

当点 P 为切点时，$y'|_{x=2}=12$，

此时切线方程为 $y-8=12(x-2)$，即 $12x-y-16=0$.

当点 P 不是切点时，设切点为 $A(x_0,y_0)$，

∵$y'=3x^2$，∴切线的斜率 $k=3x_0^2$，

∵点 A 在曲线上，∴$y_0=x_0^3$，

∴$\frac{x_0^3-8}{x_0-2}=3x_0^2$，

整理得 $x_0^3-3x_0^2+4=0$，

即 $(x_0+1)(x_0-2)^2=0$，

解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=2$(舍去)，

∴$y_0=-1$，$k=3$，

此时切线方程为 $y+1=3(x+1)$，即 $3x-y+2=0$.

∴过点 P 的曲线 $y=x^3$ 的切线方程为 $12x-y-16=0$ 或 $3x-y+2=0$.

变式 (1)B [解析] $y'=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$，故 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$，

∴曲线在点 $M\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 处的切线的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(2)解：由题意得，$f'(x)=x^2-ax+b$，∴$f'(0)=b=0$.

由切点 $P(0,f(0))$ 既在函数 $f(x)$ 的图像上又在切线 $y=1$ 上，知 $c=1$.

综上所述，$b=0$，$c=1$.

[小结] 在求切线方程的过程中，一定要注意点的位置，一类是点在曲线上，另一类是点不在曲线上，注意区分，并根据不同情况，采取不同的思路解决问题.

考点四

导入 解：(1)正确分清复合关系，选定中间变量；

(2)分步计算对应变量的导数；

(3)把中间变量代回，将导函数写为关于自变量的函数.

整个过程简记为“分解——求导——回代”，熟练后，可以省略中间过程，若遇多重复合，可多次用中间变量求导.

例 4 解：(1)原函数可看作 $y=u^4$，$u=2x-1$ 的复合函数，则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=(u^4)'\cdot(2x-1)'=4u^3\cdot 2=8(2x-1)^3$.

(2)$y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}=(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ 可看作 $y=u^{-\frac{1}{2}}$，$u=1-2x$ 的复合函数，则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)=(1-2x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$.

(3)原函数可看作 $y=\sin u$，$u=-2x+\frac{\pi}{3}$ 的复合函数，

则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=-2\cos u=-2\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(4)原函数可看作 $y=10^u$，$u=2x+3$ 的复合函数，

则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'=10^{2x+3}\times 2\times\ln 10=(\ln 100)10^{2x+3}$.

变式 解：∵$y'=e^{2x+1}\cdot(2x+1)'=2e^{2x+1}$，

∴$y'|_{x=-\frac{1}{2}}=2$，

∴曲线 $y=e^{2x+1}$ 在点 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ 处的切线方程为 $y-1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$，

即 $2x-y+2=0$.

[小结] 选择合适的中间变量是复合函数求导的关键，求导时需要逐层求导，求导后，要把中间变量代回，将导函数写为关于自变量的函数.

拓展 D [解析] 因为 $y'=\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$，所以曲线在点 $(1,0)$ 处的切线的斜率 $k=-\frac{1}{2}$，切点为 $(1,0)$，则曲线在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-1=0$. 故选 D.

【当堂自测】

1. A [解析] ∵$f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，∴$f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. D [解析] ∵$f'(x)=3ax^2+6x$，∴$f'(-1)=3a-6=4$，∴$a=\frac{10}{3}$.

3. A [解析] $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

4. 2 [解析] 由题意知 $y'|_{x=0}=ae^{ax}|_{x=0}=a=2$.

5. $\frac{1}{2}e^2$ [解析] ∵$y'=(e^x)'=e^x$，∴切线的斜率 $k=e^2$，

∴曲线在点 $(2,e^2)$ 处的切线方程为 $y-e^2=e^2(x-2)$，

即 $y=e^2x-e^2$.

当 $x=0$ 时，$y=-e^2$，当 $y=0$ 时，$x=1$.

故 $S=\frac{1}{2}\times 1\times|-e^2|=\frac{1}{2}e^2$.

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 函数的单调性与导数

【预习探究】

知识点一

1. $f'(x)>0$ $f'(x)<0$ 2. 充分不必要 充分不必要

探究 解：(1)用“,”或“和”字隔开，不能用“∪”连接.

(2)函数的单调性是对函数定义域内的某个子区间而言的，故单调区间是定义域的子集.

知识点二

(3)$f'(x)>0$ (4)$f'(x)<0$

思考 (1)× (2)√

【考点类析】

考点一

导入 解：在 $x=x_0$ 处，切线斜率为正，$f'(x_0)>0$，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近单调递增；在 $x=x_1$ 处，切线斜率为负，$f'(x_1)<0$，函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 附近单调递减.

