参考答案

第一讲　坐标系

一　平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

【预习探究】

知识点一

1. 互相垂直　原点重合　x　横　右　y　纵　上　原点

2. 有序数对　横　纵

思考　解：在平面直角坐标系中，点 P 与有序实数对 (x,y) 具有一一对应关系．即如果给定一点 P，就有唯一的有序实数对 (x,y) 与该点对应；反之，如果给定一个有序实数对 (x,y)，就有唯一的点 P 与之对应．

知识点二

坐标系　方程　其他几何图形

讨论　解：坐标法解题的思路是：在建立坐标系的基础上，把几何问题转化为代数问题，通过代数运算研究几何图形的性质．

坐标法解题的基本步骤是：①建立适当的坐标系，写出已知点的坐标，设出未知点的坐标；②根据题设条件，建立几何图形的方程，通过代数运算解决问题；③用代数运算的结果得出几何问题的结论．

【考点类析】

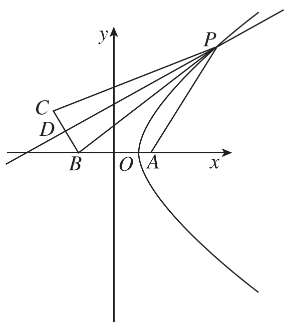
考点一

例 1　解：以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴的正方向，$\overrightarrow{AD}$ 的方向为 y 轴的正方向，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$D(0,2)$，$E(1,2)$，$\therefore \overrightarrow{AE}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2)$，$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-2)+2\times2=2$．

变式　$\sqrt{13}$　［解析］$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-4x+8}=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0+2)^2}$，设 $A(0,1)$，$B(2,-2)$，$M(x,0)$，则 $y=|MA|+|MB|\geqslant|AB|=\sqrt{13}$．

考点二

例 2　解：设 A,B,C,P 分别表示甲舰、乙舰、丙舰和商船．如图所示，以直线 AB 为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(3,0)$，$B(-3,0)$，$C(-5,2\sqrt{3})$．



$\because |PB|=|PC|$，$\therefore$ 点 P 在线段 BC 的垂直平分线上，

易得 $k_{BC}=-\sqrt{3}$，线段 BC 的中点为 $D(-4,\sqrt{3})$，

$\therefore$ 直线 PD 的方程为 $y-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+4)$①．

$\because |PB|-|PA|=4$，

$\therefore$ 点 P 在以 A,B 为焦点的双曲线的右支上．

易知该双曲线右支的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x\geqslant2)$②，

由①②得点 P 的坐标为 $(8,5\sqrt{3})$，

$\therefore k_{PA}=\frac{5\sqrt{3}}{8-3}=\sqrt{3}$．故甲舰行进的方位角为 30°．

变式　解：(1) 设平行四边形的另两个顶点分别为 C,D．

由围墙总长为 8 km，得 $|CA|+|CB|=4>|AB|=2$．

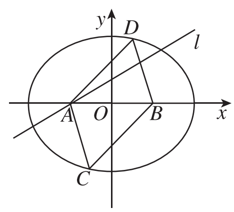
由椭圆的定义知，点 C 的轨迹是以 A,B 为焦点，长轴长 $2a=4$，焦距 $2c=2$ 的椭圆（去除落在直线 AB 上的两点）．

以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系，

则点 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq0)$．

易知点 D 也在此椭圆上，要使平行四边形的面积最大，则 C,D 分别为此椭圆短轴的两个不同端点，此时农艺园的面积 $S=2\sqrt{3}\ \text{km}^2$．

(2) 因为修建农艺园的可能范围在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 内，所以暂不加固水沟的长就是直线 $l:y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 被椭圆截得的弦长，如图所示．



由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$

消去 y，得 $13x^2+8x-32=0$．由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{8}{13}$，$x_1x_2=-\frac{32}{13}$，

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{24\sqrt{3}}{13}$，

所以弦长为 $\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{48}{13}$．

故暂不加固部分的长为 $\frac{48}{13}$ km．

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

【预习探究】

知识点一

1. 坐标压缩变换

2. 坐标伸长变换

3. 坐标伸缩变换

思考 解:1. 经过平行于 x 轴的伸缩变换,周期会变化,振幅不变;经过平行于 y 轴的伸缩变换,周期不变,振幅会变化.

