依据最新**浙江省**普通高中
学业水平考试说明编写

全品学考冲A方案

主编 肖德好

本册主编：高明山
编　　者：高明山　沈联晖　吴旻玲
特约主审：叶利民　沈新权

高中数学
【知识清单】

黄河出版传媒集团
阳 光 出 版 社

序/PREFACE

这是一本教辅资料，愿意为其作序是由“全品”这个品牌的品质决定的。

在教育类图书中，教辅一直扮演着低调的角色。它不像教材那么高大上，能够引领教学的方向，但一本用心的教辅图书却能够真真实实地解决教学中的实际问题。我觉得“全品”这个品牌的教辅用书一直是众多教辅用书中的佼佼者，不仅能够帮助学生高效备考，也有助于辅助教师教学的开展。

浙江嘉兴市第一中学副校长、特级教师

沈新权

· 本书专为2018级学生备考学考而设计的教辅资料

分册1 · **知识清单**

分册2 · **课时通关**

分册3 · **备考大卷**

标准：本书依据最新浙江省《普通高中学业水平考试说明》编写。严格落实标准的关键三方面：一是符合标准要求的内容范围；二是落实考点的层次要求，做到主次有别；三是围绕样题，关注不同考点、不同难易层度试题的命题要求，做到命题背景、问题层度、考查考点与能力、学科素养多维度的合理体现。

结构：学考过关不难，要冲A也不易。学考真题题量大、陷阱多、也有几道有区分度试题。本书含三个分册，实现冲A目标。分册1、2：依据标准，覆盖内容全面、易错针对性点拨、突出b、c层级要求，夯实到位；分册3：“单元卷”固根基，“仿真卷”知动态，“真题卷”熟考情。各学校也可以根据备考时间与备考目标的不同，自由选择组合各单本。

选题：浙江自主命制学考真题，试题特色明显，难点较明确。本书选用最新的浙江各地区、名校的学考模拟试题，以及浙江的典型题为主。打造真真正正的浙江专版学考备考资料。

难度：本书严格控制难度，保证全书难度不大，严格落实不同层次考点选题难度的差异性。

全心全意　品质为真

目　录 Contents

〈知识清单〉

〈课时通关｜独立成册〉

〈备考大卷｜独立成册〉

模块过关卷＋仿真模拟卷＋学考真题卷

模块一　必修 1

〈第 1 讲　集　合〉

◎【条目梳理】

一、集合的含义与表示（a）

(1)集合的含义:研究对象叫作 元素 ,一些元素组成的总体叫作 集合 .集合元素的性质: 确定性 、无序性、 互异性 .

(2)元素与集合的关系:①属于,记为 $\in$;②不属于,记为 $\notin$.

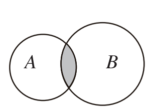
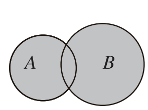
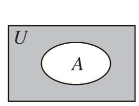
(3)集合的表示法(b):列举法、 描述法 和 图示法 .

(4)常用数集的记法:自然数集 $\mathbf{N}$,正整数集 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,复数集 $\mathbf{C}$.

二、集合间的基本关系（b）

关系＼表示		文字语言	记法
基本关系	子集	集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素	$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)
	真子集	集合 A 是集合 B 的子集,但集合 B 中至少有一个元素不属于集合 A	$A\subsetneqq B$ (或 $B\supsetneqq A$)
	相等	集合 A,B 的元素完全相同	$A=B$
空集		不含 任何元素的集合	$\varnothing$

三、集合的基本运算（b）

运算＼表示	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	属于集合 A 且 属于集合 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$, 且 $x\in B\}$		$A\cap B$
并集	属于集合 A 或 属于集合 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$, 或 $x\in B\}$		$A\cup B$
补集	全集 U 中 不 属于集合 A 的所有元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$,且 $x\notin A\}$		$\complement_U A$

◎【题型示例】

【考点 1】集合的基本概念

例 1　(1)[2019·衢州四校高一期中] 下列说法正确的是　(　　)

A. $\sqrt{2}\in\mathbf{N}$　　B. $-1\in\mathbf{N}$　　C. $\frac{1}{2}\in\mathbf{N}$　　D. $9\in\mathbf{N}$

(2)设集合 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{9,a-5,1-a\}$,且 A,B 中有唯一的公共元素 9,则实数 a 的值为________.