例 1 D [解析] 依题意得，函数 $f(x)$ 不可能是周期函数，因此①不正确；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，因此函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是减函数，②正确；当 $x\in[-1,t]$ 时，若 $f(x)$ 的最大值是 2，则结合函数 $f(x)$ 的可能图像分析可知，此时 t 的最大值是 5，因此③不正确；注意到 $f(2)$ 的值不明确，结合函数 $f(x)$ 的可能图像分析可知，将函数 $f(x)$ 的图像向下平移

$a(1<a<2)$个单位后相应曲线与x轴的交点个数不确定，因此④不正确. 故选 D.

变式 C [解析] 当$0<x<1$时，$xf'(x)<0$，故$f'(x)<0$，故$y=f(x)$在区间$(0,1)$上为减函数，排除 A，B. 当$x>1$时，$xf'(x)>0$，故$f'(x)>0$，故$y=f(x)$在区间$(1,+\infty)$上为增函数，排除 D. 故选 C.

[小结] 函数$f(x)$的单调性与其导函数$f'(x)$的图像之间有密切的关系：

(1)导函数$f'(x)$的图像在x轴上方⇒函数$f(x)$单调递增；

(2)导函数$f'(x)$的图像在x轴下方⇒函数$f(x)$单调递减.

考点二

导入 增函数 减函数

例 2 解：$f'(x)=4x^2-3x-1=(4x+1)(x-1)$.

令$f'(x)>0$，得$x>1$或$x<-\frac{1}{4}$；

令$f'(x)<0$，得$-\frac{1}{4}<x<1$. 故函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$和$(1,+\infty)$，单调递减区间为$\left(-\frac{1}{4},1\right)$.

变式 解：函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=(x^2)'\cdot e^{-x}+x^2\cdot(e^{-x})'=2xe^{-x}+x^2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(2x-x^2)$.

令$f'(x)=0$，得$x_1=0$，$x_2=2$，$f'(x)$和$f(x)$随x的变化情况如下表所示：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

故$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$，单调递增区间是$(0,2)$.

[小结] 在对函数的定义域划分单调区间时，除了要找出使导数等于零的点外，还要注意在定义域内的不连续点和不可导点.

拓展 解：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}=\frac{x-m}{x^2}$.

因为$m>0$，所以当$x\in(0,m)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在区间$(0,m)$上单调递减；当$x\in(m,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在区间$(m,+\infty)$上单调递增.

考点三

导入 $f'(x)\geqslant 0$ $f'(x)\leqslant 0$

例 3 解：(1)因为$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(2)=0$，且$f'(x)=a+\frac{a}{x^2}-\frac{2}{x}$，

所以$a+\frac{a}{4}-1=0$，所以$a=\frac{4}{5}$，

所以$f'(x)=\frac{4}{5}+\frac{4}{5x^2}-\frac{2}{x}=\frac{2(2x^2-5x+2)}{5x^2}$，

由$f'(x)>0$及$x>0$，得$0<x<\frac{1}{2}$或$x>2$；

由$f'(x)<0$及$x>0$，得$\frac{1}{2}<x<2$.

所以$f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$和$(2,+\infty)$上单调递增，

在区间$\left(\frac{1}{2},2\right)$上单调递减.

(2)若$f(x)$在定义域内是增函数，

则$f'(x)\geqslant 0$对$x>0$恒成立，

因为$f'(x)=a+\frac{a}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{ax^2-2x+a}{x^2}$，

所以只需$ax^2-2x+a\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

即$a\geqslant\frac{2x}{x^2+1}$在$(0,+\infty)$上恒成立，

因为$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leqslant 1$，

当且仅当$x=1$时取等号，

所以$a\geqslant 1$，即实数a的取值范围为$[1,+\infty)$.

变式 C [解析] 根据题意可知，$y'=x^2+2bx+b+2\geqslant 0$恒成立，则$\Delta=4b^2-4(b+2)\leqslant 0$，解得$-1\leqslant b\leqslant 2$.

[小结] 利用导数解决与函数单调性有关的问题的一般步骤：

(1)确定函数的定义域.

(2)求导函数$f'(x)$.

(3)若求单调区间，只需解不等式$f'(x)>0$或$f'(x)<0$；若已知函数$f(x)$的单调性求参数，则由单调性可得$f'(x)\geqslant 0$或$f'(x)\leqslant 0$，再利用函数与方程思想求解.

拓展 解：∵$f(x)=\ln x+\frac{2a}{x}$，∴$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^2}$. ∵$f(x)$在区间$(2,+\infty)$上是增函数，∴$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^2}\geqslant 0$在区间$[2,+\infty)$上恒成立，即$a\leqslant\frac{x}{2}$在区间$[2,+\infty)$上恒成立. 令$g(x)=\frac{x}{2}$，$x\in[2,+\infty)$，∵$g(x)=\frac{x}{2}$在区间$[2,+\infty)$上是增函数，∴$g(x)_{\min}=g(2)=1$，∴$a\leqslant 1$，即实数$a$的取值范围为$(-\infty,1]$.