2. 不一定,伸缩变换对原点的位置没有影响,但是会改变除原点外的点的坐标和位置,而象限内的点经过伸缩变换后仍在原来的象限.

知识点二

1. 坐标　代数方法

2. 直线　椭圆　圆　抛物线　双曲线

讨论 解:伸缩变换把直线变为直线,因此六边形经过伸缩变换后,得到的还是一个六边形;伸缩变换不能实现曲线与直线的互换,所以圆经过伸缩变换后,不能变成正方形.

【考点类析】

考点一

例 1 $(2,-3)$ [解析] 根据变换可得 $x'=\frac{1}{2}x=2$, $y'=\frac{1}{3}y=-3$,故伸缩变换后的点的坐标是$(2,-3)$.

变式 $\left(-10,\frac{1}{4}\right)$ [解析] 由伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{5}x,\\y'=4y\end{cases}$得$\begin{cases}x=5x',\\y=\frac{1}{4}y'\end{cases}$①,由题知$\begin{cases}x'=-2,\\y'=1,\end{cases}$代入①得点 P 的坐标为$\left(-10,\frac{1}{4}\right)$.

考点二

例 2 解:由伸缩变换$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$得到$\begin{cases}x=\frac{1}{2}x',\\y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$①

将①代入 $x^2+y^2=5$,得到变换后的图形的方程是

$\left(\frac{1}{2}x'\right)^2+\left(\frac{1}{3}y'\right)^2=5$,即$\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{45}=1$.

因此,经过伸缩变换$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$后,圆 $x^2+y^2=5$ 变成椭圆 $\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{45}=1$.

[点评] 求圆经过伸缩变换后的图形,可先求得变换后的图形的方程,然后再根据方程判断变换后得到什么图形. 在伸缩变换下,圆可以变成椭圆.

变式 解:由伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=3y\end{cases}$得$\begin{cases}x=2x',\\y=\frac{1}{3}y',\end{cases}$

代入$\frac{x^2}{4}+9y^2=1$,得 $x'^2+y'^2=1$,

所以曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=1$.

例 3 解:将$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=\frac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$代入 $x'^2+y'^2=1$,即可得出曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

变式 解:将$\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y\end{cases}$代入$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$,即可得出曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=1$.

考点三

例 4 解:方法一:设伸缩变换公式为 φ:$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$①

把①代入变换后的抛物线方程 $y'^2=9x'$,得

$(\mu y)^2=9(\lambda x)$,即 $\mu^2\cdot y^2=9\lambda\cdot x$.

因为 $y^2=4x$ 与 $\mu^2\cdot y^2=9\lambda\cdot x$ 表示相同的曲线,所以$\frac{\mu^2}{1}=\frac{9\lambda}{4}$,取 $\mu=1$,则 $\lambda=\frac{4}{9}$,得到满足条件的一个伸缩变换为

φ:$\begin{cases}x'=\frac{4}{9}x,\\y'=y.\end{cases}$

方法二:设伸缩变换公式为 φ:$\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$则

$\begin{cases}x=\frac{1}{\lambda}x',\\y=\frac{1}{\mu}y',\end{cases}$将其代入变换前的抛物线方程 $y^2=4x$,得

$\left(\frac{1}{\mu}y'\right)^2=4\left(\frac{1}{\lambda}x'\right)$,即$\frac{1}{\mu^2}y'^2=\frac{4}{\lambda}x'$.

因为 $y'^2=9x'$ 与$\frac{1}{\mu^2}y'^2=\frac{4}{\lambda}x'$表示相同的曲线,所以$\frac{1}{\frac{1}{\mu^2}}=\frac{9}{\frac{4}{\lambda}}$,取 $\mu=1$,则 $\lambda=\frac{4}{9}$,得到满足条件的一个伸缩变换为

φ:$\begin{cases}x'=\frac{4}{9}x,\\y'=y.\end{cases}$

[点评] 求满足图形变换的伸缩变换,即求伸缩变换公式,其关键是分清变换前后的坐标,代入对应的曲线方程,然后比较系数可得 λ,μ 的值.

变式 解:把$\begin{cases}x'=ax,\\y'=3y\end{cases}$代入 $2x'^2+8y'^2=1$,

得 $2\times(ax)^2+8\times(3y)^2=1$,

即 $2a^2x^2+72y^2=1$,

$\therefore 2a^2=50$,$\therefore a=5$.