【考点 2】集合间的基本关系

例 2　(1)已知集合 $P=\{x\mid y=\sqrt{x+1}\}$,集合 $Q=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$,则 P 与 Q 的关系是　(　　)

A. $P=Q$　　B. $P\supsetneqq Q$　　C. $P\subsetneqq Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

(2)[2019·学军中学高一期中] 设集合 $A=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a+3\}$,若 B 真包含于 A,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $[1,3]$　　B. $(3,+\infty)\cup\{1\}$

C. $\{1\}$　　D. $(3,+\infty)$

[要点总结] (1)集合 A,B 满足 $A\subseteq B$ 时,不要忽略集合 A 为空集的情况;

(2)根据集合间的关系求参数时,可以先用数轴将相应集合表示出来,进而转化为研究区间端点间的关系,得出参数所满足的条件.

【考点 3】集合的运算

例 3　(1)已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$,若 $A=\{1,3\}$,则 $\complement_U A=$　(　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,4\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{2,4\}$

(2)已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$,则 $A\cup B$ 等于　(　　)

A. $(2,3]$　　B. $(-\infty,-4)\cup[-2,+\infty)$

C. $[-2,2)$　　D. $(-\infty,3]\cup(4,+\infty)$

(3)如图 M1-1-1 中的阴影部分,可用集合符号表示为　(　　)

A. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

B. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

C. $(\complement_U B)\cap A$

D. $(\complement_U A)\cap B$

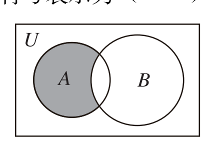


图 M1-1-1

(4)[2019·浙江 4 月学考] 已知集合 $A=\{1,2\}$,集合 $B=\{2,3\}$,则 $A\cap B=$________;$A\cup B=$________.

[要点总结] 集合运算问题的常见类型及解题策略:

(1)离散型数集或抽象集合间的运算,常借助图示法求解;

(2)连续型数集的运算,常借助数轴求解.

〈第2讲　函数及其基本性质〉

◎【条目梳理】

一、函数与映射

	函数（b）	映射（a）
两个集合 A,B	设 A,B 是两个非空的数集	设 A,B 是两个非空的集合
对应关系 $f:A\to B$	如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应	如果按某一个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应
名称	称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数	称对应 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射
记法	$y=f(x),x\in A$	对应 $f:A\to B$

二、函数的有关概念（b）

（1）函数的定义域、值域：在函数 $y=f(x),x\in A$ 中，x 叫作自变量，其中所有 x 组成的集合 A 叫作函数 $y=f(x)$ 的定义域，与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值，所有 y 组成的集合叫作函数 $y=f(x)$ 的值域.

（2）函数的三要素：定义域、对应关系和值域.

（3）函数的表示方法：解析法、列表法、图像法.

三、分段函数（b）

在定义域的不同范围内函数具有不同的对应关系，这类函数称为分段函数. 分段函数是一个函数，分段函数的定义域是各段上“定义域”的并集、值域是各段上“值域”的并集.

四、常见函数的定义域（b）

（1）分式函数中分母不等于零.

（2）偶次根式函数的被开方式大于或等于0.

（3）一次函数、二次函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

（4）$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$.

（5）$y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（6）函数 $y=\lg x$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$.

五、函数的单调性（c）

（1）增函数、减函数：设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数；当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

（2）函数的单调性：若函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，则称函数 $y=f(x)$ 在这一区间上具有（严格的）单调性，区间 D 叫作 $y=f(x)$ 的单调区间.