【当堂自测】

1. A [解析] ∵当$x\in(0,6)$时，$f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，∴函数在$(0,6)$上单调递增.
2. D [解析] 由导函数的图像可知，当$x<0$时，$f'(x)>0$，即函数$f(x)$为增函数；当$0<x<2$时，$f'(x)<0$，即函数$f(x)$为减函数；当$x>2$时，$f'(x)>0$，即函数$f(x)$为增函数. 观察选项易知 D 正确.
3. D [解析] 由导函数$f'(x)$的图像可知，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减. 由$\triangle ABC$为锐角三角形，可知$A+B>\frac{\pi}{2}$，故$0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$，所以$1>\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B>0$，则$f(\sin A)>f(\cos B)$，故选 D.
4. C [解析] 因为$f(x)=-x+b\ln(x+2)$在$(-1,+\infty)$上是减函数，

   所以$f'(x)=-1+\frac{b}{x+2}\leqslant 0$在$(-1,+\infty)$上恒成立，

   即$b\leqslant x+2$在$(-1,+\infty)$上恒成立，

   又因为在$(-1,+\infty)$上，$x+2>1$，

   所以$b\leqslant 1$. 故选 C.
5. $-\frac{3}{2}$ -6 [解析] $f'(x)=3x^2+2bx+c$. ∵$f(x)$的单调递减区间是$[-1,2]$，

   ∴-1和 2 是方程$f'(x)=0$的两个根，∴$-1+2=-\frac{2b}{3}$，$-1\times 2=\frac{c}{3}$，即$b=-\frac{3}{2}$，$c=-6$.

1.3.2 函数的极值与导数

【预习探究】

知识点一

1. 小 0 $f'(x)<0$ $f'(x)>0$ 点a $f(a)$
2. 大 $f'(x)>0$ $f'(x)<0$ 点b $f(b)$

思考 (1)× (2)× (3)√ (4)× (5)√

知识点二

(1)$f'(x)$ (3)左正右负 左负右正 左右符号相同

探究 1 [解析] 由图可知,在区间(a,x_1),$(x_2,0)$,$(0,x_3)$内$f'(x)>0$;在区间(x_1,x_2),(x_3,b)内$f'(x)<0$.故$f(x)$在(a,x_1)内单调递增,在(x_1,x_2)内单调递减,在(x_2,x_3)内单调递增,在(x_3,b)内单调递减,所以函数$f(x)$在(a,b)内只有1个极小值点,极小值点为$x=x_2$.

【考点类析】

考点一

导入 (1)极大值 (2)极小值

例 1 解:函数$f(x)=\frac{3}{x}+3\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x}=\frac{3(x-1)}{x^2}$.

令$f'(x)=0$,得$x=1$.

当x变化时,$f'(x)$与$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

因此,当$x=1$时,$f(x)$有极小值$f(1)=3$.

变式 解:$f'(x)=[x^2+(a+2)x-2a^2+4a]e^x$.

令$f'(x)=0$,解得$x=-2a$或$x=a-2$,由$a\neq\frac{2}{3}$知$-2a\neq a-2$.

分以下两种情况讨论:

①若$a>\frac{2}{3}$,则$-2a<a-2$.

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-2a)$	$-2a$	$(-2a,a-2)$	$a-2$	$(a-2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$在$(-\infty,-2a)$,$(a-2,+\infty)$上是增函数,在$(-2a,a-2)$上是减函数,函数$f(x)$在$x=-2a$处取得极大值$f(-2a)$,且$f(-2a)=3ae^{-2a}$,函数$f(x)$在$x=a-2$处取得极小值$f(a-2)$,且$f(a-2)=(4-3a)e^{a-2}$.

②若$a<\frac{2}{3}$,则$-2a>a-2$.

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,a-2)$	$a-2$	$(a-2,-2a)$	$-2a$	$(-2a,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$在$(-\infty,a-2)$,$(-2a,+\infty)$上是增函数,在$(a-2,-2a)$上是减函数,函数$f(x)$在$x=a-2$处取得极大值$f(a-2)$,且$f(a-2)=(4-3a)e^{a-2}$,函数$f(x)$在$x=-2a$处取得极小值$f(-2a)$,且$f(-2a)=3ae^{-2a}$.

[小结] 求函数极值的步骤:

(1)求导数,令$f'(x)=0$,求方程的根;

(2)列表,并判断极大值点和极小值点;

(3)求极值.