参考答案

第一讲　坐标系

一　平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

1. B ［解析］$x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=1$，$y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=2$.

2. B ［解析］由平面上两点间的距离公式，得

$|AB|=\sqrt{(2-4)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$，

$|AC|=\sqrt{(-2-4)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{13}$，

$|BC|=\sqrt{(-2-2)^2+(5+1)^2}=2\sqrt{13}$，

所以$|AC|=|BC|$，且$|AC|^2+|BC|^2>|AB|^2$，故选 B.

3. C ［解析］设点 D 的坐标为(x,y). 由$\begin{cases}k_{AB}=k_{DC},\\k_{AD}=k_{BC},\end{cases}$

得$\begin{cases}\dfrac{2-0}{-1-3}=\dfrac{y-1}{x-5},\\\dfrac{2-y}{-1-x}=\dfrac{0-1}{3-5},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$所以点 D 的坐标为$(1,3)$.

4. A ［解析］由题意得$|AB|-|AC|=2<|BC|=4$，所以由双曲线的定义知，顶点 A 的轨迹为以 B,C 为焦点的双曲线的一支（顶点除外），故选 A.

5. C

6. B ［解析］设点 P 的坐标为(x,y). ∵$|PA|=2|PB|$，∴$(x+2)^2+y^2=4[(x-1)^2+y^2]$，即$(x-2)^2+y^2=4$，故点 P 的轨迹是以$(2,0)$为圆心，2 为半径的圆，它的面积为 4π. 故选 B.

7. $x^2+y^2=4(x\neq\pm2)$ ［解析］设 $C(x,y)$，由题意知 $AC\perp BC$，则 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$，则 $\dfrac{y-0}{x-(-2)}\cdot\dfrac{y-0}{x-2}=-1(x\neq\pm2)$，化简得 $x^2+y^2=4(x\neq\pm2)$.

8. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ［解析］设 $A(a,0)$，$B(0,b)$，$P(x,y)$，则$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=3$，即 $a^2+b^2=9$. 因为$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，所以$(x,y)=\dfrac{2}{3}(a,0)+\dfrac{1}{3}(0,b)=\left(\dfrac{2}{3}a,\dfrac{1}{3}b\right)$，即 $x=\dfrac{2}{3}a$，$y=\dfrac{1}{3}b$，所以$\dfrac{9x^2}{4}+9y^2=9$，即$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

9. $x^2-y^2=6$ ［解析］由题意，不妨设 $A(-4,0)$，$B(4,0)$，$C(0,2)$，$D(0,-2)$. 设 $M(x,y)$，则$|MA|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$，$|MB|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，$|MC|=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$，$|MD|=\sqrt{x^2+(y+2)^2}$. ∵$|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$，∴$\sqrt{(x+4)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+2)^2}$，化简得 $x^2-y^2=6$，∴动点 M 的轨迹方程为 $x^2-y^2=6$.

10. **解：**以 O 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OD}$的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向，建立平面直角坐标系，

则 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$D(0,2)$，$P(\sqrt{3},1)$.

依题意得$||MA|-|MB||=|PA|-|PB|=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+1^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2+1^2}=2\sqrt{2}<|AB|=4$，

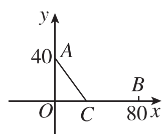
∴曲线 C 是以原点为中心，A,B 为焦点的双曲线.

设实半轴长为 a，虚半轴长为 b，半焦距为 c，

则 $c=2$，$2a=2\sqrt{2}$，∴$a^2=2$，$b^2=c^2-a^2=2$，

∴曲线 C 的方程为$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

11. **解：**A,B 两点如图所示，$A(0,40)$，$B(80,0)$，



∴$|OA|=40$，$|OB|=80$.

设我军舰直行到点 $C(x,0)$处与敌舰相遇，

则$|OC|=x$，$|BC|=|OB|-|OC|=80-x$.

∵敌我两舰速度相同，∴$|AC|=|BC|=80-x$.

在 $Rt\triangle AOC$ 中，$|OA|^2+|OC|^2=|AC|^2$，

即 $40^2+x^2=(80-x)^2$，解得 $x=30$，

∴点 C 的坐标为$(30,0)$.

