教与学整体设计

全品学练考

导学案

LEARN PRACTISE TEST

高中数学

选修2-3 新高考（RJA）

主编：肖德好

黄河出版传媒集团
阳光出版社

Contents

目录 | 导学案

新课学案·接力教材

导学案
DAO XUE AN

第一章 计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的概念

预习探究 梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 分类加法计数原理

定义：完成一件事有________不同的方案，在第一类方案中有________种不同的方法，在第二类方案中有________种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

[思考] (1)在分类加法计数原理中，两类不同方案中的方法可以相同吗？

(2)同学甲有不同的语文参考书5本，不同的数学参考书6本.现在同学乙想向甲借其中的任意一本书，此问题怎么解决，有多少种不同的借法？

▶ 知识点二 分步乘法计数原理

定义：完成一件事需要________步骤，做第一步有________种不同的方法，做第二步有________种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=$________种不同的方法.

[思考] 同学甲有不同的语文参考书5本，不同的数学参考书6本.现在同学乙想向甲借语文、数学参考书各一本，此问题怎么解决，有多少种不同的借法？

考点类析 考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 分类加法计数原理的应用

例1 (1)满足 $a,b\in\{-1,0,1,2\}$，且关于 x 的方程 $ax^2+2x+b=0$有实数解的有序数对(a,b)的个数为 ( )

A. 14 B. 13 C. 12 D. 10

(2)某一数学问题可用综合法和分析法两种方法证明，有7名同学只会用综合法证明，有5名同学只会用分析法证明，现任选1名同学证明这个问题，不同的选法种数为________.

(3)一个科技小组有3名男同学，5名女同学，从中任选1名同学参加学科竞赛，不同的选派方法共有________种.

▶ 考点二 分步乘法计数原理的应用

例2 (1)在平面直角坐标系内，若点 $P(x,y)$的横、纵坐标均在$\{0,1,2,3\}$内取值，则不同的点 P 有________个.

(2)人们习惯把最后一位是6的多位数叫作“吉祥数”，则无重复数字的四位吉祥数（首位不能是零）共有________个.

(3)用1,3,5,7,9五个数字中的三个替换直线方程 $Ax+By+C=0$ 中的 A,B,C，若 A,B,C 的值互不相同，则不同的直线共有________条.

(4)有5列火车停在某车站并排的5条轨道上，若火车 A 不能停在第1条轨道上，则5列火车的停车方法共有________种.

▶ 考点三 两个原理的综合应用

[导入] (1)对事件进行分解时，怎样区分是分类，还是分步？

(2)怎样分类、分步，才能做到不重不漏？

例3 现有高一年级的四个班的学生34人，其中一、二、三、四班各7人、8人、9人、10人，他们自愿组成数学课外小组.

(1)从中选1人为负责人，有多少种不同的选法？

(2)每班选1名组长，有多少种不同的选法？

(3)从中推选2人做发言，这2人需来自不同的班级，有多少种不同的选法？

【变式】集合 $A=\{1,2,-3\}$，$B=\{-1,-2,3,4\}$，从 A，B 中各取 1 个元素，作为点 $P(x,y)$ 的坐标.

(1)可以得到多少个不同的点？

(2)这些点中，位于第一象限的有几个？

拓展 某外语组有 9 人，每人至少会英语和日语中的一门，其中 7 人会英语，3 人会日语，从中选出会英语和会日语的各 1 人到边远地区支教，有多少种不同的选法？

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 从 A 地到 B 地，可乘汽车、火车、轮船三种交通工具，如果一天内汽车发 3 次，火车发 4 次，轮船发 2 次，那么一天内从 A 地到 B 地的不同走法数为 (　　)

A. $1+1+1=3$　　B. $3+4+2=9$

C. $3\times4\times2=24$　　D. 以上都不对

2. 已知 $x\in\{2,3,7\}$，$y\in\{-31,-24,4\}$，则 xy 的不同值的个数是 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

3. 某公司员工义务献血，在体检合格的人中，O 型血的有 10 人，A 型血的有 5 人，B 型血的有 8 人，AB 型血的有 3 人. 从 4 种血型的人中各选 1 人去献血，不同的选法种数为 (　　)

A. 1200　　B. 600　　C. 300　　D. 26

4. 现有 3 名老师、8 名男学生和 5 名女学生共 16 人. 若需 1 名老师和 1 名学生参加评选会议，则不同的选法种数为 (　　)

A. 39　　B. 24　　C. 15　　D. 16

5. 如果 $x,y\in\mathbf{N}$，且 $1\leqslant x\leqslant3$，$x+y<7$，则满足条件的不同的有序自然数对 (x,y) 的个数是 (　　)

A. 15　　B. 12　　C. 5　　D. 4

第 2 课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理的运用

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点　两个计数原理的联系与区别

	分类加法计数原理	分步乘法计数原理
联系	都是解决求完成一件事不同的________问题，都是对复杂事件的________	
区别	针对的是分类问题	针对的是分步问题
	各类方法相互独立	各个步骤中的方法相互依存
	任何一类方法________这件事	各个步骤都完成________这件事
	可利用“________”电路来理解	可利用“________”电路来理解

[思考] 以下是对两个计数原理的理解，判断是否正确？

(1)在分类加法计数原理中，两类不同方案中的方法可以相同. (　　)

(2)在分类加法计数原理中，每类方案中的方法都能直接完成这件事. (　　)

(3)在分步乘法计数原理中，完成每个步骤的方法是各不相同的. (　　)

(4)在分步乘法计数原理中，事情是分两步完成的，其中任何一个单独的步骤都能完成这件事. (　　)

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　运用两个原理解决含有限制条件的实际问题

[导入] 如何判断一个计数问题是用分步计数原理还是分类计数原理？

例1 (1)若 $x,y\in\mathbf{N}^*$，且 $x+y\leqslant 6$，则有序自然数对(x,y)的个数为 ( )

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 15

(2)已知函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a,b,c\in\{0,1,2,3,4\}$，则不同的二次函数的个数为________.

【变式】若一系列函数的解析式相同，值域相同，但其定义域不同，则称这些函数为“同族函数”，那么函数解析式为 $y=x^2$，值域为$\{1,4\}$的“同族函数”共有 ( )

A. 7个　　B. 8个

C. 9个　　D. 10个

拓展 如图1-1-1所示，在连接正八边形的三个顶点而成的三角形中，与正八边形有公共边的三角形有________个.

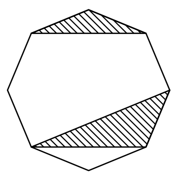


图1-1-1

▶ 考点二　占位模型中标准的选择

[导入] 在占位模型中有两类对象：元素与位置. 解题时怎样选择按元素还是按位置进行分解？

例2 将3颗相同的红色小球和2颗相同的黑色小球装入四个不同的盒子，每个盒子至少1颗，则不同的分装方案种数为 ( )

A. 40　　B. 28　　C. 24　　D. 20

【变式】如果一个三位正整数如“$a_1a_2a_3$”，满足 $a_1<a_2$，且 $a_2>a_3$，则称这样的三位数为凸数(如120,343,275等)，那么所有凸数的个数为 ( )

A. 240　　B. 204

C. 729　　D. 920

拓展 有三个体育运动项目，每个项目均设冠军和亚军各一名奖项.

(1)学生甲参加了这三个运动项目，但只获得一个奖项，则学生甲获奖的不同情况共有多少种？

(2)有4名学生参加了这三个运动项目，若一个学生可以获得多个运动项目的冠军，则各项目冠军获得者的不同情况有多少种？

▶ 考点三　涂色问题

[导入] (1)涂色问题中的基本要求是什么？

(2)怎样解决涂色问题中的计数方法？

例3 如图1-1-2所示，有 A,B,C,D 四个区域，用红、黄、蓝三种颜色涂色，要求任意两个相邻区域的颜色各不相同，共有________种不同的涂法.

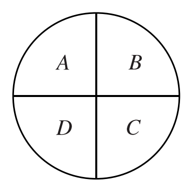


图1-1-2

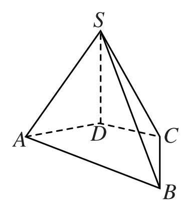
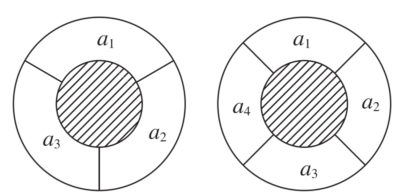


图1-1-3

【变式】(1)给出一个正五棱柱，用3种颜色给其10个顶点染色，要求各侧棱的两个端点不同色，则有________种染色方案.

(2)如图1-1-3所示，将一个四棱锥的每一个顶点染上一种颜色，并使同一条棱上的两个端点异色，如果只有5种颜色可供使用，则不同染色方法的总数为________.

拓展 一个同心圆形花坛，分为两部分，中间小圆部分种植草坪和绿色灌木，周围的圆环分为 $n(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$ 等份种植红、黄、蓝三色不同的花，要求相邻两部分种植不同颜色的花.



①　　②

图1-1-4

(1)如图 1-1-4①,圆环分成 3 等份,分别为 a_1,a_2,a_3,则有多少种不同的种植方法?

(2)如图②,圆环分成 4 等份,分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,则有多少种不同的种植方法?

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有　(　　)

A. 50 个　B. 45 个　C. 36 个　D. 35 个

2. 某市汽车牌照号码可以上网自编,但规定从左数第 2 个号码只能从字母 B,C,D 中选择,其他四个号码可以从 0～9 这 10 个数字中选择(数字可以重复). 若某车主第 1 个号码(从左到右)只想在数字 3,5,6,8,9 中选择,其他号码只想在 1,3,6,9 中选择,则他可选的车牌号码的所有可能情况有　(　　)

A. 180 种　B. 360 种

C. 720 种　D. 960 种

3. 给图 1-1-5 中的 A,B,C,D 四个区域染色,每块区域染一种颜色,有公共边的区域不同色,现有红、黄、蓝、绿四种颜色可供选择,则不同的染色方法共有　(　　)

A	B
C	D

图 1-1-5

A. 24 种　B. 84 种

C. 36 种　D. 48 种

4. 用 0,1,2,3,…,9 这十个数字可以组成________个不同的三位数,可以组成________个无重复数字的三位数.

1.2　排列与组合

1.2.1　排列

第 1 课时　排列的概念及排列数公式

预习探究

梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　排列及其特征

1. 排列:一般地,从________个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照__________排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 由排列的定义可知,排列与元素的________有关,也就是说与位置有关的问题才能归结为排列问题.

[思考] (1)同一个排列中,同一个元素能重复出现吗?

(2)定义中的"按一定顺序"怎么理解?

[探究] 从甲、乙、丙三位同学中选出两人担任正、副班长,有多少种不同的选法?与顺序有关吗?

▶ 知识点二　排列数与排列数公式

1. 排列数:从________个不同元素中取出________$(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同排列的个数,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号________表示.

[思考] "排列"和"排列数"有什么区别?

2. 排列数公式:$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$,其中 $n,m\in\mathbf{N}^*$,且 $m\leqslant n$.

3. 全排列:n 个不同元素全部取出的一个排列,叫作 n 个元素的一个全排列. 这时公式中 $m=n$,即 $\mathrm{A}_n^n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$.

4. 阶乘:正整数 1 到 n 的连乘积,叫作 n 的阶乘,用 $n!$ 表示.所以 n 个不同元素的全排列数公式可以写成 $A_n^n=n!$.另外,我们规定 $0!=1$.因此排列数公式还可以写成 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$.

[探究] 已知从 3 个不同元素中取出 2 个元素的排列数,记为 A_3^2,算得 $A_3^2=3\times2=6$;从 4 个不同元素中取出 3 个元素的排列数,记为 A_4^3,算得 $A_4^3=4\times3\times2=24$;则从 n 个不同元素中取出 2 个元素的排列数 A_n^2 是多少? A_n^3 呢? A_n^m 呢?

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　排列的概念

例1 (1)下列问题属于排列问题的是 (　　)

①从 10 个人中选 2 人分别去种树和扫地;

②从 10 个人中选 2 人去扫地;

③从班上 30 名男生中选出 5 名组成一个篮球队;

④从数字 5,6,7,8 中任取两个不同的数作 $\log_a b$ 中的底数与真数.

A. ①④　　B. ①②　　C. ④　　D. ①③④

(2)下列问题是排列问题吗?说明理由.

①会场有 50 个座位,求选出 3 个座位有多少种方法?若选出 3 个座位安排三位客人,又有多少种方法?

②从集合 $M=\{1,2,\cdots,9\}$ 中任取两个元素作为 a,b,可以得到多少个焦点在 x 轴上的椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?可以得到多少个焦点在 x 轴上的双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?

▶ 考点二　排列数公式的计算

例2 (1)不等式 $A_8^x<6A_8^{x-2}$ 的解集为 (　　)

A. $[2,8]$　　B. $[2,6]$

C. $(7,12)$　　D. $\{8\}$

(2)计算:$A_{15}^3=$________.

(3)化简:$1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+n\times n!=$____________.

(4)用排列数表示 $(55-n)(56-n)\cdots(69-n)=$________ ($n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n<55$).

▶ 考点三　排列的简单应用

例3 (1)沪宁高铁线上有六个大站:上海、苏州、无锡、常州、镇江、南京.铁路部门应为沪宁线上的六个大站(这六个大站之间)准备的不同的火车票的种数为 (　　)

A. 15　　B. 30

C. 12　　D. 36

(2)某博物馆计划展出 10 幅不同的画,其中 1 幅水彩画,4 幅油画,5 幅国画,排成一行陈列,要求同一品种的画必须放在一起,并且水彩画不放在两端,则不同的陈列方法有________种.

(3)有 7 本不同的书,从中选 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有________种不同的送法.