六、函数的最值（c）

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足	
条件	（1）对于任意 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$	（1）对于任意 $x\in I$，都有 $f(x)\geqslant M$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$
结论	M 为函数 $f(x)$ 的最大值	M 为函数 $f(x)$ 的最小值

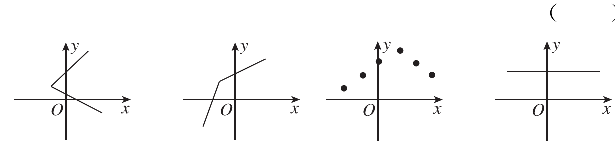
七、函数的奇偶性（c）

	偶函数	奇函数
条件	对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有	
	$f(-x)=f(x)$	$f(-x)=-f(x)$
结论	函数 $f(x)$ 是偶函数	函数 $f(x)$ 是奇函数
图像对称性	关于 y 轴对称	关于原点对称

◎【题型示例】

【考点1】函数的概念

例1　（1）下列图像中，不可能成为函数 $y=f(x)$ 的图像的是（　　）



A　　B　　C　　D

图 M1-2-1

（2）下列各组函数中，表示同一函数的是（　　）

A. $f(x)=x-1,g(x)=\dfrac{x^2}{x}-1$

B. $f(x)=|x|,g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=x,g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

D. $f(x)=2x,g(x)=\sqrt{4x^2}$

[要点总结]（1）判断一个对应关系是否为函数，关键是确定对应关系是否是“一对一”或“多对一”，同时应注意数集 B 中的元素不一定有对应元素.

（2）当且仅当定义域和对应关系均相同时两个函数才是同一函数.

【考点 2】函数的定义域与值域

例 2　(1)[2019·浙江 4 月学考] 函数 $y=\log_3(x-2)$的定义域为　(　　)

A. $\{x|x>2\}$　　B. $\{x|x>0\}$

C. $\{x|x<2\}$　　D. $\mathbf{R}$

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2,0\leqslant x\leqslant 1,\\2,1<x<2,\\x+1,x\geqslant 2\end{cases}$ 的值域是　(　　)

A. $\mathbf{R}$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $[0,2]\cup[3,+\infty)$

[要点总结] (1)求函数的定义域,以使函数的解析式所含运算有意义为准则,一般从以下几方面考虑:①若解析式是分式,则其分母不为零;②若解析式是偶次根式,则其被开方式非负(即不小于零);③如果函数解析式是由一些数学式子通过四则运算组合而成的,那么它的定义域是使各个数学式子都有意义的实数组成的集合.

(2)求函数值域可能有如下几种情况:①直接考察基本初等函数的值域;②利用函数的性质来确定函数的值域;③分段函数的值域是各部分值域的并集;④根据函数的图像观察而得.

【考点 3】函数的表示方法

例 3　(1)若函数 $f(x)$是单调递增的一次函数,且满足 $f[f(x)]=16x+5$,则 $f(x)=$　(　　)

A. $-4x-\frac{5}{3}$　　B. $4x-\frac{5}{3}$

C. $4x-1$　　D. $4x+1$

(2)[2019·浙江 4 月学考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,|x|\leqslant 1,\\x+1,|x|>1,\end{cases}$ 若 $f(x)=4$,则 x 的值为　(　　)

A. 2 或 -2　　B. 2 或 3

C. 3　　D. 5

[要点总结] (1)对于分段函数,首先要确定自变量的值属于哪个区间,再选定相应的对应关系求解.

(2)若已知函数的类型(如一次函数、二次函数),则可用待定系数法求函数解析式.

【考点 4】函数的单调性与最值

例 4　[2019·绍兴高一期末] 已知函数 $f(x)=x^2-ax,a\in\mathbf{R}$. 记 $f(x)$在$[1,2]$上的最大值为 M,最小值为 m.

(1)若 $M=f(2)$,求 a 的取值范围;

(2)证明:$M-m\geqslant\frac{1}{4}$.

[要点总结] (1)利用定义证明函数 $f(x)$在给定的区间 D 上的单调性的一般步骤:

①任取两个实数 $x_1,x_2\in D$,且 $x_1<x_2$;②作差;③变形(通常是因式分解、通分、配方);④判断符号(即判断 $f(x_1)-f(x_2)$的正负);⑤得出结论(即指出函数 $f(x)$在区间 D 上的单调性).

(2)求函数最值的常用方法:

①先确定函数的单调性,再由单调性求最值.②图像法:先作出函数在给定区间上的图像,再观察其最高点、最低点,求出最值.③配方法:对于二次函数或可化为二次函数形式的函数,可用配方法求解.④换元法:对较复杂的函数可通过换元转化为熟悉的函数,再用相应的方法求值域或最值.