12. **解：**(1)证明：圆 $C:(x+2)^2+y^2=5$ 的圆心为 $C(-2,0)$，半径为$\sqrt{5}$，直线 $l:mx-y+1+2m=0$ 可化为 $y-1=m(x+2)$，所以直线 l 过定点 $N(-2,1)$，

因为$|CN|=\sqrt{(-2+2)^2+(1-0)^2}=1<\sqrt{5}$，所以直线 l 与圆 C 相交，即直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点.

(2)设点 $M(x,y)$，当 M 与定点 $N(-2,1)$不重合时，因为直线 $l:mx-y+1+2m=0$ 恒过定点 $N(-2,1)$，所以 $CM\perp MN$. 因为$\overrightarrow{CM}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{NM}=(x+2,y-1)$，所以$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{NM}=(x+2)^2+y(y-1)=0$，即$(x+2)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，当 M 与点 $N(-2,1)$重合时，该式也成立，所以 M 的轨迹方程是$(x+2)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，

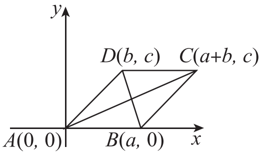
故 M 的轨迹是一个以$\left(-2,\dfrac{1}{2}\right)$为圆心，$\dfrac{1}{2}$为半径的圆.

13. **证明：**如图所示，以顶点 A 为坐标原点，以 AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则$A(0,0)$.

设 $B(a,0)$，$D(b,c)$，由平行四边形的性质得点 C 的坐标为 $(a+b,c)$.

因为 $|AB|^2=a^2$，$|CD|^2=a^2$，$|AD|^2=b^2+c^2$，$|BC|^2=b^2+c^2$，$|AC|^2=(a+b)^2+c^2$，$|BD|^2=(b-a)^2+c^2$，

所以 $|AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=2(a^2+b^2+c^2)$，$|AC|^2+|BD|^2=2(a^2+b^2+c^2)$，所以 $|AB|^2+|CD|^2+|AD|^2+|BC|^2=|AC|^2+|BD|^2$，因此，平行四边形两条对角线的平方和等于四条边的平方和.



2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

1. B ［解析］把 $\begin{cases}x=1,\\y=4\end{cases}$ 代入 $\begin{cases}x'=3x,\\y'=\dfrac{1}{2}y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x'=3,\\y'=2.\end{cases}$ 故选 B.

2. C ［解析］由伸缩变换 $\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}x',\\y=\dfrac{1}{2}y',\end{cases}$

把 $\begin{cases}x'=3\pi,\\y'=-4\end{cases}$ 代入，得 $\begin{cases}x=\pi,\\y=-2,\end{cases}$ 即点 P 的坐标为 $(\pi,-2)$.

3. C ［解析］将 $\begin{cases}x'=5x,\\y'=3y\end{cases}$ 代入 $2x'^2+8y'^2=1$，即可得到曲线 C 的方程为 $2\times(5x)^2+8\times(3y)^2=1$，即 $50x^2+72y^2=1$，故选 C.

4. A　5. B

6. C ［解析］易知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(-1,1)$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=ax,\\y'=y\end{cases}$ 后的点的坐标分别是 $A'(-a,0)$，$B'(a,0)$，$C'(a,1)$，$D'(-a,1)$. 由 $|A'B'|=|A'D'|$，得 $2a=1$，即 $a=\dfrac{1}{2}$.

7. $\begin{cases}x'=x,\\y'=6y\end{cases}$ ［解析］设满足条件的伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\lambda x(\lambda>0),\\y'=\mu y(\mu>0),\end{cases}$ 将其代入 $3x'-y'=6$，得 $3\lambda x-\mu y=6$. 与 $x-2y=2$ 比较系数，得 $\begin{cases}\lambda=1,\\\mu=6,\end{cases}$ 故所求的伸缩变换为 $\begin{cases}x'=x,\\y'=6y.\end{cases}$

8. $x'^2+y'^2=1$ ［解析］由 φ：$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{5}x,\\y'=\dfrac{1}{3}y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=5x',\\y=3y',\end{cases}$ 代入椭圆方程，得 $\dfrac{(5x')^2}{25}+\dfrac{(3y')^2}{9}=1$，即 $x'^2+y'^2=1$.

9. $\dfrac{x'^2}{2}-\dfrac{y'^2}{4}=1$ ［解析］易知伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\y'=y,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=2x',\\y=y',\end{cases}$ 代入双曲线方程，得 $\dfrac{(2x')^2}{8}-\dfrac{y'^2}{4}=1$，整理得 $\dfrac{x'^2}{2}-\dfrac{y'^2}{4}=1$，即为变换后所得到的曲线方程.