(4)有 7 种不同的书,要买 3 本送给 3 名同学,每人各 1 本,共有________种不同的送法.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 若 $x=\frac{n!}{3!}$,则 $x=$ (　　)

A. A_n^3　　B. A_n^{n-3}

C. A_3^n　　D. A_{n-3}^3

2. 从 5 本不同的书中选 2 本送给 2 名同学,每人 1 本,不同的送法种数为 (　　)

A. 5　　B. 10

C. 20　　D. 60

3. 从甲、乙、丙三人中选两人站成一排的所有站法为 (　　)

A. 甲乙,乙甲,甲丙,丙甲

B. 甲乙,丙乙,丙甲

C. 甲乙,甲丙,乙甲,乙丙,丙甲,丙乙

D. 甲乙,甲丙,乙丙

4. a,b,c,d,e 共 5 个人,从中选 1 名组长和 1 名副组长,但 a 不能当副组长,则不同的选法种数为 ( )

A. 20 B. 16 C. 10 D. 6

5. 设 $m\in \mathbf{N}^*$,且 $m<15$,则$(15-m)(16-m)\cdots(20-m)$等于 ( )

A. A_{15-m}^{6} B. A_{20-m}^{15-m} C. A_{20-m}^{6} D. A_{20-m}^{5}

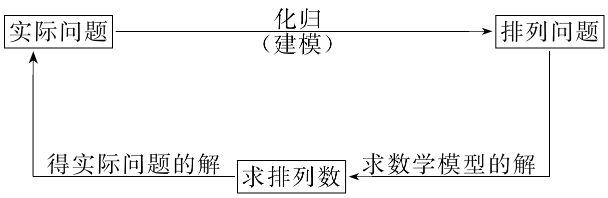
第 2 课时 排列应用问题

预习探究

梳理教材 探究疑难

▶ 知识点 排列应用问题

1. 解简单的排列应用问题首先必须认真分析题意,看能否把问题归结为排列问题,即是否满足排列定义中的三个条件(备取元素:互不相同;取出元素:没有重复;按一定顺序排成一列),特别是有顺序.
2. 求排列应用题时,要学会常见条件的应用,根据条件从元素和位置两个方面,正确运用分类加法计数原理和分步乘法计数原理.分类时,要注意各类之间不重复、不遗漏.分步时,要注意依次做完各个步骤后,事情才能完成.如果不符合条件的情况较少时,也可以采用排除法.
3. 记住一些常见条件的处理方式,对提高解题能力有很大的帮助.
4. 解排列应用问题的基本思路如图所示:



考点类析

考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 排队问题

[导入] (1)排队问题的特点是什么?解题时应怎样分析?
(2)排队问题中相邻、不相邻、定序应怎样解决?

例 1 解答下列问题:
(1)8 个人排成一排,共有多少种不同的排法?
(2)8 个人排成两排,前后两排各 4 人,共有多少种不同的排法?
(3)8 个人排成两排,前排 3 人,后排 5 人,共有多少种不同的排法?

【变式】记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照,要求排成一排,2 位老人相邻,则不同的排法共有 ( )

A. 1440 种 B. 960 种
C. 720 种 D. 480 种

拓展 8 名同学排成一排,其中甲不站左端,乙不站右端,有多少种排法?

▶ 考点二 排数问题

[导入] 排数问题的特点是什么?解题时怎样分析?

例 2 用 0,1,2,3,4,5 这六个数字组成无重复数字的整数,求满足下列条件的数各有多少个?
(1)六位奇数;
(2)能被 5 整除的四位数;
(3)比 210 435 大的六位数.

【变式】用 0 到 9 这 10 个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

拓展 由 1,2,3,4,5 这五个数字组成的没有重复数字的五位数排成一递增数列,则首项为 12 345,第 2 项是 12 354,…,末项(第 120 项)是 54 321.问:43 251 是第几项?

考点三　排列的综合应用

[导入] 排列综合问题的解决,一方面要准确理解题意,找到对元素及位置的限制条件,另一方面要根据条件对事件进行合理的分解(分类、分步),另外要注意条件间的影响,做到不重不漏.

例3 从数字 0,1,3,5,7 中取出不同的 3 个数作系数,可以组成多少个不同的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$? 其中有实根的方程有多少个?

【变式】两家夫妇各带一个小孩一起到动物园游玩,购票后排队依次入园,为安全起见,首尾一定要排两位爸爸,另外,两个小孩一定要排在一起,则这六个人入园顺序的排法种数为　　(　　)

A. 48　　B. 36　　C. 24　　D. 12

拓展 某次联欢会要安排 3 个歌舞类节目、2 个小品类节目和 1 个相声类节目的演出顺序,则同类节目不相邻的排法种数是　　(　　)

A. 72　　B. 120　　C. 144　　D. 168

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 7 个人并排站成一行,如果甲、乙两人不相邻,丙站在最左边,那么不同的排法有　　(　　)

A. 144 种　　B. 360 种

C. 480 种　　D. 720 种

2. 6 名同学排成一排,其中甲、乙必须排在一起的不同排法共有　　(　　)

A. 720 种　　B. 360 种

C. 240 种　　D. 120 种

3. 世界华商大会的某分会场有 A,B,C 三个展台,将甲、乙、丙、丁共四名"双语"志愿者分配到这三个展台,每个展台至少一人,其中甲、乙两人被分配到同一展台的分配方法有　　(　　)

A. 12 种　　B. 10 种

C. 8 种　　D. 6 种

4. 用数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数,其中比 40 000 大的偶数共有　　(　　)

A. 144 个　　B. 120 个　　C. 96 个　　D. 72 个

5. 用 0,1,2,3,4 这 5 个数字组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有________个.

1.2.2　组合

第 1 课时　组合的概念及组合数公式

预习探究

梳理教材　探究疑难

知识点一　组合

定义:一般地,从________个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素________,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

[思考] 排列与组合有什么共同点和不同点?

[讨论] 判断下列问题是组合问题还是排列问题.

(1)从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 人分别担任班长和团支书;

(2)从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 人去参加学生代表大会.

[探究] "abc"与"bca"是相同的排列吗? 它们是相同的组合吗?

▶ 知识点二　组合数与组合数公式

1. 组合数：从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有不同组合的个数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号________表示.

2. 组合数公式：

$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$，其中 $n,m\in \mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n$.

[思考] 组合数公式的推导方法对我们解题有何启发？

[探究] 写出从 4 个不同元素 a,b,c,d 中取出 3 个元素的组合，再由组合写出相应的排列，指出 C_4^3 与 A_4^3 的关系.

▶ 知识点三　组合数的性质

性质 1：$C_n^m=C_n^{n-m}$.

性质 2：$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

[思考] 怎样计算 C_{10}^8？

[讨论] 判断下列结论是否正确.

(1)若 $A_n^m=A_n^k$，则 $m=k$；(2)若 $C_n^m=C_n^k$，则 $m=k$.

考点类析

考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　对组合概念的理解

例1 给出下列问题：

(1)在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线上，有多少种不同的飞机票？

(2)在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线上，有多少种不同的飞机票价？(往返票价相同)

(3)a,b,c,d 四支足球队之间进行单循环比赛，共需比赛多少场？

(4)a,b,c,d 四支足球队争夺冠、亚军，有多少种不同的结果？

(5)从全班 40 人中选出 3 人分别担任班长、副班长、学习委员三个职务，有多少种不同的选法？

(6)从全班 40 人中选出 3 人参加某项劳动，有多少种不同的选法？

在上述问题中，哪些是组合问题？哪些是排列问题？

▶ 考点二　组合数公式及其应用

例2 (1)计算：$3C_8^3-2C_5^2$.

(2)计算：$C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}$.

(3)计算：$C_3^3+C_4^3+\cdots+C_{10}^3$.

(4)证明：$C_n^{m+1}+C_n^{m-1}+2C_n^m=C_{n+2}^{m+1}$.

▶ 考点三　组合的简单应用

例3 (1)集合{0,1,2,3}的含有 3 个元素的子集的个数是　　(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 8

(2)五个点中任何三点都不共线，则这五个点可以连成________条线段；如果是有向线段，共有________条.

(3)有 10 名教师，其中 6 名男教师，4 名女教师.

①现要从中选 2 名去参加会议，有________种不同的选法；

②现要从中选出男、女教师各 2 名去参加会议，有________种不同的选法.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 下列等式不正确的是　　(　　)

A. $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$　　B. $C_n^m=C_n^{n-m}$

C. $C_n^m=\dfrac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}$　　D. $C_n^m=C_{n+1}^{m+1}$

2. 如果 $C_n^2=28$，则 n 的值为　　(　　)

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

3. 某校开设 A 类选修课 3 门，B 类选修课 5 门，一位同学要从中选 3 门.若要求两类课程中至少各选 1 门，则不同的选法共有　　(　　)

A. 15 种　　B. 30 种　　C. 45 种　　D. 90 种

4. 从 0,2,4 中选两个数字，从 1,3 中选一个数字，组成无重复数字的三位数，其中偶数的个数为________.

5. 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S，其中由 3 个元素组成的子集数为 T，则 $\dfrac{T}{S}$ 的值为________.

第 2 课时　组合应用问题

预习探究

梳理教材　探究疑难

知识点　组合应用问题

1. 无限制条件的组合应用题的解法步骤为：判断（组合问题）；转化（组合模型）；求值（组合数）；作答.
2. 有限制条件的组合应用题的解法：
   组合问题与顺序无关，组合问题的限制条件往往是对被取元素进行分类，将被取元素分为两类，按每类取出元素的多少对事件分解，常用解法有直接法、间接法.
3. “分组”与“分配”问题的解法：
   (1)分组问题属于“组合”问题，常见的分组问题有三种：
   ①完全均匀分组，每组的元素个数均相等；
   ②部分均匀分组，应注意不要重复，有 n 组均匀，最后必须除以 $n!$；
   ③完全非均匀分组，这种分组不考虑重复现象.
   (2)分配问题属于“排列”问题，分配问题可以按要求逐个分配，也可以分组后再分配.
4. 排列与组合的综合应用问题的解法：
   (1)审清题意，区分哪是排列，哪是组合；
   (2)往往综合问题会有多个限制条件，应认真分析确定分类还是分步；
   (3)先取后排是解决综合问题的基本顺序.

考点类析

考点全息　深度挖掘

考点一　有条件的组合问题

[导入] 有条件限制的排列组合问题，通常有直接法和间接法. 其中包括特殊元素有限安排的策略、相邻问题捆绑处理的策略、不相邻问题插空处理的策略、定序问题除序处理的策略等.

例 1　有男运动员 6 名，女运动员 4 名，其中男、女队长各 1 名. 选派 5 人外出比赛，按下列要求各有多少种选派方法？

(1)男运动员 3 名，女运动员 2 名；

(2)至少有 1 名女运动员；

(3)至少有 1 名队长参加；

(4)既要有队长，又要有女运动员.

【变式】某食堂每天中午准备 4 种不同的荤菜，7 种不同的素菜，用餐者可以按下述方法之一搭配午餐：(1)任选 2 种荤菜、2 种素菜和白米饭；(2)任选 1 种荤菜、2 种素菜和蛋炒饭. 则每天不同午餐的搭配方法总数为　(　　)

A. 210　　B. 420

C. 56　　D. 22

拓展 (1)四面体的 1 个顶点为 A，从其他顶点和各棱的中点中取 3 个点，使它们和点 A 在同一平面上，有多少种不同的取法？

(2)四面体的顶点和各棱的中点共有 10 个点，在其中取 4 个不共面的点，有多少种不同的取法？

考点二　分组、分配问题

例 2　六本不同的书，按下列要求各有多少种不同的选法？

(1)分为三份，每份两本；

(2)分为三份，一份一本，一份两本，一份三本；

(3)分给甲、乙、丙三人，每人两本；

(4)分给甲、乙、丙三人，一人一本，一人两本，一人三本；

(5)分给甲、乙、丙三人，每人至少一本.

【变式】将 4 名大学生分配到 3 个乡镇去支教，每个乡镇至少 1 名，则不同的分配方案共有________种.

拓展 有 4 个不同的球，4 个不同的盒子，把球全部放入盒内.
(1)恰有 1 个盒内不放球，共有几种放法？
(2)恰有 2 个盒内不放球，共有几种放法？

▶ 考点三　排列、组合的综合应用

例 3 从 5 名男生和 3 名女生中选 5 人担任 5 门不同学科的课代表，分别求符合下列条件的方法数.
(1)女生必须少于男生；
(2)女生甲担任语文课代表；
(3)男生乙必须是课代表，但不担任数学课代表.

【变式 1】举世瞩目的“进博会”于 2018 年 11 月 5 日至 10 日在上海举行，为做好服务工作，将 4 名志愿者分配到主会场附近的 3 个路口维持交通，每个路口至少安排 1 名志愿者，则不同的分配方案种数为　(　　)

A. 12　　B. 36
C. 72　　D. 108

【变式 2】有 4 张分别标有数字 1,2,3,4 的红色卡片和 4 张分别标有数字 1,2,3,4 的蓝色卡片，从这 8 张卡片中随机取出 4 张卡片排成一行. 若取出的 4 张卡片所标数字之和等于 10，则有多少种不同的排法？

拓展 已知 10 件不同的产品中有 4 件是次品，现对它们进行一一测试，直至找出所有次品为止.
(1)若恰在第 5 次测试才测试到第一件次品，第 9 次测试后还剩最后一件次品，则这样的不同测试方法数是多少？
(2)若恰在第 5 次测试后，就找出了所有次品，则这样的不同测试方法数是多少？

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. 有 6 名男医生、5 名女医生，从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有　(　　)
A. 60 种　　B. 70 种
C. 75 种　　D. 150 种

2. 从 7 名志愿者中安排 6 人在周六、周日两天参加社区公益活动. 若每天安排 3 人，则不同的安排方案共有　(　　)
A. 70 种　　B. 140 种
C. 120 种　　D. 240 种

3. 某中学要从 4 名男生和 3 名女生中选 4 人参加公益活动，若男生甲和女生乙不能同时参加，则不同的选派方案共有　(　　)
A. 25 种　　B. 35 种
C. 820 种　　D. 840 种

4. 5 个工程队承建某项工程的 5 个不同的子项目，每个工程队承建 1 个子项目，其中甲工程队不能承建一号子项目，则不同的承建方案共有　(　　)
A. $C_4^1C_4^4$ 种　　B. $C_4^1A_4^4$ 种
C. C_4^4 种　　D. A_4^4 种

5. 从甲、乙等 5 名志愿者中选出 4 名，分别从事 A,B,C,D 四项不同的工作，每人承担一项，且甲、乙均不从事 A 工作，则不同的工作分配方案共有________种.