【考点 5】函数奇偶性的判断及性质

例 5　(1)[2019·衢州四校高一期中] 下列哪个函数是其定义域上的偶函数　(　　)

A. $y=x^2+|x|,x\in(-1,1]$　　B. $y=x+1$

C. $y=2^x+2^{-x}$　　D. $y=\sqrt{x}$

(2)已知函数 $f(x)=\frac{a}{2}-\frac{3}{2^x+1}$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,则 $a=$________.

[要点总结] (1)已知函数 $f(x)$为奇函数,则函数 $f(x)$的图像关于原点对称,若在 $x=0$ 处有意义,则 $f(0)=0$. 已知函数$f(x)$为偶函数,则函数 $f(x)$的图像关于 y 轴对称.

(2)用定义判断函数奇偶性的步骤:①求定义域,看定义域是否关于原点对称;②判断 $f(-x)=f(x)$或 $f(-x)=-f(x)$是否恒成立.

【考点 6】函数中的恒成立问题

例 6　已知函数$f(x)=ax^2+x$,$f(3)<f(4)$,且当 $n\geqslant 8$,$n\in\mathbf{N}^*$时,$f(n)>f(n+1)$恒成立,则实数 a 的取值范围是__________.

例 7　已知函数 $f(x)=|x|+a,g(x)=2|x-1|$.

(1)若 $a=0$,解不等式 $f(x)\geqslant g(x)$;

(2)若对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)\leqslant g(x)$恒成立,求实数 a 的取值范围.

[要点总结] 函数中的恒成立问题,一般要综合使用函数的性质,如单调性、奇偶性等;若含有参数,一般分离参数,转化为 $a>f(x)$或 $a<f(x)$恒成立,即 $a>f(x)_{max}$或 $a<f(x)_{min}$.

第 3 讲　基本初等函数 Ⅰ

◎【条目梳理】

一、有理数指数幂

(1)幂的有关概念:(b)

①正分数指数幂:$a^{\frac{m}{n}}=\underline{\sqrt[n]{a^m}}$ $(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$.

②负分数指数幂:$a^{-\frac{m}{n}}=\underline{\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$ $(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$.

(2)有理数指数幂的性质:(c)

①$a^ra^s=\underline{a^{r+s}}$ $(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

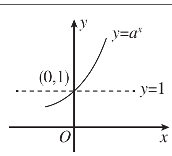
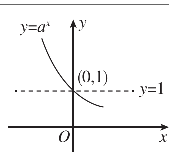
②$(a^r)^s=\underline{a^{rs}}$ $(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

③$(ab)^r=\underline{a^rb^r}$ $(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

二、指数函数的概念(b)

一般地,函数 $\underline{y=a^x(a>0\text{ 且 }a\neq1)}$ 叫作指数函数,其中 x 是自变量,函数的定义域为 $\underline{\mathbf{R}}$.

三、指数函数的图像与性质(c)

$y=a^x$	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	定义域:$\mathbf{R}$	
	值域:$\underline{(0,+\infty)}$	
	过定点 $\underline{(0,1)}$,即 $x=\underline{0}$ 时,$y=\underline{1}$	
	当 $x>0$ 时,$\underline{y>1}$;当 $x<0$ 时,$\underline{0<y<1}$	当 $x>0$ 时,$\underline{0<y<1}$;当 $x<0$ 时,$\underline{y>1}$
	在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 增函数	在 $(-\infty,+\infty)$ 上是 减函数

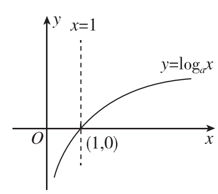
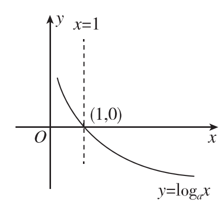
四、对数