10. **解**：由伸缩变换 $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\y'=3y\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2x',\\y=\dfrac{1}{3}y'.\end{cases}$ ①

将①代入 $2x-6y+1=0$，得经过变换后的图形的方程是 $2\times2x'-6\times\dfrac{1}{3}y'+1=0$，即 $4x'-2y'+1=0$.

因此，经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\y'=3y\end{cases}$ 后，直线 $2x-6y+1=0$ 变成直线 $4x'-2y'+1=0$.

11. **解**：将 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$ 代入方程 $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{9}=1$，得 $\dfrac{(2x)^2}{4}-\dfrac{(3y)^2}{9}=1$，化简整理得 $x^2-y^2=1$，即为曲线 C 的方程.

12. **解**：将曲线 $y=\tan x$ 上各点的纵坐标不变，横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$，得到曲线 $y=\tan 2x$，再将曲线 $y=\tan 2x$ 上各点的纵坐标伸长为原来的 3 倍，横坐标不变，得到曲线 $y=3\tan 2x$.

设 $y'=3\tan 2x'$，伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\lambda\cdot x(\lambda>0),\\y'=\mu\cdot y(\mu>0),\end{cases}$

将其代入方程 $y'=3\tan 2x'$，得 $\mu y=3\tan 2\lambda x$，即 $y=\dfrac{3}{\mu}\tan 2\lambda x$，与 $y=\tan x$ 比较系数，得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\\mu=3,\end{cases}$

所以所求的伸缩变换为 $\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\y'=3y.\end{cases}$

13. **解**：(1)设 $P'(x',y')$，由 $\begin{cases}x'=x,\\y'=\dfrac{1}{2}y\end{cases}$ 得 $P(x',2y')$，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{2y'}{x'+2}\cdot\dfrac{2y'}{x'-2}=-1(x'\neq\pm2)$，整理得 P' 的轨迹方程为 $\dfrac{x'^2}{4}+y'^2=1(x'\neq\pm2)$.

(2)易知 $A'(-2,0)$，$B'(2,0)$，则 $k_{P'A'}\cdot k_{P'B'}=\dfrac{y'}{x'+2}\cdot\dfrac{y'}{x'-2}=-\dfrac{1}{4}$.

二　极坐标系

1. 极坐标系的概念

1. D ［解析］与点 $M\left(5,-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 重合的点的极坐标可表示为

$\left(5,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，结合选项知选 D.

2. C 【解析】$P\left(-2,-\frac{\pi}{3}\right)$，即 $P\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$，与 P 重合的点的极坐标可以表示为 $\left(2,2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\left(-2,2k\pi-\frac{\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$，所以点 Q,R,M 与点 P 重合，故选 C.

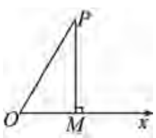
3. B 【解析】与点 $P\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ 关于极点 O 对称的点的极坐标可表示为 $\left(1,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$，故选 B.

4. D 【解析】$\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $\left(-2,-\frac{5\pi}{6}\right)$ 是同一个点，因此 D 不正确.

5. D 【解析】由题易知 $|OA|=5$，$|OB|=2$，$\angle AOB=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\times5\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，故选 D.

6. 4　$4\sin 3$

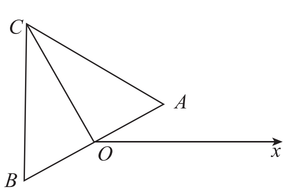
7. $(1,0)$ 【解析】如图所示，O 为极点. 在极坐标系中，点 P 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，则 $|OP|=2$，$\angle xOP=\frac{\pi}{3}$，则 $|OM|=|OP|\cos\frac{\pi}{3}=1$，故点 M 的一个极坐标为 $(1,0)$.



8. $\left(1,\frac{4\pi}{3}\right)$ 或 $\left(7,\frac{\pi}{3}\right)$ 【解析】$\because 0\leqslant\theta<2\pi$，$M\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore$ 在直线 OM 上与点 M 的距离为 4 的点的极坐标为 $\left(1,\frac{4\pi}{3}\right)$ 或 $\left(7,\frac{\pi}{3}\right)$.