1.3 二项式定理

1.3.1 二项式定理

预习探究

梳理教材 探究疑难

▶ 知识点一 二项式定理

二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)项数：n 次二项展开式共有________项.

(2)次数：字母 a 的次数从 n 逐项递减到 0，是__________；字母 b 的次数从 0 逐项递增到 n，是__________；各项次数和均为二项式的次数 n.

(3)二项式系数：$C_n^k(k\in\{0,1,2,\cdots,n\})$叫作(第 $k+1$ 项的)二项式系数.

[思考] 二项式定理中，项的系数与二项式系数有什么区别？

[讨论] 以下对二项式定理的理解是否正确？

(1)$(a+b)^n$ 的展开式中有 n 项.　　(　　)

(2)$(a+b)^n$ 的展开式的第 1 项与 $(b+a)^n$ 的展开式的第 1 项相同.　　(　　)

(3)$(a+b+c)^4$ 的展开式中含 abc^2 项.　　(　　)

(4)$(a+b+c)^5$ 的展开式中含 ab^2c^2 项的系数是 $C_5^1C_4^2C_2^2$.　　(　　)

▶ 知识点二 二项展开式的通项公式

$(a+b)^n$ 展开式的第________项叫作二项展开式的通项，记作 $T_{k+1}=$________.

在二项式定理中，如果令 $a=1,b=x$，则有 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n$.

[思考] 二项式 $(a+b)^n$ 与 $(b+a)^n$ 的展开式中第 $k+1$ 项是否相同？

[讨论] 以下对二项式定理的理解是否正确？

(1)$C_n^ra^{n-r}b^r$ 是 $(a+b)^n$ 的展开式中的第 r 项.　　(　　)

(2)在 $(1-x)^9$ 的展开式中，系数最大的项是第 5 项和第 6 项.　　(　　)

(3)在 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中，常数项为 -160.　　(　　)

考点类析

考点全息 深度挖掘

▶ 考点一 利用二项式定理求展开式

例1 (1)已知 $(1+2x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_1-2a_2+3a_3-4a_4=$________.

(2)$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式为________________________.

(3)若 $(1+\sqrt{3})^4=a+b\sqrt{3}$($a,b$ 为有理数)，则 $a+b=$______.

▶ 考点二 二项展开式通项的应用

[导入] (1)在 $(a+2b)^4$ 的展开式中第 3 项、第 3 项的系数、第 3 项的二项式系数各是什么？

(2)在 $(1-x)^5$ 的展开式中，怎样求含 x^3 项的系数？

例2 (1)在二项式 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中，含 x^4 的项的系数是　　(　　)

A. -10　　B. 10

C. -5　　D. 5

(2)在二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为　　(　　)

A. -15　　B. -10

C. 10　　D. 15

(3)$\left(x+\frac{4}{x}+y+4\right)^6$ 的展开式中 x^3y 的系数为_______.

【变式】在 $\left(2x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中，求：

(1)第 5 项的二项式系数及第 5 项的系数；

(2)含 x^2 的项的系数.

拓展 已知$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^{n}$的展开式中,前三项的系数成等差数列.

(1)求展开式中含 x 的项;

(2)求展开式中所有的有理项.

▶ 考点三　求两个多项式积的特定项

例3 (1)已知$(1+ax)(1+x)^{5}$的展开式中,含 x^{2} 的项的系数为5,则 $a=$　(　　)

A. -4　　B. -3

C. -2　　D. -1

(2)$(1+2x)^{3}(1-x)^{4}$的展开式中,含 x 项的系数为　(　　)

A. 10　　B. -10

C. 2　　D. -2

(3)$(x-y)(x+y)^{8}$的展开式中 $x^{2}y^{7}$ 的系数为________(用数字作答).

当堂自测　查漏补缺　巩固提升

1. $1-2C_n^1+4C_n^2-8C_n^3+\cdots+(-2)^nC_n^n$ 等于　(　　)

A. 1　　B. -1

C. $(-1)^n$　　D. 3^n

2. $(1+2x)^{5}$的展开式中 x^{2} 的系数等于　(　　)

A. 80　　B. 40

C. 20　　D. 10

3. 在$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$的展开式中,$x$ 的幂指数是整数的项共有(　　)

A. 3项　　B. 4项

C. 5项　　D. 6项

4. 若$\left(x-\frac{1}{ax}\right)^{7}$的展开式中含 x 项的系数为280,则 $a=$(　　)

A. -2　　B. 2

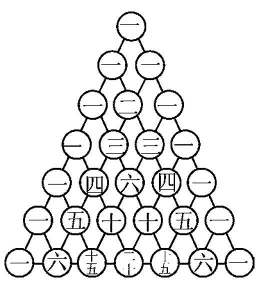
C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. 若$(x+a)^{10}$的展开式中 x^{7} 的系数为15,则 $a=$________.

1.3.2　"杨辉三角"与二项式系数的性质

预习探究　梳理教材　探究疑难

▶ 知识点一　二项式系数表(杨辉三角)



1. 上述数表是我国南宋数学家杨辉在1261年所著的《详解九章算法》一书中最先提出的,是我国古代数学的一个重要成果,比欧洲早五百年左右,我们把这个数表称为________.

2. 从第一项起至中间项,二项式系数________,随后又________.

3. 表中每行两端都是1,而且除1以外的每一个数都等于它肩上________.

▶ 知识点二　二项式系数的性质

1. 对称性. 与首末两端"等距离"的两个二项式系数相等($C_n^m=C_n^{n-m}$).

2. 增减性与最大值. 二项式系数先递增再递减,中间最大.

3. 各二项式系数的和.

已知$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n$,令 $x=1$,则 $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n$.

[思考] 二项式系数的增减性如何?

[探究] 什么时候二项式系数最大?

考点类析　考点全息　深度挖掘

▶ 考点一　二项式系数的性质

例1 设 m 为正整数,$(x+y)^{2m}$的展开式的二项式系数的最大值为 a,$(x+y)^{2m+1}$的展开式的二项式系数的最大值为 b,若 $13a=7b$,则 $m=$　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

例2 已知$\left(\frac{1}{2}+2x\right)^{n}$.

(1)若展开式中第5项、第6项与第7项的二项式系数成等差数列,求展开式中二项式系数最大项的系数;

(2)若展开式中前三项的二项式系数和等于79,求展开式中系数最大的项.

考点二　二项式系数和的应用

例3　若将函数 $f(x)=(x-1)^5$ 表示为 $f(x)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+a_4(x+1)^4+a_5(x+1)^5$，其中 a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 为实数，则 $a_3+a_4=$________.

例4　已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，求：

(1) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$；

(2) $a_1+a_3+a_5+a_7$；

(3) $a_0+a_2+a_4+a_6$；

(4) $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_7|$.

考点三　二项式定理的综合应用

[导入] 整除或求余数问题有什么处理方法？

例5　(1)试求 1995^{10} 除以 8 的余数.

(2)求证：$3^{2n+2}-8n-9(n\in\mathbf{N}^*)$ 能被 64 整除.

【变式】已知 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$1+2+2^2+\cdots+2^{5n-1}$ 能被 31 整除.

拓展　用二项式定理证明：当 $n\geqslant 3$，$n\in\mathbf{N}_+$ 时，$n^{n-1}-1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除.

当堂自测

查漏补缺　巩固提升

1. $(1+x)^{2n+1}$ 的展开式中，二项式系数最大的项的项数是　(　　)

A. $n,n+1$　　B. $n-1,n$

C. $n+1,n+2$　　D. $n+2,n+3$

2. 在 $(x+y)^n$ 的展开式中，第 4 项与第 8 项的系数相等，则展开式中系数最大的项是　(　　)

A. 第 6 项　　B. 第 5 项

C. 第 5,6 项　　D. 第 6,7 项

3. 若 $(x+3y)^n$ 的展开式中所有项的系数之和等于 $(7a+b)^{10}$ 的展开式的二项式系数之和，则 n 的值为　(　　)

A. 15　　B. 10

C. 8　　D. 5

4. 设 $(2x-3)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_0+a_1+a_2+a_3$ 的值为　(　　)

A. 1　　B. 16

C. -15　　D. 15

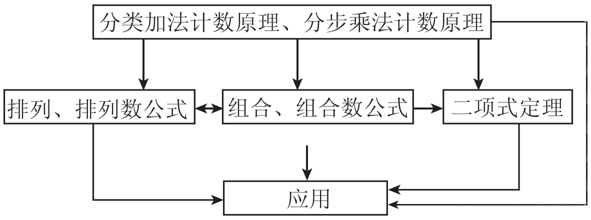
5. 已知 $(x^2+2x)^5\cdot(x-a)^5$ 的展开式中各项系数之和为 -243，则 $(x^2+2x)^5\cdot(x-a)^5$ 的展开式中系数最大的项为________.

本章总结提升

单元回眸

构建网络　高屋建瓴

【知识网络】



【知识辨析】

判断下列说法是否正确.(请在括号中填写"√"或"×")

(1)在分步乘法计数原理中,事情是分两步完成的,其中任何一个单独的步骤都能完成这件事.　(　　)

(2)三个人踢毽子,互相传递,每人每次只能踢一下,由甲开始踢,经过5次传递后,毽子又被踢回给甲,则不同的传递方式共有10种.　(　　)

(3)若组合式 $C_n^x=C_n^m$,则 $x=m$ 成立.　(　　)

(4)由0,1,2,3这四个数字组成的四位数中,有重复数字的四位数共有 $3\times4^3-A_4^3=168$(个).　(　　)

(5)若 $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+\cdots+a_1x+a_0$,则 $a_7+a_6+\cdots+a_1$ 的值为128.　(　　)

(6)若 $\left(x+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中,仅有第5项的二项式系数最大,且 x^4 的系数为7,则实数 $a=\frac{1}{2}$.　(　　)

整合创新

提炼方法　融会贯通

▶ 题型一　分类加法计数原理和分步乘法计数原理

[类型总述] 利用分类加法计数原理和分步乘法计数原理解决实际的计数问题.

例1 (1) 某同学从4本不同的科普杂志、3本不同的文摘杂志、2本不同的娱乐新闻杂志中任选1本阅读,则不同的选法共有　(　　)

A. 24种　B. 9种　C. 3种　D. 26种

(2)如图T1-1,小明从街道的 E 处出发,先到 F 处与小红会合,再一起到位于 G 处的老年公寓参加志愿者活动,则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为　(　　)

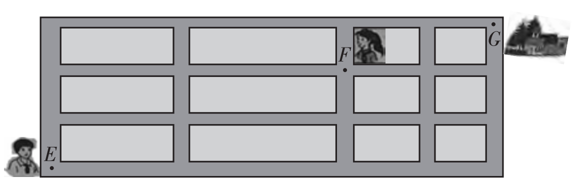


图 T1-1

A. 24　B. 18

C. 12　D. 9

▶ 题型二　排列组合应用问题

[类型总述] (1)排列应用问题;(2)组合应用问题;(3)排列组合的综合应用.

例2 (1)用数字1,2,3,4,5组成没有重复数字的五位数,其中奇数的个数为　(　　)

A. 24　B. 48　C. 60　D. 72

(2)将9人(含甲、乙)平均分成三组,且甲、乙分在同一组,则不同分组方法的种数为________.(以数字作答)

(3)[2018·浙江卷] 从1,3,5,7,9中任取2个数字,从0,2,4,6中任取2个数字,一共可以组成________个没有重复数字的四位数.(用数字作答)

【变式】(1)从字母 a,b,c,d,e,f 中选出4个字母排成一排,其中一定要选出 a 和 b,并且必须相邻(a 在 b 的前面),则排列方法共有　(　　)

A. 36种　B. 72种

C. 90种　D. 144种

(2)某学校拟安排6名教师在元旦期间(2019年12月31日至2020年1月2日)值班,每天安排2人,每人值班1天.若教师甲12月31日不值班,教师乙1月2日不值班,则不同的安排方法共有　(　　)

A. 30种　B. 36种　C. 42种　D. 48种

(3)[2018·全国卷Ⅰ] 从2位女生、4位男生中选3人参加科技比赛,且至少有1位女生入选,则不同的选法共有________种.(用数字填写答案)

▶ 题型三　二项式定理及其应用

[类型总述] (1)利用二项式定理求指定项(或系数);(2)利用赋值法求二项式的系数和.

例3 (1) $(2x+\sqrt{x})^5$ 的展开式中,x^3 的系数是________.(用数字填写答案)

(2)若 $\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是 -80,则实数 $a=$________.

(3)已知 $(2x-1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9+a_{10}x^{10}$,则 $a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}$ 的值为________.

【变式】(1) $(x-2y)^6$ 的展开式中,x^4y^2 的系数为　(　　)

A. 15　B. -15　C. 60　D. -60

(2) 已知 $\left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数和为625,则展开式中含 x 项的系数为　(　　)

A. 216　B. 224　C. 240　D. 250

(3)[2017·浙江卷] 已知多项式 $(x+1)^3(x+2)^2=x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$,则 $a_4=$________,$a_5=$________.

第一章　计数原理

1.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

第1课时　分类加法计数原理与分步乘法计数原理的概念

【预习探究】

知识点一

两类　m　n　$m+n$

思考　解:(1)在分类加法计数原理中,两类不同方案中的方法是不同的,若相同,则它只能在同一类方案中且只能算是一种方法.

(2)事件:借一本书.

分解:从语文参考书中取一本,从数学参考书中取一本,都能完成事件,因此有两类不同的方案,用分类加法计数原理解决问题.