拓展 D [解析] 令$f'(x)=x'\cdot e^x+(e^x)'\cdot x=e^x+e^x\cdot x=e^x(x+1)=0$,得$x=-1$.当$x<-1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在区间$(-\infty,-1)$上单调递减;当$x>-1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在区间$(-1,+\infty)$上单调递增.故$x=-1$为$f(x)$的极小值点.

考点二

导入 解:若x_0是极值点,则$f'(x_0)=0$;反之,若$f'(x_0)=0$,则x_0不一定是极值点.

例 2 解:因为$f(x)=ax^5-bx^3+c$,

所以$f'(x)=5ax^4-3bx^2=x^2(5ax^2-3b)$.

根据题意,$x=\pm1$是$f'(x)=0$的根,

故$5a=3b$,

所以$f'(x)=5ax^2(x^2-1)$,$a>0$.

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘		↘	极小值	↗

由上表及题意可得$4=f(-1)=-a+b+c$①,$0=f(1)=a-b+c$②,

由①+②得$c=2$,

由①-②得$b=a+2$,

又$5a=3b$,所以$a=3$,$b=5$,$c=2$.

变式 解:∵$f'(x)=5x^4+3ax^2+b$且$x=\pm1$是极值点,

∴$5+3a+b=0$,∴$b=-5-3a$,

则$f'(x)=5x^4+3ax^2-5-3a=(5x^2+5+3a)(x-1)(x+1)$,

∵$f(x)$的极值点仅有$x=\pm1$,∴$5+3a\geqslant0$且$x=-1$为极大值点,$x=1$为极小值点,

故$\begin{cases}5+3a\geqslant0,\\f(-1)-f(1)=4,\\5+3a+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$

[小结] 导函数的零点并不一定是原函数的极值点,但在函数的极值点处,其导函数的值一定为零,所以在求出导函数的零点后一定要注意分析这个零点是不是函数的极值点.

拓展 $(0,1)$ [解析] $f'(x)=3x^2-3b=3(x^2-b)$.因为函数$f(x)$在区间$(0,1)$内有极值,所以$3(x^2-b)=0$在区间$(0,1)$内有解,所以$0<\sqrt{b}<1$,即$0<b<1$.

考点三

导入 解:对于方程$f(x)=m$,研究其解的个数时,常先利用导数求出函数$f(x)$的单调性、极值,再画出函数图像,将方程的解的个数问题转化为函数$y=f(x)$的图像与直线$y=m$的交点个数问题,数形结合求解.

例 3 解:由题知,$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$.

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)_{极小值}=f(2)=-12$,$f(x)_{极大值}=f(-2)=20$.

又因为$f(x)$的定义域是$\mathbf{R}$,画出函数图像(图略),所以当$m>20$或$m<-12$时,方程$f(x)=m$有一个解;当$m=20$或$m=-12$时,方程$f(x)=m$有两个解;当$-12<m<20$时,方程$f(x)=m$有三个解.

变式 解:(1)$f'(x)=3x^2-6$,令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=-\sqrt{2}$,$x_2=\sqrt{2}$.

当 $x>\sqrt{2}$ 或 $x<-\sqrt{2}$ 时,$f'(x)>0$;

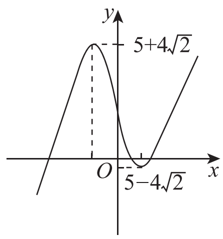
当 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时,$f'(x)<0$.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2},+\infty)$;单调递减区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时,$f(x)$ 有极大值 $5+4\sqrt{2}$;

当 $x=\sqrt{2}$ 时,$f(x)$ 有极小值 $5-4\sqrt{2}$.

(2)由(1)的分析知 $y=f(x)$ 的大致图像如图所示.



故当 $5-4\sqrt{2}<a<5+4\sqrt{2}$ 时,直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图像有三个不同的交点,即方程 $f(x)=a$ 有三个不同的实根.

[小结] 函数的极值是对函数在某一点附近的小区间而言的,是一个局部概念,在函数的整个定义域内可能有多个极值,也可能无极值,且极小值未必小于极大值.

拓展 解:$f(x)=2x^3-6x+k$,则 $f'(x)=6x^2-6$,

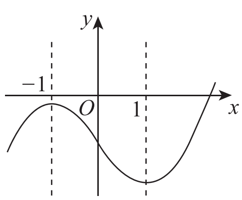
令 $f'(x)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=1$,可知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是减函数,

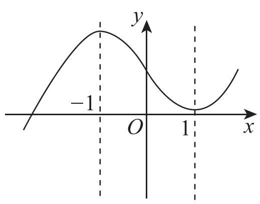
在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是增函数.

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=4+k$,极小值为 $f(1)=-4+k$.

要使函数 $f(x)$ 只有一个零点,则只需 $4+k<0$ 或 $-4+k>0$(如图所示),

即 $k<-4$ 或 $k>4$,所以实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$.