9. $\left(2\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 【解析】如图所示，由于 A,B 的极坐标分别为 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(2,\frac{7\pi}{6}\right)$，故极点 O 为线段 AB 的中点，故等边三角形 ABC 的边长为 4，AB 边上的高 $|OC|=2\sqrt{3}$，故点 C 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\left(2\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right)$.



10. **解**：设 O 为极点. 因为 $B\left(-1,\frac{\pi}{3}\right)$，即 $B\left(1,\frac{4\pi}{3}\right)$，所以 $|OA|=3$，$|OB|=1$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理知，

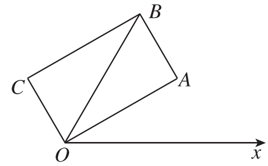
$|AB|=\sqrt{3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{7}$.

11. **解**：如图所示，由题知，$|OA|=\sqrt{3}$，$|OC|=1$.

因为四边形 $OABC$ 为矩形，所以 $|AB|=1$，$BA\perp AO$，

所以 $|OB|=\sqrt{|OA|^2+|AB|^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

$\tan\angle AOB=\frac{|AB|}{|OA|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle xOB=\frac{\pi}{3}$，所以顶点 B 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$.



12. **解**：如图所示，由点 A 与点 $B\left(-4\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 关于极轴所在直线对称，得点 A 的极坐标是 $\left(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

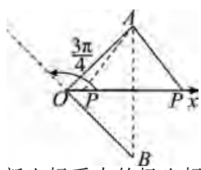
由题意，设点 P 的极坐标为 $(\rho,0)(\rho\geqslant0)$，则在 $\triangle AOP$ 中，

$|OP|^2+|OA|^2-2|OP|\cdot|OA|\cos\frac{\pi}{4}=|PA|^2$，

即 $\rho^2+(4\sqrt{2})^2-2\rho\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5^2$，

化简得 $\rho^2-8\rho+7=0$，解得 $\rho=7$ 或 $\rho=1$.

故所求点 P 的极坐标为 $(7,0)$ 或 $(1,0)$.



13. **解**：(1) 设点 P 在新坐标系中的极坐标为 (ρ,θ)，则有

$\rho=4$，$\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore$ 点 P 在新坐标系中的一个极坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$.

(2) 如图所示，连接 OO'，PO'. 设点 P 在新坐标系中的极坐标为 (ρ,θ).

由点 P 的极坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$，得 $|OP|=4$，$\angle xOP=\frac{\pi}{3}$.

由点 O' 的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$，得 $|OO'|=2\sqrt{3}$，$\angle xOO'=\frac{\pi}{6}$. 在 $\triangle OPO'$ 中，$\angle POO'=\frac{\pi}{6}$，

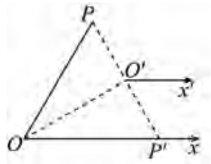
$\therefore |O'P|^2=|OP|^2+|OO'|^2-2|OP|\cdot|OO'|\cos\frac{\pi}{6}=4^2+(2\sqrt{3})^2-2\times4\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4$，即 $\rho=2$.

又由正弦定理得 $\frac{|OO'|}{\sin\angle OPO'}=\frac{|O'P|}{\sin\angle POO'}$，

$\therefore \sin\angle OPO'=\dfrac{2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \angle OPO'=\dfrac{\pi}{3}$.

延长 PO' 交极轴 Ox 于点 P'，则 $\angle OP'P=\pi-\angle OPO'-\angle xOP=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \angle x'O'P=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，即 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

$\therefore$ 点 P 在新坐标系中的一个极坐标为 $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.



2. 极坐标和直角坐标的互化

1. B ［解析］$\because x=\rho\cos\theta=4\cos\dfrac{2\pi}{3}=4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$，$y=\rho\sin\theta=4\sin\dfrac{2\pi}{3}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，$\therefore$ 点 A 的直角坐标为 $(-2,2\sqrt{3})$.

2. A ［解析］$\because$ 点 M 的直角坐标是 $(\sqrt{3},-1)$，$\therefore$ 在 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$ 的条件下，$\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，又点 M 在第四象限，$\therefore \theta=\dfrac{11\pi}{6}$，故选 A.