概念(b)	一般地,如果 $a^x=N(a>0$ 且 $a\neq1)$,那么数 x 叫作以 a 为底 N 的 对数 ,记作 $x=\log_aN$.其中 a 叫作对数的底数,N 叫作真数,$\log_aN$ 叫作对数式	
性质(c)	对数式与指数式的互化:$a^x=N\Leftrightarrow\underline{\log_aN=x}$	$a>0$ 且 $a\neq1$
	$\log_a1=\underline{0}$,$\log_aa=1$,$a^{\log_aN}=\underline{N}$	
	$\log_a(M\cdot N)=\underline{\log_aM+\log_aN}$	$a>0$ 且 $a\neq1$,$M>0$,$N>0$
	$\log_a\dfrac{M}{N}=\underline{\log_aM-\log_aN}$	
	$\log_aM^n=\underline{n\log_aM}$ $(n\in\mathbf{R})$	
换底公式(a)	$\log_ab=\dfrac{\log_cb}{\log_ca}(a>0$ 且 $a\neq1,c>0$ 且 $c\neq1,b>0)$	

五、对数函数的概念(b)

一般地,我们把函数 $\underline{y=\log_ax}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 叫作对数函数,其中 x 是自变量,函数的定义域是 $\underline{(0,+\infty)}$.

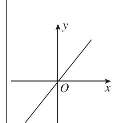
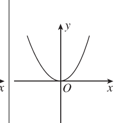
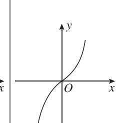
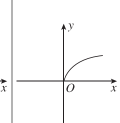
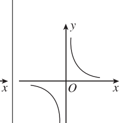
六、对数函数的图像与性质(c)

$y=\log_ax$	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	定义域:$\underline{(0,+\infty)}$	
	值域:$\underline{\mathbf{R}}$	
	过定点 $\underline{(1,0)}$,即 $x=\underline{1}$ 时,$y=\underline{0}$	
	当 $x>1$ 时,$\underline{y>0}$;当 $0<x<1$ 时,$\underline{y<0}$	当 $x>1$ 时,$\underline{y<0}$;当 $0<x<1$ 时,$\underline{y>0}$
	在 $(0,+\infty)$ 上是 增 函数	在 $(0,+\infty)$ 上是 减 函数

七、幂函数

(1)定义(a):形如 $\underline{y=x^\alpha}$ $(\alpha\in\mathbf{R})$ 的函数称为幂函数,其中 x 是自变量,α 是常数.

(2)常见的五种幂函数的图像与性质比较(c)

特征 函数 性质	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图像					
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\{x\mid x\geqslant0\}$	$\{x\mid x\neq0\}$
值域	$\mathbf{R}$	$\{y\mid y\geqslant0\}$	$\mathbf{R}$	$\{y\mid y\geqslant0\}$	$\{y\mid y\neq0\}$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	增	$(-\infty,0]$ 上减,$(0,+\infty)$ 上增	增	增	$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$ 上减
公共点	$(1,1)$				

◎【题型示例】

【考点 1】指数与指数幂的运算

例 1　(1)对任意的正实数 $a(a\neq1)$ 及 $m,n\in\mathbf{Q}$，下列运算正确的是　(　　)

A. $(a^m)^n=a^{m+n}$

B. $(a^m)^n=am^n$

C. $(a^m)^n=a^{m-n}$

D. $(a^m)^n=a^{mn}$

(2)[2018·浙江 11 月学考] 计算 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=$　(　　)

A. $\frac{81}{16}$　　B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{9}{8}$　　D. $\frac{2}{3}$

【考点 2】指数函数及其性质

例 2　(1)设函数 $f(x)=\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^x$，$g(x)=\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)^x$，其中 e 为自然对数的底数，则　(　　)

A. 对于任意实数 x，恒有 $f(x)\geqslant g(x)$

B. 存在正实数 x_0，使得 $f(x_0)>g(x_0)$

C. 对于任意实数 x，恒有 $f(x)\leqslant g(x)$

D. 存在正实数 x_0，使得 $f(x_0)<g(x_0)$

(2)[2019·浙江 4 月学考] 函数 $f(x)=(3^{ax}-b)^2$ 的图像如图 M1-3-1 所示，则　(　　)

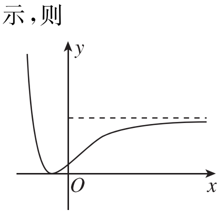


图 M1-3-1

A. $a>0$ 且 $b>1$

B. $a>0$ 且 $0<b<1$

C. $a<0$ 且 $b>1$

D. $a<0$ 且 $0<b<1$

例 3　设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+a}{\mathrm{e}^x+1}$(e 为自然对数的底数).