【当堂自测】

1. B [解析] 充分性不成立,例如 $f(x)=x^3$,$f'(x)=3x^2$,$f'(0)=0$,不能推出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值;反之成立.故选 B.

2. D [解析] $y'=3ax^2+2bx$,由题意知,0 和 $\frac{1}{3}$ 是方程 $3ax^2+2bx=0$ 的两个根,$\therefore 0+\frac{1}{3}=-\frac{2b}{3a}$,即 $a+2b=0$.

3. C [解析] 由导函数 $f'(x)$ 的图像易知 $f(x)$ 有两个极大值点,两个极小值点.

4. $-2<a<2$ [解析] $f'(x)=3x^2-3$.令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-1$.$\because f(1)=-2$,$f(-1)=2$,结合图像可知 $-2<a<2$.

1.3.3 函数的最大(小)值与导数

【预习探究】

知识点一

1. 一条连续不断的曲线 2. $\geqslant$ $\leqslant$

思考 解:函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值是 $f(a)$,最小值是 $f(x_3)$.若区间改为 (a,b),则 $f(x)$ 有最小值 $f(x_3)$,无最大值.

知识点二

(1)极值 (2)$f(a)$,$f(b)$

探究 $[0,e]$ [解析] 因为 $f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上是减函数,在区间 $(0,1)$ 上是增函数,所以当 $x=0$ 时,$f(x)$ 取得最小值 0,又 $f(-1)=e$,$f(1)=\frac{1}{e}$,显然 $f(x)$ 的最大值为 e,

所以 $f(x)$ 的值域为 $[0,e]$.

【考点类析】

考点一

导入 解:最大值唯一,最大值点不唯一.

例 1 解:(1)$f'(x)=3ax^2+2bx-2$,由题意知

$$\begin{cases}f(-2)=6,\\f'(-2)=0,\\f'(1)=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=\frac{1}{2},\\c=\frac{8}{3}.\end{cases}$$

(2)由(1)得,$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{8}{3}$,$f'(x)=x^2+x-2$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=-2$.

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,3)$	3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\frac{25}{6}$	↗	6	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$\frac{61}{6}$

由上表知,当 $x=3$ 时,$f(x)_{max}=\frac{61}{6}$,当 $x=1$ 时,$f(x)_{min}=\frac{3}{2}$.

变式 解:(1)$f'(x)=6x^2-12=6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{2}$.

当 x 变化时,$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-2,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},3)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为 $f(-2)=8$,$f(3)=18$,$f(\sqrt{2})=-8\sqrt{2}$,$f(-\sqrt{2})=8\sqrt{2}$,

所以当 $x=\sqrt{2}$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $-8\sqrt{2}$;当 $x=3$ 时,$f(x)$ 取得最大值 18.

(2)$f'(x)=\frac{1}{2}+\cos x$,$x\in[0,2\pi]$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{2}{3}\pi$ 或 $x=\frac{4}{3}\pi$.

因为 $f(0)=0$,$f(2\pi)=\pi$,$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$,$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以当 $x=0$ 时,$f(x)$ 有最小值 $f(0)=0$,

当 $x=2\pi$ 时,$f(x)$ 有最大值 $f(2\pi)=\pi$.

[小结] 求函数的最值时,不可想当然地认为极值点就是最值点,要将极大(小)值点与端点处的函数值进行比较.

拓展 A [解析] $f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$,由题意知,在区间 $[-2,2]$ 上,$x=0$ 是 $f(x)$ 的最大值点,$\therefore f(x)_{max}=f(0)=m=3$.$\because f(-2)=-16-24+3=-37$,$f(2)=16-$

$24+3=-5$，∴ $f(x)_{\min}=-37$.

考点二

导入 **解**：(1)证明不等式：可以通过构造函数将不等式问题等价转化为函数最值问题，如要证明不等式 $f(x)>g(x)$ 成立，可以构造函数 $h(x)=f(x)-g(x)$，由 $h'(x)$ 判断 $h(x)$ 的单调性，确定 $h(x)$ 的最小值，从而证明结论.

(2)含参数不等式的恒成立问题：分离变量，通过构造函数将问题等价转化为求函数的最值问题，然后利用导数求函数最值.

例2 **解**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(1) $k=-2$ 时，$f(x)=\ln x-2x$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

故函数 $f(x)$ 有唯一的极大值点 $x=\frac{1}{2}$，无极小值点.

(2) $k=0$ 时，$f(x)+\frac{b}{x}-a=\ln x+\frac{b}{x}-a$，

设 $g(x)=\ln x+\frac{b}{x}-a\ (x>0)$，

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{b}{x^2}=\frac{x-b}{x^2}$.

当 $b\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$，与题意矛盾，故舍去.