计数:从语文参考书中取一本有5种不同的借法,从数学参考书中取一本有6种不同的借法,由分类加法计数原理知,共有$5+6=11$(种)不同的借法.

知识点二

两个　m　n　mn

思考　解:事件:借两本书(语文、数学各一本).

分解:从语文参考书中取一本,再从数学参考书中取一本,才能完成事件,因此有两个步骤,用分步乘法计数原理解决问题.

计数:从语文参考书中取一本有5种不同的借法,从数学参考书中取一本有6种不同的借法,由分步乘法计数原理知,共有$5\times6=30$(种)不同的借法.

【考点类析】

考点一

例1　(1)B　(2)12　(3)8　[解析](1)当$a=0$时,方程化为$2x+b=0$,解得$x=-\frac{b}{2}$,有序数对$(0,b)$有4个;当$a\neq0$时,$\Delta=4-4ab\geqslant0$,得$ab\leqslant1$,有序数对$(-1,b)$有4个,$(1,b)$有3个,$(2,b)$有2个.综上,共有$4+4+3+2=13$(个).

(2)由分类加法计数原理可得,有$7+5=12$(种)不同的选法.

(3)任选1名同学参加学科竞赛,有两类方案:

第一类,从男同学中选取1名参加学科竞赛,有3种不同的选法;

第二类,从女同学中选取1名参加学科竞赛,有5种不同的选法.

由分类加法计数原理得,不同的选派方法共有$3+5=8$(种).

考点二

例2　(1)16　(2)448　(3)60　(4)96　[解析](1)确定点P的坐标分两步,即分步确定点P的横坐标与纵坐标.

第一步,确定横坐标,从0,1,2,3四个数字中选一个,有4种方法;

第二步,确定纵坐标,从0,1,2,3四个数字中选一个,也有4种方法.

根据分步乘法计数原理,所有不同的点P的个数为$4\times4=16$.

(2)第一步,确定千位,除去0和6,有8种不同的选法;第二步,确定百位,除去6和千位数字外,有8种不同的选法;第三步,确定十位,除去6和千位、百位上的数字外,有7种不同的选法.故共有$8\times8\times7=448$(个)不同的“吉祥数”.

(3)用1,3,5,7,9五个数字中的三个来替换A,B,C,其中A,B,C的值互不相同,是分步乘法计数原理,故不同的直线共有$5\times4\times3=60$(条).

(4)先排第1条轨道,有4种方法,第2、3、4、5条轨道各有4,3,2,1种方法.由分步乘法计数原理知,共有$4\times4\times3\times2\times1=96$(种)方法.

考点三

导入　解:(1)能否独立完成事件是区分分类与分步的标准,能独立完成事件是分类,否则是分步.

(2)分类时要按统一标准进行,多重标准要依次进行分类,分步要做到首尾相接,必要时可以恰当地画出示意图或列出表格,使问题更加直观、清晰,做到不重不漏.

例3　解:(1)分四类:第一类,从一班学生中选1人,有7种选法;第二类,从二班学生中选1人,有8种选法;第三类,从三班学生中选1人,有9种选法;第四类,从四班学生中选1人,有10种选法.

所以,共有$N=7+8+9+10=34$(种)不同的选法.

(2)分四步:第一、二、三、四步分别从一、二、三、四班学生中选1人任组长.

所以,共有$N=7\times8\times9\times10=5040$(种)不同的选法.

(3)分六类,每类又分两步:从一、二班学生中各选1人,有7×8种不同的选法;从一、三班学生中各选1人,有7×9种不同的选法;从一、四班学生中各选1人,有7×10种不同的选法;从二、三班学生中各选1人,有8×9种不同的选法;从二、四班学生中各选1人,有8×10种不同的选法;从三、四班学生中各选1人,有9×10种不同的选法.

所以,共有$N=7\times8+7\times9+7\times10+8\times9+8\times10+9\times10=431$(种)不同的选法.

变式　解:(1)可分为两类:A中元素为x,B中元素为y或A中元素为y,B中元素为x.则共得到$3\times4+4\times3=24$(个)不同的点.

(2)第一象限内的点,即x,y均为正数,所以只能取A,B中的正数,共有$2\times2+2\times2=8$(个)不同的点.

[小结]对复杂事件的分解要做到不重不漏,分类要按统一标准,如变式中可按A中元素为x或A中元素为y进行分解;分步要首尾相接,如例3(2)中一班、二班、三班、四班依次分解.复杂的问题可先画事件分解图.

拓展　解:由题意知,有1人既会英语又会日语,6人只会英语,2人只会日语.

方法一:分两类.

第一类:从只会英语的6人中选1人教英语,有6种选法,则教日语的有$2+1=3$(种)选法.此时共有$6\times3=18$(种)选法.

第二类:从既会英语又会日语的1人中选1人教英语,有1种选法,则选教日语的有2种选法,此时有$1\times2=2$(种)选法.

所以由分类加法计算原理知,共有$18+2=20$(种)选法.

方法二:设既会英语又会日语的人为甲,则甲有入选、不入选两类情形,入选后又要分两种:(1)教英语;(2)教日语.

第一类:甲入选.

(1)甲教英语,再从只会日语的2人中选1人,由分步乘法计数原理,有$1\times2=2$(种)选法;

(2)甲教日语,再从只会英语的6人中选1人,由分步乘法计数原理,有$1\times6=6$(种)选法.

故甲入选的不同选法共有$2+6=8$(种).

第二类:甲不入选.可分两步.

第一步,从只会英语的6人中选1人有6种选法;第二步,从只会日语的2人中选1人有2种选法.由分步乘法计数原理,有$6\times2=12$(种)不同的选法.

综上,共有$8+12=20$(种)不同的选法.

【当堂自测】

1. B [解析] 分三类:第一类,乘汽车,从 3 次中选 1 次有 3 种走法;第二类,乘火车,从 4 次中选 1 次有 4 种走法;第三类乘轮船,从 2 次中选 1 次有 2 种走法. 所以,共有 $3+4+2=9$(种)不同的走法.
2. D [解析] x 有 3 种不同的选法,y 有 3 种不同的选法,则 xy 共有 $3\times3=9$(个)不同的值.
3. A [解析] 分四步:第一步,选 O 型血的人有 10 种选法;第二步,选 A 型血的人有 5 种选法;第三步,选 B 型血的人有 8 种选法;第四步,选 AB 型血的人有 3 种选法. 故共有 $10\times5\times8\times3=1200$(种)不同的选法.
4. A [解析] 先从 3 名老师中任选 1 名,有 3 种选法,再从 13 名学生中任选 1 名,有 13 种选法. 由分步乘法计数原理知,不同的选法种数为 $3\times13=39$.
5. A [解析] 当 $x=1$ 时,y 的取值可能为 0,1,2,3,4,5,有 6 种情况;
当 $x=2$ 时,y 的取值可能为 0,1,2,3,4,有 5 种情况;
当 $x=3$ 时,y 的取值可能为 0,1,2,3,有 4 种情况.
根据分类加法计数原理可得,满足条件的 (x,y) 的个数为 $6+5+4=15$.

第 2 课时 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的运用

【预习探究】

知识点

方法数 分解 都可做完 才能做完 并联 串联

思考 (1)× (2)√ (3)√ (4)×

[解析] (1)在分类加法计数原理中,两类不同方案中的方法不可以相同,相同的应单独计算.

(2)在分类加法计数原理中,每类方案中的方法都能直接完成这件事,这是分类区分于分步的一个标志.

(3)在分步乘法计数原理中,完成每个步骤的方法是各不相同的,这是正确的.

(4)在分步乘法计数原理中,任何一个单独的步骤都不能完成这件事,只有所有步骤都完成才能完成这件事.

【考点类析】

考点一

导入 解:如果完成这件事可以分几种情况,每种情况中任何一种方法都能完成这件事,则是分类;而从其中一种情况中任取一种方法只能完成一部分事件,且只有依次完成各种情况,才能完成这件事,则是分步. 对完成一件事进行分步时,若前一步对后一步的方法数没有影响,则是分步;若前一步的事件不同导致后一步的方法数也不一样,则应分类解决.

例 1 (1)D (2)100 [解析] (1)先取 x 的值,再取 y 的值,分两步,但 x 的取值对 y 取值的方法数有影响,因此应按 x 的取值进行分类:

当 $x=1$ 时,y 的取值可能为 1,2,3,4,5,共构成 5 个有序自然数对;

当 $x=2$ 时,y 的取值可能为 1,2,3,4,共构成 4 个有序自然数对;

……

当 $x=5$ 时,$y=1$,共构成 1 个有序自然数对.

根据分类加法计数原理,共有 $5+4+3+2+1=15$(个)有序自然数对.

(2)由题意知 $a\neq0$,所以 a 有 4 种不同的选择方法,b 有 5 种不同的选择方法,c 有 5 种不同的选择方法. 由分步乘法计数原理,共有 $4\times5\times5=100$(个)不同的二次函数.

变式 C [解析] 由题意知,问题的关键在于确定函数定义域的个数,所以分两步:第一步,先确定函数值 1 对应的定义域中的元素,因为 $y=1$ 时,$x=1$ 或 $x=-1$,故有 3 种情况,即 $\{1\}$,$\{-1\}$,$\{1,-1\}$;第二步,确定函数值 4 对应的定义域中的元素,因为 $y=4$ 时,$x=2$ 或 $x=-2$,故也有 3 种情况,即 $\{2\}$,$\{-2\}$,$\{2,-2\}$. 由分步乘法计数原理得,共有 $3\times3=9$(个).

[小结] 分类标准是运用分类计数原理的难点所在,其重点在于要抓住题目中的关键词或关键元素等. 注意:首先根据题目特点恰当选择一个分类标准,其次分类时应注意完成这件事情的任何一种方法必须属于某一类.

拓展 40 [解析] 满足条件的有两类:第一类,与正八边形有两条公共边的三角形有 8 个;第二类,与正八边形有一条公共边的三角形有 $8\times4=32$(个). 所以满足条件的三角形共有 $8+32=40$(个).

考点二

导入 解:在占位模型中选择按元素还是按位置进行分解的标准是"唯一性",即元素是否选、选是否只选一次,位置是否占、占是否只占一次. 解题时一般选择具有"唯一性"的对象进行分解.

例 2 B [解析] 若 2 颗相同的黑色小球装入同一个盒子,则 3 颗相同的红色小球分别装入另外 3 个盒子,故有 4 种方案;

若 1 颗红色小球和 1 颗黑色小球装入同一个盒子,则剩余的 1 颗黑色小球和另外的 2 颗红色小球分别装入另外 3 个盒子,故有 $4\times3=12$(种)方案;

若 2 颗相同的红色小球装入同一个盒子,则剩余的 1 颗红色小球和另外的 2 颗黑色小球分别装入另外 3 个盒子,故有 $4\times3=12$(种)方案.

根据分类加法计数原理可得,共有 $4+12+12=28$(种)不同的分装方案.

变式 A [解析] 若按位置逐位分步,先安排中间再安排两边,中间对两边有影响可进行分类;若 $a_2=2$,则"凸数"为 120 与 121,共 $1\times2=2$(个);若 $a_2=3$,则"凸数"有 $2\times3=6$(个);若 $a_2=4$,则"凸数"有 $3\times4=12$(个);…;若 $a_2=9$,则"凸数"有 $8\times9=72$(个).

∴所有"凸数"的个数为 $2+6+12+20+30+42+56+72=240$.

[小结] 利用分步乘法计数原理解决问题:(1)要按对象是否具有"唯一性"合理分步,分步是有先后顺序的;(2)分步要做到"步骤完整",只有完成了所有步骤,才完成任务,根据分步乘法计数原理,把完成每一步的方法数相乘,得到总数;(3)若前一步对后一步的方法数有影响可适当分类.

拓展 解:(1)学生甲获奖的不同情况共有 6 种,即 3 个冠军和 3 个亚军中的一个.

(2)共三个运动项目,故共 3 个冠军,

将 3 个冠军分给 4 名学生,第一个冠军有 4 种分法,

第二个冠军也有 4 种分法,第三个冠军也有 4 种分法,

故共有 $4\times4\times4=64$(种)不同情况.

考点三

导入 解:(1)涂色问题的基本要求是相邻区域不同色,但是不相邻的区域可以同色.

(2)解决涂色问题首先要关注图形的结构特征:首先,如果图形不规则,要从某一块出发进行分步涂色,从而选用分步乘法计数原理,如果图形具有一定的对称性,那么先对涂色方案进行分类,每一类再进行分步;其次,要注意前一步的涂色对下一步的涂色方法数有无影响,无影响直接分步,有影响则要分类. 涂色问题往往涉及两计数原理的综合应用,因此,要找准分类标准,在兼顾条件的情况下分步涂色.

例 3 18 [解析] ①若 A,C 涂色相同,则按照分步乘法计数原理,A,B,C,D 可涂颜色的种数依次是 3,2,1,2,则有 $3\times2\times1\times2=12$(种)不同的涂法.

②若 A,C 涂色不相同,则按照分步乘法计数原理,A,B,C,D 可涂颜色的种数依次是 3,2,1,1,则有 $3\times2\times1\times1=6$(种)不同的涂法.

所以,根据分类加法计数原理,共有 $12+6=18$(种)不同的涂法.

变式 (1)7776 (2)420 [解析] (1)先给上底面的 5 个顶

点染色,每个顶点有 3 种染色方法,共有 3^5 种染色方法;再给下底面的 5 个顶点染色,因为各侧棱的两个端点不同色,所以每个顶点有 2 种染色方法,共有 2^5 种染色方法.根据分步乘法计数原理,共有 $3^5\times2^5=7776$(种)染色方案.

(2)按照 $S\to A\to B\to C\to D$ 的顺序进行染色,按照 A,C 是否同色分类:

第一类,A,C 同色,则有 $5\times4\times3\times1\times3=180$(种)不同的染色方法.

第二类,A,C 不同色,则有 $5\times4\times3\times2\times2=240$(种)不同的染色方法.

根据分类加法计数原理,共有 $180+240=420$(种)不同的染色方法.