3. B ［解析］把 A，B 两点的极坐标化为直角坐标，分别是 $(3,3\sqrt{3})$，$(-4,-4\sqrt{3})$. 由直角坐标系的中点坐标公式得，线段 AB 的中点的直角坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

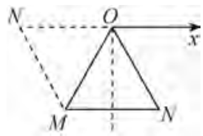
4. B ［解析］将点 A 的极坐标化为直角坐标为 $(2,-2)$，所以点 A 到直线 l：$x+y-2=0$ 的距离为 $\dfrac{|2-2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，故选 B.

5. C ［解析］设顶点 B 的直角坐标为 (x_0,y_0). 把 A，D 两点的极坐标化为直角坐标，得 $A(-\sqrt{2},0)$，$D(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$，则由中点坐标公式得 $\dfrac{-\sqrt{2}+x_0}{2}=-2\sqrt{2}$，$\dfrac{0+y_0}{2}=-2\sqrt{2}$，解得 $x_0=-3\sqrt{2}$，$y_0=-4\sqrt{2}$，故顶点 B 的直角坐标为 $(-3\sqrt{2},-4\sqrt{2})$.

6. A ［解析］把点 Q 的直角坐标化为极坐标，得 $Q\left(5,-\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $|OP|=4$，$|OQ|=5$，$\angle POQ=\dfrac{5\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5\sin\dfrac{2\pi}{3}=5\sqrt{3}$.

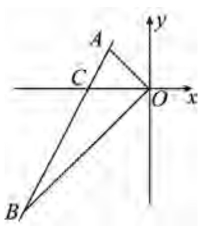
7. $\left(2\sqrt{2},\dfrac{5}{4}\pi\right)$ ［解析］$\because$ 点 $P(x,y)$ 在第三象限的角平分线上，且到横轴的距离为 2，$\therefore x=-2$，$y=-2$，$\therefore \rho=\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{2}$. 又 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=1$，点 P 在第三象限，且 $\theta\in[0,2\pi)$，$\therefore \theta=\dfrac{5}{4}\pi$. 因此，点 P 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\dfrac{5}{4}\pi\right)$.

8. $\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$ ［解析］如图所示，在极坐标系中，由 $\triangle MON$ 是等边三角形，得 $|ON|=|OM|$，$\angle MON=\dfrac{\pi}{3}$，所以点 N 的极坐标为 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 或 $\left(\dfrac{5}{2},-\pi\right)$. 由极坐标与直角坐标的互化公式，得点 N 的直角坐标是 $\left(\dfrac{5}{4},-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$ 或 $\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$.



9. $\dfrac{12}{5}$ ［解析］由极坐标与直角坐标的互化公式可得 $A(2\sqrt{3},2)$，$B\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，所以直线 AB 的方程为 $\dfrac{y-2}{2-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{x-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}}$，即 $(4\sqrt{3}+3)y=(4-3\sqrt{3})x+24$，所以 O 点到 AB 所在直线的距离 $d=\dfrac{24}{\sqrt{(4\sqrt{3}+3)^2+(4-3\sqrt{3})^2}}=\dfrac{12}{5}$.

10. **解**：如图所示，以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，建立平面直角坐标系. 由极坐标与直角坐标的互化公式，得 A，B 两点的直角坐标分别为 $A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$B(-3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$，所以直线 AB 的方程为 $\dfrac{y-\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\dfrac{x+\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}$，即 $2x-y+3\sqrt{2}=0$. 令 $y=0$，得 $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，所以直线 AB 与极轴所在直线的交点 C 的直角坐标为 $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，故直线 AB 与极轴所在直线的交点的一个极坐标为 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\pi\right)$.



11. **解**：(1) 将点 A，B 的极坐标化为直角坐标分别为 $(2\sqrt{3},2)$，$(-2\sqrt{3},6)$，

所以 $|AB|=\sqrt{[2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})]^2+(2-6)^2}=8$，

$|AC|=\sqrt{[2\sqrt{3}-(-2\sqrt{3})]^2+(2-2)^2}=4\sqrt{3}$，

$|BC|=|6-2|=4$，所以 $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$，

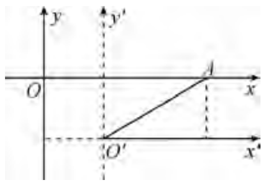
所以 $AC\perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2)由(1)知 $AC\perp BC$，$|AC|=4\sqrt{3}$，$|BC|=4$，所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}|AC||BC|=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times4=8\sqrt{3}$.