当 $b>0$ 时，$g'(x)>0\Rightarrow x>b$，所以 $g(x)$ 在 $(b,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,b)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\min}=g(b)=\ln b+1-a$，因为 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $\ln b+1-a\geqslant 0\Rightarrow a-1\leqslant \ln b\Rightarrow e^{a-1}\leqslant b\Rightarrow e^{a-1}-b+1\leqslant 1$，

故 $e^{a-1}-b+1$ 的最大值为1.

变式 **解**：(1)当 $a=\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{4}x^2-x$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}x-1=\frac{x(x-1)}{2(x+1)}\ (x>-1)$.

令 $f'(x)>0$，得 $-1<x<0$ 或 $x>1$；

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

$f(x)$ 的极大值为 $f(0)=0$，极小值为 $f(1)=\ln 2-\frac{3}{4}$.

(2)由题意得 $f'(x)=\frac{x[2ax-(1-2a)]}{x+1}\ (x>-1)$，

当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时，不存在实数 $b\in(1,2)$，使得当 $x\in(-1,b]$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(b)$.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=\frac{1}{2a}-1$.

①当 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，显然符合题意.

②当 $\frac{1}{2a}-1>0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(0,\frac{1}{2a}-1\right)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)=0$，

要使对任意实数 $b\in(1,2)$，当 $x\in(-1,b]$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(b)$，

只需 $f(1)\geqslant 0$，解得 $a\geqslant 1-\ln 2$，又 $0<a<\frac{1}{2}$，

所以此时实数 a 的取值范围是 $1-\ln 2\leqslant a<\frac{1}{2}$.

③当 $\frac{1}{2a}-1<0$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{2a}-1\right)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{1}{2a}-1,0\right)$ 上单调递减，要使对任意实数 $b\in(1,2)$，当 $x\in(-1,b]$ 时，

函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(b)$，只需 $f\left(\frac{1}{2a}-1\right)\leqslant f(1)$，

可得 $\ln 2a+\frac{1}{4a}+\ln 2-1\geqslant 0$，

令 $g(a)=\ln 2a+\frac{1}{4a}+\ln 2-1\ \left(a>\frac{1}{2}\right)$，因为 $g'(a)=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{4a}\right)>0$ 恒成立，故 $g(a)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $g(a)>g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，

所以当 $a>\frac{1}{2}$ 时，满足题意.

综上，实数 a 的取值范围是 $[1-\ln 2,+\infty)$.

[小结] (1)含参数不等式的恒成立问题的本质是函数的最值问题，适当借助图像可使解题思路更为清晰.

(2)"$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续"是"$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有最大值与最小值"的充分不必要条件.

(3)在区间 $[a,b]$ 上连续的函数一定有最值，在区间 (a,b) 内可导的函数不一定有最值，若有唯一的极值，则此极值必是函数的最值.

拓展 **解**：(1) $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$.

当 $x\in[0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2,3]$ 时，$f'(x)>0$.

故当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取极大值 $f(1)=5+8c$.

又 $f(3)=9+8c>f(1)$，∴当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(3)=9+8c$.

∵对任意 $x\in[0,3]$，都有 $f(x)<c^2$ 成立，∴ $9+8c<c^2$，即 $c<-1$ 或 $c>9$，

∴ c 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$.

(2)由(1)知 $f(x)<f(3)=9+8c$，∴ $9+8c\leqslant c^2$，即 $c\leqslant -1$ 或 $c\geqslant 9$，

∴ c 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$.

【当堂自测】

1. D [解析] 由函数的最值与极值的概念可知，$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值一定大于极小值.
2. C [解析] $f'(x)=3x^2-3$. 因为 $-1<x<1$，所以 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，故函数 $f(x)$ 既没有最大值，也没有最小值.
3. C [解析] $y'=1-\cos x$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$y'>0$，则函数在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上为增函数，所以 y 的最大值 $y_{\max}=\pi-\sin\pi=\pi$，故选C.
4. 5 [解析] $y'=3x^2-6x-9\ (-2<x<2)$，令 $y'=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$(舍去). 当 $-2<x<-1$ 时，$y'>0$；当 $-1<x<2$

时，$y'<0$. 故当 $x=-1$ 时，y 取得极大值，也是最大值，且 $y_{\max}=5$.

5. -71 ［解析］$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$.

由 $f'(x)=0$，得 $x=3$ 或 $x=-1$.

∵ $f(-4)=k-76$，$f(3)=k-27$，

$f(-1)=k+5$，$f(4)=k-20$，

∴ $f(x)_{\max}=k+5=10$，得 $k=5$，

∴ $f(x)_{\min}=k-76=-71$.