(1)若 $f(x)$ 为奇函数，求 a 的值；

(2)若关于 x 的方程 $f(x)=\frac{a+2}{2}$ 在 $(-\infty,0]$ 上有解，求 a 的取值范围.

[要点总结] 在利用指数函数的性质解决相关综合问题时，要特别注意底数 a 的取值范围，并在必要时进行分类讨论.

【考点 3】对数与对数运算

例 4　(1)$\log_2\frac{1}{4}=$　(　　)

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

(2)设 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\log_{12}10=$　(　　)

A. $\frac{1}{2a+b}$　　B. $\frac{1}{a+2b}$

C. $2a+b$　　D. $a+2b$

[要点总结] 在对数运算中，要熟练掌握对数的定义，灵活运用对数的运算性质、换底公式对式子进行恒等变形，多个对数式要尽量先化成同底的形式再进行运算.

【考点 4】对数函数及其性质

例 5　(1)[2018·浙江 6 月学考] 函数 $y=\log_2(x+1)$ 的定义域是　(　　)

A. $(-1,+\infty)$

B. $[-1,+\infty)$

C. $(0,+\infty)$

D. $[0,+\infty)$

(2)设 $a=3\log_{\frac{1}{3}}2$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，$c=\sqrt{\frac{2}{3}}$，则下列结论正确的是　(　　)

A. $a<b<c$

B. $a<c<b$

C. $b<a<c$

D. $b<c<a$

例6　[2019·湖州高一期中] 已知函数 $f(x)=\lg\frac{1-ax}{x-1}$ 的图像关于原点对称,其中 a 为常数.

(1)求 a 的值,并求出 $f(x)$ 的定义域;

(2)关于 x 的方程 $f(2^x)+2\lg(2^x-1)=b$ 在 $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ 上有实数解,求 b 的取值范围.

[要点总结] 要牢记对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$. 在解对数型方程、不等式问题时常利用相应的函数的单调性、奇偶性、图像等性质综合来求解.

【考点5】幂函数

例7　(1)若幂函数 $f(x)=x^a$ 的图像过点(4,2),则 $f(9)$ 的值为　(　　)

A. 1　　B. -3

C. ±3　　D. 3

(2)[2019·宁波高一期末] 若幂函数 $f(x)=x^m$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减,则实数 m 的值可能为　(　　)

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. -1　　D. 2

第4讲　函数与方程

◎【条目梳理】

一、函数的零点 (a)

对于函数 $y=f(x)$,使__$f(x)=0$__的实数 x 叫作函数 $y=f(x)$ 的零点.

二、函数的零点与方程的根的关系 (a)

方程 $f(x)=0$ 有__实数根__$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴有__交__点$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$ 有__零点__.

三、函数零点的判定 (b)

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线,并且有 $f(a)\cdot f(b)$__<0__,那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点,即存在 $c\in(a,b)$,使得__$f(c)=0$__,这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

◎【题型示例】

【考点1】零点所在区间的判定

例1　[2019·台州五校高一期中] 函数 $f(x)=e^x+4x-3$ 的零点所在的区间为　(　　)

A. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

[要点总结] 函数零点所在区间的判定方法:

(1)定义法:使用零点存在性定理.

特别提醒:①$y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图像必须是连续不断的一条曲线,否则结论不一定成立.

②当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时,$f(x)$ 在区间 (a,b) 内至少有一个零点(也可能存在多个零点).

(2)图像法:若一个函数由两个初等函数的和(或差)构成,则可考虑利用图像法求解. 如 $f(x)=g(x)-h(x)$,则可画出 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 的图像,其交点横坐标即为函数 $f(x)$ 的零点.

【考点2】函数零点个数的判断

例2　(1)若函数 $f(x)=x^2-|x|-6$,则 $f(x)$ 的零点个数为　(　　)

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

(2)函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的零点个数为　(　　)

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

[要点总结] 函数零点个数的判断方法：

(1)直接求零点.令 $f(x)=0$，若能求出方程的根，则有几个不同的根就有几个不同的零点.