[小结]用两个计数原理解决涂色问题时,关键要明确是分类还是分步.

(1)分类要做到"不重不漏",分类后再分别对每一类进行计数,最后用分类加法计数原理求和,得到总数;

(2)分步要做到"步骤完整",只有完成了所有步骤,才完成了任务,根据分步乘法计数原理,把完成每一步的方法数相乘,得到总数.

拓展 解:(1)先种植 a_1 部分,有 3 种不同的种植方法,再种植 a_2,a_3 部分.因为 a_2,a_3 与 a_1 的颜色不同,a_2,a_3 的颜色也不同,所以由分步乘法计数原理得不同的种植方法有 $3\times2\times1=6$(种).

(2)当 a_1,a_3 不同色时,有 $3\times2\times1\times1=6$(种)种植方法;当 a_1,a_3 同色时,有$3\times2\times1\times2=12$(种)种植方法.由分类加法计数原理,共有 $6+12=18$(种)种植方法.

【当堂自测】

1. C [解析]个位数字是 9 的有 8 个,个位数字是 8 的有 7 个,…,个位数字是 2 的有 1 个,个位数字是 1 或 0 的有 0 个,因此共有 $8+7+6+\cdots+1=36$(个).

2. D [解析]按照车主的要求,从左到右第 1 个号码有 5 种选法,第 2 个号码有 3 种选法,其余 3 个号码各有 4 种选法.因此共有 $5\times3\times4\times4\times4=960$(种)情况.

3. B [解析]若 A,D 同色,先染 A 处,有 4 种方法,再染 B 处有 3 种方法,第三步染 C 处有 3 种方法,共有 $4\times3\times3=36$(种)方法;若 A,D 不同色,先染 A 处,有 4 种方法,再染 D 处有 3 种方法,第三步染 B 处有 2 种方法,第四步染 C 处有 2 种方法,共有$4\times3\times2\times2=48$(种)方法.根据分类加法计数原理可得共有 $36+48=84$(种)方法,故选 B.

4. 900 648 [解析]百位数字有 9 种选择,十位数字和个位数字都各有 10 种选择,由分步乘法计数原理知,符合题意的三位数共有 $9\times10\times10=900$(个).

由于数字不可重复,可知百位数字有 9 种选择,十位数字有 9 种选择,个位数字有 8 种选择,由分步乘法计数原理知,符合题意的三位数共有 $9\times9\times8=648$(个).

1.2 排列与组合

1.2.1 排列

第 1 课时 排列的概念及排列数公式

【预习探究】

知识点一

1. n 一定的顺序 2. 顺序

思考 解:(1)由排列的定义知,排列是"从 n 个不同元素中,没有重复地取出 m 个元素",因此在同一个排列中不能重复出现同一个元素.

(2)"按一定顺序"是指排列与元素的顺序有关,即与位置有关,这是判断一个问题是否为排列问题的关键.

探究 解:按照分步乘法计数原理,有 $3\times2=6$(种)选法,与顺序有关系,因为任职有正、副之分.

知识点二

1. n m A_n^m

思考 解:"一个排列"是指"从 n 个不同元素中任取 m 个元素按照一定的顺序排成一列",不是数;"排列数"是指"从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列的个数",是一个数.

探究 解:$A_n^2=n\times(n-1)$,$A_n^3=n\times(n-1)\times(n-2)$,$A_n^m=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$.

【考点类析】

考点一

例 1 (1)A [解析] 根据排列的概念知①④是排列问题.

(2)解:①会场有 50 个座位,求选出 3 个座位有多少种方法?与顺序无关,不是排列问题.

若选出 3 个座位安排三位客人,又有多少种方法?与顺序有关,是排列问题.

②任取两个元素作为 a,b,可以得到多少个焦点在 x 轴上的椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?可以得到多少个焦点在 x 轴上的双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?都与顺序有关,属于排列问题.

考点二

例 2 (1)D (2)2730 (3)$(n+1)!-1$ (4)A_{69-n}^{15}

[解析](1)由 $A_8^x<6A_8^{x-2}$,得$\frac{8!}{(8-x)!}<6\times\frac{8!}{(10-x)!}$,

$\therefore x^2-19x+84<0$,解得$7<x<12$.又 $x\leqslant8$,$x-2\geqslant0$,$\therefore 7<x\leqslant8$. $\because x\in\mathbf{N}^*$,$\therefore x=8$.

(2)$A_{15}^3=15\times14\times13=2730$.

(3)$\because n\times n!=[(n+1)-1]\times n!=(n+1)!-n!$,

$\therefore$原式$=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots+[(n+1)!-n!]=(n+1)!-1$.

(4)$\because 55-n,56-n,\cdots,69-n$ 中的最大数为 $69-n$,且共有 $(69-n)-(55-n)+1=15$(个)数,

$\therefore(55-n)(56-n)\cdots(69-n)=A_{69-n}^{15}$.

[小结](1)排列数公式的乘积形式适用于计算排列数.

(2)排列数公式的阶乘形式主要用于与排列数有关的证明、解方程和不等式等问题,具体应用时注意阶乘的性质,提取公因式,可以简化计算.

考点三

例 3 (1)B (2)5760 (3)210 (4)343 [解析](1)只需分析每两个大站之间需要的火车票的种数即可.

对于两个大站 A 和 B,从 A 到 B 的火车票与从 B 到 A 的火车票不同,因为每张车票对应一个起点站和一个终点站,因此,每张火车票对应从 6 个不同元素(大站)中取出 2 个不同元素(起点站和终点站)的一种排列,所以问题归结为求从 6 个不同元素中每次抽出 2 个不同元素的排列数,故不同的火车票有 $A_6^2=6\times5=30$(种).

(2)4 幅油画有 $A_4^4=24$(种)不同的排法,5 幅国画有 $A_5^5=120$(种)不同的排法,水彩画放在油画和国画之间,则有 $24\times120\times2=5760$(种)不同的陈列方法.

(3)从 7 本不同的书中选 3 本送给 3 名同学,相当于从 7 个不同的元素中,没有重复地取出 3 个元素,按甲、乙、丙(3 名同学)的顺序排成一列,所以共有 $A_7^3=7\times6\times5=210$(种)不同的送法.

(4)由于每一种书有许多本,因此从 7 种不同的书中买 3 本书,这 3 本书并不要求都不相同,而每位同学得到且只得到一本,故按同学分三步,根据分步乘法计数原理知,共有 $7\times7\times7=343$(种)不同的送法.

[小结]排列概念中有三个要求:(1)从 n 个互不相同的元素中,(2)没有重复地取出 $m(m\leqslant n)$个元素,(3)按照一定顺序排成一列.满足这三个条件就是排列问题,可用排列数公式(A_n^m)计算其方法数.

【当堂自测】

1. B [解析]由排列数公式得 $x=\frac{n!}{3!}=\frac{n!}{[n-(n-3)]!}=A_n^{n-3}$,故选 B.

2. C [解析]本题即求从 5 个不同元素中取 2 个元素的排

列数.

3. C ［解析］本题中的事件为“从三个不同的元素中没有重复地选出两个的排列”,画树形图得共有6种站法,选C.

4. B ［解析］不考虑限制条件有A_5^2种选法,a当副组长的选法有A_4^1种,故不同的选法种数为$A_5^2-A_4^1=16$.

5. C ［解析］因为$15-m,16-m,\cdots,20-m$中的最大数为$20-m$,且共有$20-m-(15-m)+1=6$(个)数,所以$(15-m)(16-m)\cdots(20-m)=A_{20-m}^6$.

第2课时　排列应用问题

【考点类析】

考点一

导入　解:(1)排队问题的特点是元素与位置都具有唯一性,分析问题时可按位置分析,也可按元素分析.含有限制条件问题,分析时一般采用特殊元素优先原则,即先安排有限制条件的元素或有限制条件的位置,对于分类过多的问题可以采用间接法.

(2)对于相邻问题,可采用“捆绑法”解决,即将相邻的元素视为一个整体进行排列;对于不相邻问题,可采用“插空法”解决,即先排其余的元素,再将不相邻的元素插入空中;对于定序问题,可采用“除序法”解决,即用不限制的排列数除以顺序一定元素的全排列数.

例1　解:(1)由全排列的定义可知,共有$A_8^8=40\ 320$(种)不同的排法.

(2)从8人中任选4人在前排,共有A_8^4种不同的排法,剩余的4人在后排,共有A_4^4种不同的排法,

∴共有$A_8^4\times A_4^4=A_8^8=40\ 320$(种)不同的排法.

(3)从8人中任选3人在前排,共有A_8^3种不同的排法,剩余的5人在后排,共有A_5^5种不同的排法,

∴共有$A_8^3\times A_5^5=A_8^8=40\ 320$(种)不同的排法.

变式　A ［解析］由于2位老人相邻,故先排2位老人的相对位置,共有$A_2^2=2$(种)排法,将2位老人看作一个整体,与剩下的5名志愿者排列,共有$A_6^6=720$(种)排法.故不同的排法共有$2\times720=1440$(种).

［小结］(1)特殊限制条件的排列问题,要记住其特殊的方法,如捆绑法、插空法、除序法等.

(2)限制条件分析时有位置分析法、元素分析法,先特殊(元素或位置)后一般,有多个条件时,先肯定(在某位置)后否定(不在某位置),两条件有影响时,可根据影响先分类再分步进行求解,对于分类过多的问题可以采用间接法.

拓展　解:甲、乙为特殊元素,左、右两端为特殊位置.

方法一:(特殊元素法)甲在最右边时,其他的可全排列,有A_7^7种;甲不在最右边时,可从余下6个位置中任选一个,有A_6^1种,而乙可排在除去最右边位置和甲的位置后剩余的6个中的任一个上,有A_6^1种,其余人全排列,共有$A_6^1\cdot A_6^1\cdot A_6^6$种.由分类加法计数原理,共有$A_7^7+A_6^1\cdot A_6^1\cdot A_6^6=30\ 960$(种)排法.

方法二:(特殊位置法)先排最左边,除去甲外,有A_7^1种,余下7个位置全排,有A_7^7种,乙在最右边时有$A_6^1\cdot A_6^6$种排法,因此共有$A_7^1\cdot A_7^7-A_6^1\cdot A_6^6=30\ 960$(种)排法.

方法三:(间接法)8个人全排列,共A_8^8种,其中,不符合条件的有甲在最左边时,有A_7^7种,乙在最右边时,有A_7^7种,其中都包含了甲在最左边,同时乙在最右边的情形,有A_6^6种.因此共有$A_8^8-2A_7^7+A_6^6=30\ 960$(种)排法.

考点二

导入　解:排数问题的特点是每个位置一定要排上一个数,因此一般按位置分析.排数时除排队时遇到的条件外,还有一些数字本身的条件,如0不能排在首位、奇偶数、大小等,解题时要加以重视.

例2　解:(1)特殊位置法.首先从1,3,5中选一个排在个位,有$A_3^1=3$(种)排法,

然后从剩余4个数(不选0)中选一个排在首位,有$A_4^1=4$(种)排法,

再将其余4个数全排列,共有$A_4^4=24$(种)排法.

根据分步乘法计数原理知,共有$3\times4\times24=288$(个)六位奇数.

(2)当个位为0时,其他三位只需从5个数中任选3个排列,共有A_5^3种排法;

当个位为5时,首位有4种排法,其余两位有A_4^2种排法.

由分类加法计数原理可得,共有$A_5^3+4A_4^2=108$(个).

(3)若首位是3,4,5,则其余五位全排列,共有$3A_5^5$个.

若首位是2,则当万位是3,4,5时,有$3A_4^4$个;

当万位是1,千位是3,4,5时,有$3A_3^3$个;

当万位是1,千位是0时,若百位是5,则有A_2^2个,

若百位是4,则十位为5,只有1个.

由分类加法计数原理可知,共有$3A_5^5+3A_4^4+3A_3^3+A_2^2+1=453$(个).

变式　解:解法一:用分步计数原理,

所求的三位数的个数是$A_9^1\cdot A_9^2=9\times9\times8=648$.

解法二:符合条件的三位数可以分成三类,每一位数字都不是0的三位数有A_9^3个,个位数字是0的三位数有A_9^2个,十位数字是0的三位数有A_9^2个,

由分类计数原理,符合条件的三位数的个数是$A_9^3+A_9^2+A_9^2=648$.

解法三:从0到9这10个数字中任取3个数字的排列数为A_{10}^3,其中以0为排头的排列数为A_9^2,因此符合条件的三位数的个数是$A_{10}^3-A_9^2=648$.

拓展　解:比43 251大的数有下列几类:

①万位数是5的有$A_4^4=24$(个);

②万位数是4、千位数是5的有$A_3^3=6$(个);

③万位数是4、千位数是3、百位数是5的有$A_2^2=2$(个).

所以比43 251大的数共有$A_4^4+A_3^3+A_2^2=32$(个),所以43 251是第$120-32=88$(项).

考点三

例3　解:先考虑组成一元二次方程的问题.首先确定a,只能从1,3,5,7中选1个,有A_4^1种方法,然后从余下的4个数中任选2个作b,c,有A_4^2种方法.

由分步乘法计数原理知,共组成一元二次方程$A_4^1\cdot A_4^2=48$(个).

方程要有实根,必须满足$\Delta=b^2-4ac\geqslant0$.

分类讨论如下:

当$c=0$时,a,b可以从1,3,5,7中任取2个,有A_4^2种方法.

当$c\neq0$时,分析判别式知b只能取5,7中的1个,

当b取5时,a,c只能取1,3这2个数,有A_2^2种方法;

当b取7时,a,c可取1,3或1,5这两组数,有$2A_2^2$种方法.

由分类加法计数原理知,有实根的一元二次方程共有

$A_4^2+A_2^2+2A_2^2=18$(个).

变式　C ［解析］爸爸的排法有A_2^2种,两个小孩排在一起可看成一个整体,有A_2^2种排法,妈妈和孩子有A_3^3种排法,

∴排法种数为$A_2^2A_2^2A_3^3=24$.