本章总结提升

【单元回眸】

知识辨析

1. √　2. √　3. ×　4. ×　5. ×

【整合创新】

题型一

例 1　$f'(x)=3x^2-3a$，∵曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处与直线 $y=8$ 相切，

∴ $\begin{cases}f'(2)=0,\\f(2)=8,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3(4-a)=0,\\8-6a+b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=24.\end{cases}$

变式　$y=2x$　［解析］因为 $y'=\dfrac{2}{x+1}$，所以曲线在点 $(0,0)$ 处的切线斜率为 2，则切线方程为 $y=2x$.

题型二

例 2　**解**：(1) $f'(x)=(x-2)e^x$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x>2$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<2$，又 $x\in(0,+\infty)$，

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,2)$.

(2) 函数 $f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

由 $f'(x)=3x^2-4ax+a^2=0$，得 $x_1=\dfrac{a}{3}$，$x_2=a$.

①当 $a>0$ 时，$x_1<x_2$，

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)$，$(a,+\infty)$，

单调递减区间为 $\left(\dfrac{a}{3},a\right)$.

②当 $a<0$ 时，$x_1>x_2$，

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,a)$，$\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$，

单调递减区间为 $\left(a,\dfrac{a}{3}\right)$.

③当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geqslant0$，∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增的.

综上，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)$，$(a,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{a}{3},a\right)$；

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,a)$，$\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(a,\dfrac{a}{3}\right)$；

当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,+\infty)$.

变式　**解**：由题意得 $x>0$，$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{a}{x^2}$，

由函数 $f(x)$ 在定义域上是增函数得，当 $x>0$ 时，

$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，即 $a\geqslant2x-x^2=-(x-1)^2+1\ (x>0)$ 恒成立，

又因为 $-(x-1)^2+1\leqslant1$（当 $x=1$ 时取等号），

所以实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

题型三

例 3　**解**：(1) $f'(x)=6x^2+6ax+3b$.

因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处取得极值，

所以有 $f'(1)=0$，$f'(2)=0$，

则有 $\begin{cases}6+6a+3b=0,\\24+12a+3b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

(2) 由(1)可知，$f(x)=2x^3-9x^2+12x+8c$，

则 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(2,3)$ 时，$f'(x)>0$.

所以，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(1)=5+8c$.

又 $f(0)=8c$，$f(3)=9+8c$，

所以当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(3)=9+8c$.

因为对于任意的 $x\in[0,3]$，都有 $f(x)<c^2$ 成立，

所以 $9+8c<c^2$，解得 $c<-1$ 或 $c>9$，因此 c 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$.

变式　**解**：(1) 因为 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$，

所以 $f'(x)=[2ax-(4a+1)]e^x+[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x$，

$f'(1)=(1-a)e$.

由题设知 $f'(1)=0$，即 $(1-a)e=0$，解得 $a=1$，

此时 $f(1)=3e\neq0$，

所以 a 的值为 1.

(2) 由(1)得 $f'(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x=(ax-1)(x-2)e^x$.

若 $a>\dfrac{1}{2}$，则当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},2\right)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值.

若 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则当 $x\in(0,2)$ 时，$x-2<0$，$ax-1\leqslant\dfrac{1}{2}x-1<0$，

所以 $f'(x)>0$，

所以 2 不是 $f(x)$ 的极小值点.

综上可知，a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

题型四

例 4　**解**：(1) $f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$.

当 $a<0$ 时，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f'(x)>0$，

所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $x<-\sqrt{a}$ 或 $x>\sqrt{a}$，由 $f'(x)<0$，解得 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\sqrt{a})$，$(\sqrt{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(-\sqrt{a},\sqrt{a})$.

(2) 因为 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，

所以 $f'(-1)=3\times(-1)^2-3a=0$，所以 $a=1$，

所以 $f(x)=x^3-3x-1$，$f'(x)=3x^2-3$.

由 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

由(1)中 $f(x)$ 的单调性可知，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=1$，在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-3$.

因为直线 $y=m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像有三个不同的交点，

所以结合 $f(x)$ 的单调性可知，m 的取值范围是 $(-3,1)$.

变式　D　［解析］由导函数 $y=f'(x)$ 的图像可知，$y=f'(x)$ 在 x 轴的负半轴上有一个零点（不妨设为 x_1），并且当 $x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，$y=f'(x)$ 在 x 轴的正半轴上有两个零点（从左

到右依次设为 x_2,x_3),且当$x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)>0$,当 $x\in(x_2,x_3)$时,$f'(x)<0$,当$x>x_3$ 时,$f'(x)>0$. 因此函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极小值,在 $x=x_2$ 处取得极大值,在 $x=x_3$ 处取得极小值. 由此对照四个选项中的图像,选项 A 中,在 $x=x_1$ 处取得极大值,不符合题意;选项 B 中,极大值点小于 0,也不符合题意;选项 C 中,在 $x=x_1$ 处取得极大值,不符合题意;选项 D 符合题意. 因此选 D.