12. **解**：如图所示，由极坐标与直角坐标的互化公式$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$得点 A 在以 O' 为原点的直角坐标系中的坐标为$(2\sqrt{3},2)$.

设点 A 在以 O 为原点的直角坐标系中的坐标为(x_0,y_0)，则由直角坐标系的平移公式，得

$\begin{cases}2\sqrt{3}=x_0-2,\\2=y_0-(-2),\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=2+2\sqrt{3},\\y_0=0,\end{cases}$故点 A 在以 O 为原点的直角坐标系中的坐标为$(2+2\sqrt{3},0)$.



13. **解**：(1)∵圆 C 的圆心 C 的极坐标为$\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，

∴$x=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=1$，$y=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1$，即圆 C 的圆心 C 的直角坐标为$(1,1)$，又 $r=\sqrt{2}$，

∴圆 C 的直角坐标方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

(2)点 P 的极坐标为$(2,\pi)$，化成直角坐标为$(-2,0)$. 当直线 l 与圆 C 相切于点 D 时，$|PD|^2=|PC|^2-r^2=(-2-1)^2+(0-1)^2-(\sqrt{2})^2=8$，∴$|PA|\cdot|PB|=|PD|^2=8$.

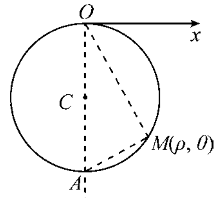
三　简单曲线的极坐标方程

1. 圆的极坐标方程

1. B ［解析］将圆的极坐标方程 $\rho=2\sin\theta$ 化为直角坐标方程，可得 $x^2+(y-1)^2=1$，所以圆心的直角坐标为$(0,1)$，故圆心的一个极坐标为$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$. 故选 B.

2. D ［解析］由 $4\rho=\sin\theta$ 得 $4\rho^2=\rho\sin\theta$，化为直角坐标方程为 $4x^2+4y^2=y$，即 $x^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$，所以 $4\rho=\sin\theta$ 表示的曲线是以$\left(0,\frac{1}{8}\right)$为圆心，$\frac{1}{8}$为半径的圆. 故选 D.

3. C ［解析］如图所示，点 $A\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$是圆与过极点且垂直于极轴的直线的交点. 设 $M(\rho,\theta)$是圆上除点 O，A 以外的任意一点，连接 OM 和 MA，则 $OM\perp MA$. 在 Rt$\triangle OAM$ 中，有 $|OM|=|OA|\cos\angle AOM$，即 $\rho=4\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)$，又 $O(0,0)$，$A\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$满足上式，所以所求圆的极坐标方程为 $\rho=-4\sin\theta$.



4. A ［解析］由 $\rho=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$，得 $\rho^2=\rho\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$，∴$x^2+y^2=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$，化为$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$，∴圆心的直角坐标为$\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，∴$\rho=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$，∵$\tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{4}}=-\sqrt{3}$，圆心在第四象限，∴可取极角为$-\frac{\pi}{3}$，∴圆 $\rho=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$的圆心的一个极坐标为$\left(\frac{1}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，故选 A.

5. C ［解析］$\rho=4\sin\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，$\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$化为直角坐标为$(2\sqrt{3},2)$. 因为切线长、圆心到定点的距离及半径构成直角三角形，所以由勾股定理得，切线长为$\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2-2)^2-2^2}=2\sqrt{2}$.

6. B ［解析］将两圆的极坐标方程转化为直角坐标方程，分别为 $x^2+(y+2)^2=4$，$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$，得到两圆的圆心坐标分别为$(0,-2)$，$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，半径分别为 2，1，两圆的圆心距为$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)^2}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$，因为 $1<\sqrt{5+2\sqrt{3}}<3$，所以两圆相交.

7. $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$ ［解析］由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，得 $\rho=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta$，即 $\rho^2=\sqrt{2}\rho\cos\theta-\sqrt{2}\rho\sin\theta$，又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

∴曲线 C 的直角坐标方程为$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$.

8. $\rho=4\cos\theta+4\sin\theta$

9. $\sqrt{5}-1$ ［解析］由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，可得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$，即$(x-1)^2+y^2=1$，∴曲线 C 是圆心为 $C(1,0)$，半径为 1 的圆. ∵在极坐标系中，定点 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，∴在直角坐标系中，定点 $A(0,2)$，∴$|AC|=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$，∴线段 AB 的长的最小值为$|AC|-1=\sqrt{5}-1$.