［小结］实际问题中,既要能观察出是排列问题,又要能搞清哪些是特殊元素,还要根据问题进行合理分类、分步,选择合适的解法.因此需做一定量的排列应用题,逐渐掌握解决问题的基本思想.

拓展　B ［解析］先不考虑小品类节目是否相邻,保证歌舞类节目不相邻的排法共有$A_3^3\cdot A_4^3=144$(种),再剔除小品类节目相邻的情况,共有$A_2^2\cdot A_2^2\cdot A_3^3=24$(种),于是符合题意的排法共有$144-24=120$(种).

【当堂自测】

1. C ［解析］固定丙站在最左边,除甲、乙外,其余4人的排列数为A_4^4,再让甲、乙去插5个空位,则有A_5^2种排法,故不同的排法有$A_4^4A_5^2=480$(种).

2. C ［解析］将甲、乙两人视为一个整体与其余4人排列,有

A_5^5 种排列方法，甲、乙两人可互换位置，所以总的排法有 $A_2^2A_5^5=240$(种).

3. D ［解析］将甲、乙看作一个“元素”与另外两人组成三个“元素”，分配到三个展台，共有 $A_3^3=6$(种)不同的分配方法.

4. B ［解析］当五位数的万位为 4 时，个位可以是 0,2，此时满足条件的偶数共有 $2A_4^3=48$(个)；当五位数的万位为 5 时，个位可以是 0,2,4，此时满足条件的偶数共有 $3A_4^3=72$(个). 所以比 40 000 大的偶数共有 $48+72=120$(个).

5. 30 ［解析］0 排在个位的三位数有 $A_4^2=12$(个)，2 或 4 在个位的三位数各有 $3\times3=9$(个)，所以共有 $12+2\times9=30$(个).

1.2.2 组合

第 1 课时 组合的概念及组合数公式

【预习探究】

1. n 合成一组

思考 解：共同点：都要从 n 个不同元素中任取 m 个元素.

不同点：排列与元素的顺序有关，而组合与元素的顺序无关.

讨论 解：(1)中事件为“从 3 个不同的元素中，没有重复地取出 2 个，按班长、团支书的顺序排成一列”，与顺序有关，是排列问题.

(2)中事件为“从 3 个不同的元素中，没有重复地取出 2 个，合成一组”，与顺序无关，是组合问题.

探究 解：“abc”与“bca”所含元素相同，但元素的顺序不同，故它们是相同的组合，但不是相同的排列. 组合是选择的结果，排列是先选再排的结果.

知识点二

1. C_n^m

思考 解：组合数公式的推导方法是一种非常重要的解题方法，特别是在以后解决排列、组合的综合问题时，一般都是按照“先取后排”(先组合后排列)的思路解决的.

探究 解：从 4 个不同元素中取出 3 个元素的组合和排列如下：

组合		排列					
abc	→	abc，	bac，	cab，	acb，	bca，	cba
abd	→	abd，	bad，	dab，	adb，	bda，	dba
acd	→	acd，	cad，	dac，	adc，	cda，	dca
bcd	→	bcd，	cbd，	dbc，	bdc，	cdb，	dcb

由此可知，每一个组合都对应着 6 个不同的排列，因此，求从 4 个不同元素中取出 3 个元素的排列数 A_4^3，可以分如下两步：①考虑从 4 个不同元素中取出 3 个元素的组合，共有 C_4^3 个；②对每一个组合的 3 个不同元素进行全排列，各有 A_3^3 种方法. 由分步计数原理得 $A_4^3=C_4^3\cdot A_3^3$，所以 $C_4^3=\dfrac{A_4^3}{A_3^3}=4$.

知识点三

思考 解：求组合数时，当 m 较大时直接应用公式较麻烦，可用性质 1 进行计算，即 $C_{10}^8=C_{10}^2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$.

讨论 解：(1)正确；(2)错误，事实上，若 $C_n^m=C_n^k$，则 $m=k$ 或 $m+k=n$.

【考点类析】

考点一

例 1 解：(1)飞机票与起点、终点有关，有顺序，是排列问题.

(2)票价与起点、终点无关，没有顺序，是组合问题.

(3)单循环比赛要求每两支球队之间只打一场比赛，没有顺序，是组合问题.

(4)冠、亚军是有顺序的，是排列问题.

(5) 3 人分别担任三个不同职务，有顺序，是排列问题.

(6) 3 人参加某项相同劳动，没有顺序，是组合问题.

考点二

例 2 解：(1)$3C_8^3-2C_5^2=3\times\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}-2\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=148$.

(2)$\because\begin{cases}38-n\leqslant3n,\\3n\leqslant21+n,\end{cases}\therefore 9.5\leqslant n\leqslant10.5$，$\because n\in\mathbf{N}^*$，$\therefore n=10$，

$\therefore C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}=C_{30}^{28}+C_{31}^{30}=C_{30}^2+C_{31}^1=\dfrac{30\times29}{2\times1}+31=466$.

(3)方法一：原式 $=C_3^3+C_5^4-C_4^4+C_6^4-C_5^4+\cdots+C_{11}^4-C_{10}^4=C_{11}^4=330$.

方法二：原式 $=C_4^4+C_4^3+C_5^3+\cdots+C_{10}^3=C_5^4+C_5^3+\cdots+C_{10}^3=C_6^4+C_6^3+\cdots+C_{10}^3=\cdots=C_{10}^4+C_{10}^3=C_{11}^4=330$.

(4)证明：方法一，

$$\begin{aligned}左边&=\frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}+\frac{n!}{(m-1)!\,(n-m+1)!}+\frac{2n!}{m!\,(n-m)!}\\&=\frac{n!}{(m+1)!\,(n-m+1)!}[(n-m)(n-m+1)+m(m+1)+2(m+1)(n-m+1)]\\&=\frac{n!}{(m+1)!\,(n-m+1)!}(n+2)(n+1)\\&=\frac{(n+2)!}{(m+1)!\,(n-m+1)!}\\&=C_{n+2}^{m+1}\\&=右边.\end{aligned}$$

原结论得证.

方法二，利用公式 $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$ 推得

左边 $=(C_n^{m+1}+C_n^m)+(C_n^m+C_n^{m-1})=C_{n+1}^{m+1}+C_{n+1}^m=C_{n+2}^{m+1}=$ 右边.

考点三

例 3 (1)A (2)10 20 (3)①45 ②90 ［解析］(1)由于集合中的元素是没有顺序的，一个含有 3 个元素的子集就是一个从 $\{0,1,2,3\}$ 中取出 3 个元素的组合，这是一个组合问题，组合数是 $C_4^3=4$.

(2)从五个点中任取两个点恰好连成一条线段，这两个点没有顺序，所以是组合问题，连成的线段共有 $C_5^2=10$(条). 再考虑有向线段的问题，这时两个点的先后排列次序不同，则对应不同的有向线段，所以是排列问题，排列数是 $A_5^2=20$，所以有向线段共有 20 条.

(3)①从 10 名教师中选 2 名去参加会议的选法数，就是从 10 个不同元素中取出 2 个元素的组合数，即 $C_{10}^2=\dfrac{10\times9}{2\times1}=45$(种).

②从 6 名男教师中选 2 名的选法有 C_6^2 种，从 4 名女教师中选 2 名的选法有 C_4^2 种. 根据分步乘法计数原理，共有不同的选法 $C_6^2\cdot C_4^2=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{4\times3}{2\times1}=90$(种).

【当堂自测】

1. D ［解析］A 是组合数公式；B 是组合数性质；由 $\dfrac{m+1}{n+1}C_{n+1}^{m+1}=\dfrac{m+1}{n+1}\times\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!}=C_n^m$ 得 C 中等式正确，D 中等式错误.

2. B ［解析］因为 $C_n^2=28$，所以 $\dfrac{1}{2}n(n-1)=28$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=8$.

3. C ［解析］分两类，A 类选修课选 1 门，B 类选修课选 2 门，或者 A 类选修课选 2 门，B 类选修课选 1 门，因此，共有 $C_3^1\cdot C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1=45$(种)选法.

4. 20 ［解析］若三位数的个位为 0，则有 $2\times2\times A_2^2=8$(个)；若十位为 0，则有 $C_2^1\cdot C_2^1=4$(个)；

若这个三位数没有 0，则有 $C_2^1 \cdot C_2^1 A_2^2 = 8$（个）.
综上，要求的三位偶数的个数为 $8+8+4=20$.

5. $\frac{15}{128}$ ［解析］含有 10 个元素的集合的全部子集数 $S=2^{10}$，由 3 个元素组成的子集数 $T=C_{10}^3$，所以 $\frac{T}{S}=\frac{C_{10}^3}{2^{10}}=\frac{15}{128}$.

第 2 课时　组合应用问题

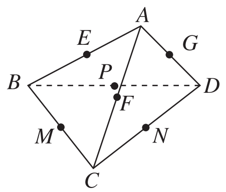
【考点类析】

考点一

例 1　解：(1)第一步：选 3 名男运动员，有 C_6^3 种选法.
第二步：选 2 名女运动员，有 C_4^2 种选法.
共有 $C_6^3 \cdot C_4^2=120$（种）选法.
(2)方法一：至少有 1 名女运动员包括以下几种情况：
1 女 4 男，2 女 3 男，3 女 2 男，4 女 1 男.
由分类加法计数原理可得共有 $C_4^1C_6^4+C_4^2C_6^3+C_4^3C_6^2+C_4^4C_6^1=246$（种）选法.
方法二："至少有 1 名女运动员"的反面为"全是男运动员"，可用间接法求解.
从 10 人中任选 5 人有 C_{10}^5 种选法，其中全是男运动员的选法有 C_6^5 种，
所以"至少有 1 名女运动员"的选法为 $C_{10}^5-C_6^5=246$（种）.
(3)方法一（直接法）：可分类求解.
"只有男队长"的选法为 C_8^4；"只有女队长"的选法为 C_8^4；
"男、女队长都入选"的选法为 C_8^3.
所以共有 $2C_8^4+C_8^3=196$（种）选法.
方法二（间接法）：从 10 人中任选 5 人有 C_{10}^5 种选法，
其中不选队长的方法有 C_8^5 种，所以"至少有 1 名队长"的选法为 $C_{10}^5-C_8^5=196$（种）.
(4)当有女队长时，其他人任意选，共有 C_9^4 种选法. 不选女队长时，必选男队长，共有 C_8^4 种选法，其中不含女运动员的选法有 C_5^4 种，所以不选女队长时的选法共有 $(C_8^4-C_5^4)$ 种. 所以既有队长，又有女运动员的选法共有 $C_9^4+(C_8^4-C_5^4)=191$（种）.

变式　A ［解析］由分类加法计数原理知，两类配餐的搭配方法之和即为所求，所以每天不同午餐的搭配方法总数为 $C_4^2C_7^2+C_4^1C_7^2=210$（种）.

［小结］组合问题常有以下两类题型：
(1)"含有"或"不含有"某些元素的组合题型："含"，则先将这些元素取出，再由另外元素补足；"不含"，则先将这些元素剔除，再从剩下的元素中去选取.
(2)"至少"或"最多"含有几个元素的题型：若直接法分类复杂时，逆向思维，间接求解.



拓展　解：(1)如图所示，在含顶点 A 的四面体的 3 个面上，除点 A 外都有 5 个点，从中任意取出 3 个点必与点 A 共面，共有 $3C_5^3$ 种取法；
在含顶点 A 的 3 条棱上各有 3 个点，它们与所对的棱的中点共面，共有 3 种取法. 根据分类加法计数原理，与顶点 A 共面的 3 个点的取法有 $3C_5^3+3=33$（种）.
(2)如图所示，从 10 个点中取 4 个点的取法有 C_{10}^4 种，减去 4 点共面的取法种数就可以得到结果.
从四面体同一个面上的 6 个点中取出 4 点必定共面，有 $4C_6^4=60$（种）；
四面体的每一条棱上的 3 个点与相对的棱的中点共面，共有 6 种共面情况；
从 6 条棱的 6 个中点中取 4 个点时有 3 种共面情况.
故 4 点不共面的取法有 $C_{10}^4-(60+6+3)=141$（种）.

考点二

例 2　解：(1)这是"均匀分组"问题，一共有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$（种）方法.
(2)这是"不均匀分组"问题，一共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$（种）方法.
(3)先分组，再分配. 在(1)的基础上再将 3 组进行全排列，所以一共有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3=90$（种）方法.
(4)先分组，再分配. 在(2)的基础上再进行全排列，所以一共有 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$（种）方法.
(5)可以分为三类情况：①按(3)中的情况分配，有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}A_3^3=90$（种）方法；②按(4)中的情况分配，有 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$（种）方法；③按一人一本，一人一本，一人四本的情况分配，有 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3=90$（种）方法.
所以一共有 $90+360+90=540$（种）方法.

变式　36 ［解析］先将 4 名大学生分成 3 组，共 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}$ 种分法，再将 3 组分到 3 个乡镇，共 A_3^3 种安排方法，所以总分配方案为 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3=36$（种）.

［小结］"分组"和"分配"是两类不同的问题. "分组"没有顺序，而"分配"是有顺序的. 对均匀分组问题要注意"消去顺序".

拓展　解：(1)把 4 个不同的球分三组，共 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}$ 种分法，对每种分法分成的三组再放入 4 个盒中的 3 个盒子，共 A_4^3 种放法，所以总的放法为 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2} \cdot A_4^3=144$（种）.
(2)把 4 个不同的球分两组，可分成(3，1)，(2，2)两类. 第一类是不平均分组，有 $C_4^3C_1^1$ 种方法；第二类是平均分组，有 $\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$ 种方法. 再将分成的两组放入两个盒子中有 A_4^2 种方法，故共有 $\left(C_4^3C_1^1+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right) \cdot A_4^2=84$（种）.