第二章　推理与证明

2.1　直接证明与间接证明

2.1.1　综合法和分析法

【预习探究】

知识点一

1. 已知条件　定义　公理　定理　推理论证

讨论　解:因为综合法的每一步推理都是严密的逻辑推理,因此所得到的每一个结论都是正确的,不同于合情推理中的“猜想”,所以综合法是演绎推理.

知识点二

1. 结论　充分条件　已知条件　定理　定义　公理

思考　解:从结论出发开始证明,寻找使结论成立的充分条件,最终把要证明的结论变成一个显然成立的条件.

【考点类析】

考点一

导入　解:(1)右边是 a,b,c 三个数的乘积的 4 倍,左边是两项之和,其中每一项都是一个数与另两个数的平方和之积.

(2)因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc$,$c^2+a^2\geqslant 2ac$,所以 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)\geqslant 4abc$.

例 1　证明:$\because a,b,c$ 互不相等,$\therefore a^4+b^4>2a^2b^2$,$b^4+c^4>2b^2c^2$,$c^4+a^4>2a^2c^2$,$\therefore a^4+b^4+c^4>a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

$\because a^2+b^2>2ab$,$\therefore a^2c^2+b^2c^2>2abc^2$.

同理,$a^2b^2+a^2c^2>2a^2bc$,$b^2c^2+b^2a^2>2ab^2c$,$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>abc^2+a^2bc+ab^2c=abc(a+b+c)$,$\therefore a^4+b^4+c^4>abc(a+b+c)$.

变式　A　[解析] $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a+b}{b}=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+1\geqslant 2+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=4$,当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$时,等号成立.

[小结] 用综合法证明不等式,证明步骤严谨、条理清晰、形式简捷. 综合法证明问题的一般步骤:第一步,分析条件,选择方向;第二步,转化条件,组织过程;第三步,回顾反思,适当调整.

拓展　解:(1)$\because a=b=c$,$a+b+c=1$,

$\therefore a=b=c=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)=8$.

(2)证明:$\because a+b+c=1$,

$\therefore$左式$=\left(\dfrac{a+b+c}{a}-1\right)\left(\dfrac{a+b+c}{b}-1\right)\left(\dfrac{a+b+c}{c}-1\right)$

$=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}\right)\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)$

$=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}+2$

$=\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)+2$.

$\because a,b,c\in(0,+\infty)$,

$\therefore\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$,$\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geqslant 2$,$\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\geqslant 2$,

$\therefore\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}\right)+2\geqslant 8$,

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$时,等号成立.

考点二

导入　解:(1)$|ab|\geqslant ab$.

(2)充分条件.

例 2　证明:要证 $\log_x\dfrac{a+b}{2}+\log_x\dfrac{b+c}{2}+\log_x\dfrac{a+c}{2}<\log_x a+\log_x b+\log_x c$,

只需证 $\log_x\left(\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{a+c}{2}\right)<\log_x(abc)$.

$\because 0<x<1$,

$\therefore$只需证$\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{a+c}{2}>abc$.

由公式得$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$,$\dfrac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}$,$\dfrac{a+c}{2}\geqslant\sqrt{ac}$.

又$\because a,b,c$ 是不全相等的正数,

$\therefore\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{a+c}{2}>\sqrt{a^2b^2c^2}=abc$,

即$\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{b+c}{2}\cdot\dfrac{a+c}{2}>abc$ 成立.

$\therefore\log_x\dfrac{a+b}{2}+\log_x\dfrac{b+c}{2}+\log_x\dfrac{a+c}{2}<\log_x a+\log_x b+\log_x c$ 成立.

变式　证明:当 $a+b\leqslant 0$ 时,$\because\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$,

$\therefore\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$成立.

当 $a+b>0$ 时,用分析法证明如下:

要证 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$,

只需证$(\sqrt{a^2+b^2})^2\geqslant\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\right]^2$,

即证 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+2ab)$,即证 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$ 对一切实数恒成立,$\therefore\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$成立.

综上,a,b 为实数时,$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$恒成立.

[小结] 当已知条件和结论联系不够明显、直接,证明中需要用哪些知识不太明确、具体时,往往采用分析法.

考点三

导入　综合法　分析法

例 3　证明:要证$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$,

即证$\dfrac{a+b+c}{a+b}+\dfrac{a+b+c}{b+c}=3$,即证$\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+c}=1$,

即证 $c(b+c)+a(a+b)=(a+b)(b+c)$,

即证 $c^2+a^2=ac+b^2$.

$\because\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 成等差数列,

$\therefore B=60°$.

根据余弦定理,有 $b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos 60°$,

即 $b^2=c^2+a^2-ac$,