考点三

例 3　解：(1)先从 8 名学生中任选 5 名，共有 C_8^5 种选法，其中女生比男生多的情况有选 2 名男生和 3 名女生，共有 $C_5^2 \cdot C_3^3$ 种选法，所以女生少于男生的选法为 $(C_8^5-C_5^2 \cdot C_3^3)$ 种. 再让选出的 5 名学生分别担任 5 门不同学科的课代表，有 A_5^5 种方法.
由分步乘法计数原理知，共有 $(C_8^5-C_5^2 \cdot C_3^3) \cdot A_5^5=5520$（种）不同的方法.
(2)从剩余 7 人中选出 4 人分别担任另 4 门不同学科的课代表，共有 $C_7^4 \cdot A_4^4=840$（种）不同的方法.
(3)先安排男生乙，即从除数学外的另 4 门学科中选 1 门让男生乙担任其课代表，再从剩下的 7 人中选 4 人担任另外 4 门学科的课代表，共有 $C_4^1 \cdot A_7^4=3360$（种）不同的方法.

变式 1　B ［解析］由于元素个数多于位置个数，故先分堆再分位置，分两步完成. 第一步，从 4 名志愿者中选出 2 名志愿者作为一组，其余 2 名志愿者各自为一组，共有 C_4^2 种选法；第二步，将上述三组与 3 个路口对应，共有 A_3^3 种分配方案，故不同的分配方案种数为 $C_4^2A_3^3=36$. 故选 B.

变式 2　解：由于 $10=1+2+3+4=1+1+4+4=2+2+3+3$，因此问题可以分成三类.
第一类，当取出的 4 张卡片分别标有数字 1，2，3，4 时，不同的排法有 $C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot A_4^4=384$（种）；
第二类，当取出的 4 张卡片分别标有数字 1，1，4，4 时，不同的排法有 $C_2^2 \cdot C_2^2 \cdot A_4^4=24$（种）；
第三类，当取出的 4 张卡片分别标有数字 2，2，3，3 时，不同的排法有 $C_2^2 \cdot C_2^2 \cdot A_4^4=24$（种）.
根据分类加法计数原理，满足题意的排法有 $384+24+24=432$（种）.

［小结］排列组合的综合题目，一般是先取出符合要求的元素组合（分组），再对取出的元素排列，"先取"按被取元素的类别进行分解，"后排"按特殊元素（位置）进行分解.

拓展　解:(1)先排前 4 次测试,只能取正品,有 A_6^4 种不同的测试方法,再从 4 件次品中选 2 件排在第 5 和第 10 的位置上测试,有 $C_4^2 \cdot A_2^2=A_4^2$(种)测法,再排余下 4 件的测试位置,有 A_4^4 种测法.所以共有不同测试方法 $A_6^4 \cdot A_4^2 \cdot A_4^4=103\ 680$(种).

(2)第 5 次测试恰为最后一件次品,另 3 件在前 4 次中出现,从而前 4 次中有一件正品出现,所以共有不同测试方法 $C_4^1 \cdot (C_6^1 \cdot C_3^3)A_4^4=576$(种).

【当堂自测】

1. C [解析] 由题意知,选 2 名男医生、1 名女医生的方法有 $C_6^2C_5^1=75$(种).
2. B [解析] 先从 7 人中安排 3 人在周六参加活动,再从剩余 4 人中安排 3 人在周日参加活动,则安排方案共有 $C_7^3C_4^3=140$(种).
3. A [解析] 分 3 类完成:男生甲参加,女生乙不参加,有 C_5^3 种选法;男生甲不参加,女生乙参加,有 C_5^3 种选法;两人都不参加,有 C_5^4 种选法.所以共有 $2C_5^3+C_5^4=25$(种)不同的选派方案.
4. B [解析] 先排甲工程队,则有 C_4^1 种情况,其他 4 个元素在 4 个位置上的排法为 A_4^4 种,故总方案为 $C_4^1A_4^4$ 种.
5. 72 [解析] 根据题意,分两种情况讨论:
①甲、乙中只有 1 人被选中,需要从甲、乙中选出 1 人担任后三项工作中的一项,由其他三人担任剩余的三项工作,共有 $C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot A_3^3=36$(种)分配方案.
②甲、乙两人都被选中,则在后三项工作中选出两项由甲、乙担任,从其他三人中选出 2 人担任剩余的两项工作,共有 $C_3^2 \cdot A_2^2 \cdot C_3^2 \cdot A_2^2=36$(种)分配方案.
综上可得,共有 $36+36=72$(种)不同的分配方案.

1.3　二项式定理

1.3.1　二项式定理

【预习探究】

知识点一

(1)$n+1$　(2)降幂排列　升幂排列

思考　解:二项式系数与项的系数是完全不同的两个概念.二项式系数是指 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$,它只与次数 n 及各项的序号有关,而与 a,b 的值无关;而项的系数是指该项中除变量外的常数部分,它不仅与各项的序号有关,而且也与 a,b 的值有关.

讨论　(1)×　(2)×　(3)√　(4)√　[解析](1)$(a+b)^n$ 的展开式中有 $n+1$ 项.
(2)$(a+b)^n$ 的展开式的第 1 项为 a^n,$(b+a)^n$ 的展开式的第 1 项为 b^n,二者不同.
(3)abc^2 是含 a,b,c 的四次项,是 $(a+b+c)^4$ 的展开式中的项.
(4)$(a+b+c)^5$ 的展开式中含 ab^2c^2 项的系数可以看成是从 5 个括号中取一个选 a,再从剩下的取 2 个选 b,其余选 c 的方法数,有 $C_5^1C_4^2C_2^2$ 种选法,故含 ab^2c^2 项的系数为 $C_5^1C_4^2C_2^2$.

知识点二

$k+1$　$C_n^ka^{n-k}b^k$

思考　解:不同.$(a+b)^n$ 的展开式中第 $k+1$ 项为 $C_n^ka^{n-k}b^k$,而 $(b+a)^n$ 的展开式中第 $k+1$ 项为 $C_n^kb^{n-k}a^k$.

讨论　(1)×　(2)×　(3)√

【考点类析】

考点一

例 1　(1)-8　(2)$x^{10}-5x^7+10x^4-10x+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^5}$　(3)44

[解析](1)$\because T_{r+1}=2^rC_4^rx^r$,$\therefore a_1=2^1\times C_4^1=8$,$a_2=2^2\times C_4^2=24$,$a_3=2^3\times C_4^3=32$,$a_4=2^4\times C_4^4=16$,$\therefore a_1-2a_2+3a_3-4a_4=-8$.

(2)$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5=C_5^0(x^2)^5+C_5^1(x^2)^4\left(-\frac{1}{x}\right)^1+C_5^2(x^2)^3\left(-\frac{1}{x}\right)^2+C_5^3(x^2)^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^3+C_5^4x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4+C_5^5\left(-\frac{1}{x}\right)^5=x^{10}-5x^7+10x^4-10x+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^5}$.

(3)$\because(1+\sqrt{3})^4=1+C_4^1\times(\sqrt{3})^1+C_4^2\times(\sqrt{3})^2+C_4^3\times(\sqrt{3})^3+C_4^4\times(\sqrt{3})^4=1+4\sqrt{3}+18+12\sqrt{3}+9=28+16\sqrt{3}$,$\therefore a=28,b=16$,$\therefore a+b=28+16=44$.

考点二

导入　解:(1)由 $T_{2+1}=C_4^2a^2(2b)^2=24a^2b^2$ 知,展开式中第 3 项为 $24a^2b^2$,第 3 项的系数为 24,第 3 项的二项式系数是 $C_4^2=6$.
(2)$(1-x)^5$ 的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(-x)^r=(-1)^rC_5^r\cdot x^r$,求展开式中含 x^3 项的系数只需令 $r=3$,则含 x^3 项的系数为 $-C_5^3=-10$.

例 2　(1)B　(2)D　(3)1080　[解析](1)$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^rx^{2(5-r)}\cdot(-1)^rx^{-r}=(-1)^rC_5^rx^{10-3r}$,令 $10-3r=4$,得 $r=2$,
$\therefore$含 x^4 的项的系数为 $(-1)^2\times C_5^2=10$.

(2)$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_6^rx^{3-\frac{3r}{2}}$,令 $3-\frac{3r}{2}=0$,得 $r=2$,$\therefore$常数项为 $T_3=C_6^2\times(-1)^2=15$.

(3)$\left(x+\frac{4}{x}+y+4\right)^6=\left[\frac{(x+2)^2}{x}+y\right]^6$ 的展开式中含 y 的项必从 $C_6^1\frac{(x+2)^{10}}{x^5}y$ 中得到,所求含 x^3y 的系数为 $6(x+2)^{10}$ 的展开式中含 x^8 的项的系数,即为 $6\times C_{10}^2\times 2^2=1080$.

变式　解:(1)$T_5=T_{4+1}=C_8^4(2x^2)^{8-4}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^4=C_8^4\cdot 2^4\cdot x^{\frac{20}{3}}$,
所以第 5 项的二项式系数是 $C_8^4=70$,第 5 项的系数是 $C_8^4\cdot 2^4=1120$.

(2)$\left(2x^2-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的通项是 $T_{r+1}=C_8^r(2x^2)^{8-r}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=(-1)^rC_8^r\cdot 2^{8-r}\cdot x^{16-\frac{7}{3}r}$.
由题意,得 $16-\frac{7}{3}r=2$,解得 $r=6$,因此,含 x^2 的项的系数是 $(-1)^6C_8^6\cdot 2^{8-6}=112$.

[小结] 利用二项展开式的通项求二项展开式中具有某种特征的项是关于二项式定理的一类典型题型.常见的有求二项展开式中的第 k 项、常数项、含某字母的 r 次方的项等,通常解法就是根据通项确定 T_{k+1} 中 k 的值或取值范围以满足题设的条件.

拓展　解:(1)由已知可得 $C_n^0+C_n^2\cdot\frac{1}{2^2}=2C_n^1\cdot\frac{1}{2}$,即 $n^2-9n+8=0$,解得 $n=8$ 或 $n=1$(舍去).
故 $T_{k+1}=C_8^k(\sqrt{x})^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^k=C_8^k\cdot 2^{-k}\cdot x^{4-\frac{3}{4}k}$,
令 $4-\frac{3}{4}k=1$,得 $k=4$,所以含 x 的项为 $T_5=C_8^4\times 2^{-4}x=\frac{35}{8}x$.

(2)令 $4-\frac{3}{4}k\in\mathbf{Z}$,且 $0\leqslant k\leqslant 8$,则 $k=0$ 或 $k=4$ 或 $k=8$,所以展开式中的有理项分别为 $T_1=x^4$,$T_5=\frac{35}{8}x$,$T_9=\frac{1}{256x^2}$.

考点三

例 3　(1)D　(2)C　(3)-20　[解析](1)由二项式定理得 $(1+x)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot x^r$,所以 $(1+ax)(1+x)^5$ 的展开式中含 x^2 的项的系数为 $C_5^2+C_5^1\cdot a=5$,所以 $a=-1$,故选 D.
(2)$(1+2x)^3(1-x)^4$ 的展开式中含 x 项的系数是由两个因式相乘而得到的,即第一个因式的常数项和一次项分别乘第二个因式的一次项与常数项,为 $C_3^0\cdot(2x)^0\cdot C_4^1\cdot(-x)^1+C_3^1\cdot(2x)^1\cdot C_4^0\cdot(-x)^0$,其系数为 $C_3^0\times C_4^1\times(-1)+C_3^1\times 2\times C_4^0=-4+6=2$.

(3)由二项展开式的通项公式可知,含 x^2y^7 的项可表示为 $x\cdot C_8^7xy^7-y\cdot C_8^6x^2y^6$,故 $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为 $C_8^7-C_8^6=C_8^1-C_8^2=8-28=-20$.

【当堂自测】

1. C [解析] 逆用二项式定理,将 1 看成公式中的 a,-2 看成公式中的 b,可得原式 $=(1-2)^n=(-1)^n$.
2. B [解析] $(1+2x)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^r$,令 $r=2$,得 x^2 的系数为 40.
3. C [解析] $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{24}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{24}^r(\sqrt{x})^{24-r}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_{24}^rx^{12-\frac{5}{6}r}$,故当 $r=0,6,12,18,24$ 时,幂指数为整数,共 5 项.
4. C [解析] 由于 $\left(x-\frac{1}{ax}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r\cdot x^{7-r}\cdot(-1)^r\cdot(ax)^{-r}=(-1)^r\cdot C_7^r\cdot a^{-r}\cdot x^{7-2r}$. 令 $7-2r=1$,得 $r=3$,故展开式中含 x 项的系数为 $(-1)^3\cdot C_7^3\cdot a^{-3}=280$,$\therefore a=-\frac{1}{2}$,故选 C.
5. $\frac{1}{2}$ [解析] 设通项为 $T_{r+1}=C_{10}^rx^{10-r}a^r$,令 $10-r=7$,

$\therefore r=3$,$\therefore x^7$ 的系数为 $C_{10}^3a^3=15$,$\therefore a^3=\frac{1}{8}$,$\therefore a=\frac{1}{2}$.

1.3.2 "杨辉三角"与二项式系数的性质

【预习探究】

知识点一

1. 杨辉三角 2. 逐渐增大 逐渐减小 3. 两个数的和

知识点二

思考 解:二项式系数先递增再递减. 因为 $C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!\,k}=C_n^{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{k}$,所以 C_n^k 相对于 C_n^{k-1} 的增减情况由 $\frac{n-k+1}{k}$ 决定. 当 $\frac{n-k+1}{k}>1$,即 $k<\frac{n+1}{2}$ 时,二项式系数是逐渐增大的;当 $k>\frac{n+1}{2}$ 时,二项式系数是逐渐减小的,且系数呈对称性.

探究 解:当 n 为偶数时,正中间一项的二项式系数最大,即为 $C_n^{\frac{n}{2}}$;当 n 为奇数时,中间两项的二项式系数同时最大,即为 $C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$.

【考点类析】

考点一

例 1 B [解析] $\because a=C_{2m}^m=\frac{2m(2m-1)\cdots(m+1)}{m!}$,$b=C_{2m+1}^m=\frac{(2m+1)\cdot 2m\cdot\cdots\cdot(m+2)}{m!}$,$13a=7b$,

$\therefore 13(m+1)=7(2m+1)$,$\therefore m=6$.

例 2 解:(1)$\because C_n^4+C_n^6=2C_n^5$,$\therefore n^2-21n+98=0$,$\therefore n=7$ 或 $n=14$.

当 $n=7$ 时,展开式中二项式系数最大的项是第 4 项和第 5 项,

$\therefore$ 第 4 项的系数为 $C_7^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2^3=\frac{35}{2}$,

第 5 项的系数为 $C_7^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2^4=70$.

当 $n=14$ 时,展开式中二项式系数最大的项是第 8 项,

$\therefore$ 第 8 项的系数为 $C_{14}^7\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\times 2^7=3432$.

(2)$\because C_n^0+C_n^1+C_n^2=79$,$\therefore n^2+n-156=0$,

$\therefore n=12$ 或 $n=-13$(舍去). 设 T_{k+1} 项的系数最大,

$\because\left(\frac{1}{2}+2x\right)^{12}=\left(\frac{1}{2}\right)^{12}(1+4x)^{12}$,

$\therefore\begin{cases}C_{12}^k4^k\geqslant C_{12}^{k-1}4^{k-1},\\ C_{12}^k4^k\geqslant C_{12}^{k+1}4^{k+1},\end{cases}$ 解得 $9.4\leqslant k\leqslant 10.4$,又 $k\in\mathbf{N}$,$\therefore k=10$,

$\therefore$ 展开式中系数最大的项为 $C_{12}^{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2^{10}\cdot x^{10}=16\,896x^{10}$.

考点二

例 3 30 [解析] 函数 $f(x)=(x-1)^5=[-2+(x+1)]^5=C_5^0\cdot(-2)^5+C_5^1\cdot(-2)^4\cdot(x+1)^1+\cdots+C_5^5\cdot(-2)^0\cdot(x+1)^5$,

而已知 $f(x)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+a_3(x+1)^3+a_4(x+1)^4+a_5(x+1)^5$,

故有 $a_3+a_4=C_5^3\cdot(-2)^2+C_5^4\cdot(-2)^1=30$.

例 4 解:(1)$\because(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$,

$\therefore$ 常数项 $a_0=1$.

在所给的等式中,令 $x=1$,可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$,

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-2$.

(2)在所给的等式中,令 $x=1$,可得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=-1$①,

令 $x=-1$,可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7=3^7$②,

①$-$②,可得 $a_1+a_3+a_5+a_7=-1094$.

(3)在(2)中,①$+$②,可得 $a_0+a_2+a_4+a_6=1093$.

(4)$\because$ 在 $(1-2x)^7$ 的展开式中,a_0,a_2,a_4,a_6 大于零,而 a_1,a_3,a_5,a_7 小于零,

$\therefore|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_7|=(a_0+a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5+a_7)=2187$.

考点三

导入 解:解决这类问题,必须构造一个与题目条件有关的二项式,二项式定理处理整除问题,通常把底数写成除数(或与除数密切关联的数)与某数的和或差的形式,再用二项式定理展开,只考虑后面(或者是前面)的一或两项就可以了. 要注意余数的范围,如 $a=cr+b$,其中 b 为余数,$b\in[0,r)$,r 是除数,利用二项式定理变形后,若剩余部分是负数要注意转换.

例 5 解:(1)$1995^{10}=(8\times 249+3)^{10}$.

$\because$ 其展开式中除末项为 3^{10} 外,其余的各项均含有 8 这个因数,$\therefore 1995^{10}$ 除以 8 的余数与 3^{10} 除以 8 的余数相同.

又 $\because 3^{10}=9^5=(8+1)^5$,其展开式中除末项为 1 外,其余的各项均含有 8 这个因数,

$\therefore 3^{10}$ 除以 8 的余数为 1,即 1995^{10} 除以 8 的余数为 1.

(2)证明:$3^{2n+2}-8n-9=(8+1)^{n+1}-8n-9=C_{n+1}^0\cdot 8^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot 8^n+\cdots+C_{n+1}^{n+1}-8n-9=C_{n+1}^0\cdot 8^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot 8^n+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\cdot 8^2+(n+1)\times 8+1-8n-9=C_{n+1}^0\cdot 8^{n+1}+C_{n+1}^1\cdot 8^n+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\cdot 8^2$①.

①式中的每一项都含有 8^2 这个因数,故原式能被 64 整除.

变式 证明:$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{5n-1}=\frac{1-2^{5n}}{1-2}=2^{5n}-1=32^n-1=(31+1)^n-1=31^n+C_n^1\cdot 31^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot 31+1-1=31\cdot(31^{n-1}+C_n^1\cdot 31^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1})$,显然括号内的数为正整数,故原式能被 31 整除.

[小结] 用二项式定理解决 a^n+b 整除(或余数)问题时,一般需要先将底数 a 写成除数 m 的整数倍加上或减去 $r(0\leqslant r<m)$的形式,再利用二项展开式求解.

拓展 证明:$n^{n-1}-1=[(n-1)+1]^{n-1}-1=[(n-1)^{n-1}+C_{n-1}^1(n-1)^{n-2}+C_{n-1}^2(n-1)^{n-3}+\cdots+C_{n-1}^{n-2}(n-1)+1]-1=(n-1)^{n-1}+C_{n-1}^1(n-1)^{n-2}+C_{n-1}^2(n-1)^{n-3}+\cdots+C_{n-1}^1(n-1)=(n-1)^2[(n-1)^{n-3}+C_{n-1}^1(n-1)^{n-4}+\cdots+1]$.

$\because n\geqslant 3$,$n\in\mathbf{N}_+$,

$\therefore(n-1)^{n-3}+C_{n-1}^1(n-1)^{n-4}+\cdots+1$ 是正整数.

故 $n^{n-1}-1$ 能被 $(n-1)^2$ 整除.

【当堂自测】

1. C [解析] $2n+1$ 为奇数,展开式中中间两项的二项式系数

最大，分别为第 $\left(\frac{2n+1-1}{2}+1\right)$ 项，第 $\left(\frac{2n+1+1}{2}+1\right)$ 项，即第 $n+1$ 项与第 $n+2$ 项，故选 C.

2. A ［解析］由题意，第 4 项与第 8 项的系数相等，则其二项式系数也相等，$\therefore C_n^3=C_n^7$，由组合数的性质，得 $n=10$，$\therefore$ 展开式中二项式系数最大的项为第 6 项，它也是系数最大的项.

3. D ［解析］令 $x=y=1$，得 $(x+3y)^n$ 的展开式中所有项的系数和为 4^n，$(7a+b)^{10}$ 的展开式中所有项的二项式系数之和为 2^{10}，故 $4^n=2^{10}$，即 $n=5$.

4. C ［解析］令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=1$①. 又 $T_{r+1}=C_4^r(2x)^{4-r}(-1)^r3^r$，$\therefore$ 当 $r=0$ 时，x^4 的系数 $a_4=16$②. 由①－②，得 $a_0+a_1+a_2+a_3=-15$.

5. $1280x^7$ ［解析］令 $f(x)=(x^2+2x)^5\cdot(x-a)^5=a_0+a_1x+\cdots+a_{15}x^{15}$，
则 $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_{15}=3^5\times(1-a)^5=-243$，
解得 $a=2$，此时 $f(x)=(x^2+2x)^5\cdot(x-2)^5=x^5\cdot(x^2-4)^5$，
其展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\times(-4)^r\times x^{15-2r}$，$0\leqslant r\leqslant5$，
当 r 为偶数，即 r 的值为 0，2，4 时，项的系数才可能最大，此时对应的三项分别为 $T_1=x^{15}$，$T_3=160x^{11}$，$T_5=1280x^7$，故所求系数最大的项为 $1280x^7$.

本章总结提升

【知识辨析】

(1)× (2)√ (3)× (4)× (5)× (6)√

【整合创新】

题型一

例 1 (1)B (2)B ［解析］(1)由题意及分类加法计数原理知，共有 $4+3+2=9$(种)选法，故选 B.

(2)由 E 到 F 有 6 种走法，由 F 到 G 有 3 种走法，由分步乘法计数原理知，共 $6\times3=18$(种)走法.

题型二

例 2 (1)D (2)70 (3)1260 ［解析］(1)由题可知，五位数要为奇数，则个位数只能是 1，3，5. 分为两步：先从 1，3，5 三个数中选一个作为个位数，有 C_3^1 种方法；再将剩下的 4 个数字排列，有 A_4^4 种方法. 则满足条件的五位数有 $C_3^1\cdot A_4^4=72$(个).

(2)$\because$ 要求甲、乙分在同一组，$\therefore$ 甲和乙所在的这一组只要从其他 7 个人中选 1 个即可，剩下的 6 个人平均分成两组，是一个平均分组问题，根据分步计数原理得不同分组方法的种数为 $C_7^1\times\frac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}=70$.

(3)方法一(直接法)：当所选 4 个数字没有 0 时，四位数有 $C_5^2C_3^2A_4^4=720$(个)；当所选 4 个数字有 0 时，四位数有 $C_5^2C_3^1A_3^1A_3^3=540$(个). 故一共可以组成 $720+540=1260$(个)符合条件的四位数.

方法二(间接法)：所有"真假"四位数有 $C_5^2C_4^2A_4^4=1440$(个)，"假"四位数是 0 开头的四位数，有 $C_5^2C_3^1A_3^3=180$(个)，故符合条件的四位数有 $1440-180=1260$(个).

变式 (1)A (2)C (3)16 ［解析］(1)由于 a，b 已经选出，故再从剩余的 4 个字母中选出 2 个，方法有 $C_4^2=6$(种).
将 a，b 看作一个整体，与选出的 2 个字母进行排列，$\because a$ 在 b 前面，$\therefore$ 排列方法有 $A_3^3=6$(种)，
根据分步计数原理求得所有的排列方法共有 $6\times6=36$(种)，故选 A.

(2)当安排甲、乙在同一天值班时，则只能安排在 1 月 1 日，此时共有 $C_4^2=6$(种)安排方法；当甲、乙不在同一天值班时，有 $C_4^1\times C_3^1\times(A_2^2+1)=36$(种)安排方法. 故共有 $36+6=42$(种)安排方法.

(3)方法一：分两种情况，即 3 人中 1 女 2 男的选法有 $C_2^1C_4^2$ 种，3 人中 2 女 1 男的选法有 $C_2^2C_4^1$ 种. 据分类加法计数原理知，不同的选法共有 $C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1=16$(种).

方法二：从 6 人中任选 3 人有 C_6^3 种选法，若 3 人均为男生有 C_4^3 种选法，所以至少有 1 位女生入选的不同选法有 $C_6^3-C_4^3=16$(种).

题型三

例 3 (1)10 (2)－2 (3)20 ［解析］(1)展开式的通项为 $T_{r+1}=2^{5-r}C_5^rx^{5-\frac{r}{2}}$，令 $5-\frac{r}{2}=3$，得 $r=4$，故所求系数为 $2C_5^4=10$.

(2)由二项式定理得 $T_{r+1}=C_5^r(ax^2)^{5-r}x^{-\frac{r}{2}}=a^{5-r}C_5^rx^{10-\frac{5r}{2}}$，
令 $10-\frac{5r}{2}=5$，解得 $r=2$，
$\therefore a^{5-2}C_5^2=-80$，解得 $a=-2$.

(3)令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=1$，
再令 $x=0$，得 $a_0=1$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=0$，
又因为 $a_1=-20$，所以得 $a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}=20$.

变式 (1)C (2)A (3)16 4 ［解析］(1)$(x-2y)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot(-2y)^r$，令 $r=2$，得 $T_3=C_6^2\cdot x^4\cdot(-2y)^2=60x^4y^2$，所以 x^4y^2 的系数为 60. 故选 C.

(2)令二项式中的 $x=1$，得展开式中各项系数和为 5^n，
$\because$ 展开式中各项系数和为 625，$\therefore 5^n=625$，$\therefore n=4$，
$\therefore\left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r(2x)^{4-r}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^r=3^r\cdot2^{4-r}\cdot C_4^rx^{4-\frac{3r}{2}}$，令 $4-\frac{3r}{2}=1$，解得 $r=2$，$\therefore$ 展开式中含 x 项的系数为 $9\times4\times C_4^2=216$，故选 A.

(3)由题意，得 a_4 是展开式中的一次项系数，则 $a_4=C_3^2\cdot1^2\cdot C_2^2\cdot2^2+C_3^3\cdot1^3\cdot C_2^1\cdot2^1=16$；$a_5$ 是展开式中的常数项，则 $a_5=C_3^3\cdot1^3\cdot C_2^2\cdot2^2=4$.

第二章 概率

2.1 随机事件的概率

2.1.1 随机事件的概率

2.1.2 概率的意义

【预习探究】

知识点一

一定不会发生 一定会发生 可能发生也可能不发生

思考 解：不能，事件是试验的结果，而在不同条件下试验的结果往往是不一样的. 如常温下水是液态的，能流动，若在零下 10 ℃时，就是不可能事件，在零上5 ℃时，就是必然事件.

知识点二

次数 n_A

探究 解：这种说法不正确. 频率反映了一个随机事件出现的频繁程度，但频率是随机的；而概率是一个确定的值，通常通过大量的重复试验，用随机事件发生的频率作为它的概率的估计值.

知识点三

1. 可能性大小
2. 频率 $f_n(A)$ 概率 $P(A)$ 频率 $f_n(A)$ 概率 $P(A)$
3. 两种可能

讨论 解：不正确. 因为抛 1 次硬币，其结果是随机的，但通过做大量的试验，其结果呈现出一定的规律性，即"正面向上""反面向上"的可能性都为 $\frac{1}{2}$. 连续 5 次正面向上这种结果是可能的，但对下一次试验来说，其结果仍然是随机的，所以出现正面向上和反面向上的可能性还是 $\frac{1}{2}$，不会大于 $\frac{1}{2}$.