(2)零点存在性定理.利用该定理不仅要求函数图像在区间 $[a,b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，还必须结合函数的图像与性质(如单调性、奇偶性)才能确定零点的个数.

(3)利用图像交点的个数.将函数分为两个简单函数，画出两个函数的图像，看其交点的个数，其中交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点.

【考点 3】函数零点的应用

例 3　(1)已知 1 是函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c)$ 的一个零点.若存在实数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 $f(x)$ 的另一个零点可能是　(　　)

A. x_0-3

B. $x_0-\frac{1}{2}$

C. $x_0+\frac{3}{2}$

D. x_0+2

(2)[2018·浙江 4 月学考] 设 a 为实数，若函数 $f(x)=2x^2-x+a$ 有零点，则函数 $y=f[f(x)]$ 零点的个数是　(　　)

A. 1 或 3

B. 2 或 3

C. 2 或 4

D. 3 或 4

[要点总结] 函数零点的应用主要表现在利用零点求参数的取值范围.通常可将问题转化为构造函数，利用函数的图像或性质求解.这样会使问题变得直观、简单，这也体现了数形结合的思想.

〈第 5 讲　函数模型及其应用〉

◎【条目梳理】

一、三种不同增长型函数模型（b）

性质 \ 函数	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在$(0,+\infty)$上的单调性	单调__递增__	单调__递增__	单调递增
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳
图像的变化	随 x 的增大逐渐表现为与__y 轴__平行	随 x 的增大逐渐表现为与__x 轴__平行	随 n 值变化而各有不同
值的比较	存在一个 x_0，当 $x>x_0$ 时，有 $\log_a x<x^n<a^x$		

二、几类常见的函数模型（c）

(1)一次函数模型：$f(x)=kx+b(k,b$ 为常数，$k\neq0)$.

(2)二次函数模型：$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数，$a\neq0)$.

(3)指数函数模型：$f(x)=ab^x+c(a,b,c$ 为常数，$a\neq0,b>0,b\neq1)$.

(4)对数函数模型：$f(x)=m\log_a x+n(m,n,a$ 为常数，$m\neq0,a>0,a\neq1)$.

(5)幂函数模型：$f(x)=ax^n+b(a,b,n$ 为常数，$a\neq0)$.

(6)分段函数模型.

(7)“双勾”函数模型：$y=ax+\frac{b}{x}(a>0,b>0)$.

三、应用已知函数模型解决实际问题的基本步骤（c）

第一步，审题，设出变量.

第二步，根据所给模型，列出函数关系式.

第三步，解函数模型.

第四步，将所得结论“还原”成具体问题的解答.

◎【题型示例】

【考点 1】一次、二次、“双勾”函数模型的应用

例 1　某桶装水经营部每天的房租、人员工资等固定成本为 200 元，每桶水的进价是 5 元.当销售单价为 6 元时，日均销售量为 480 桶.根据数据分析，销售单价在进价基础上每增加 1 元，日均销售量就减少 40 桶.为了使日均销售利润最大，销售单价应定为　(　　)

A. 6.5 元

B. 8.5 元

C. 10.5 元

D. 11.5 元

[要点总结] (1)有些问题的两个变量之间是二次函数关系，如面积问题、利润问题、产量问题等.解决这类问题时，一般构建二次函数模型，利用二次函数的图像与性质求解.

(2)在解决函数的应用问题时，一定要注意其定义域.

【考点 2】指数、对数函数模型的应用

例 2　某种细菌经过 1 h 培养，可繁殖为原来的 2 倍，则 10 个该种细菌经过 7 h 培养能达到的个数为　(　　)

A. 640

B. 1280

C. 2560

D. 5120

例3　某品牌汽车公司2019年的销量目标为39.3万辆.2016年,该品牌汽车年销量为8万辆;2017年,该品牌汽车年销量为18万辆;2018年,该品牌汽车年销量为30万辆.如果分别将2016,2017,2018,2019年定义为第1,2,3,4年,现在有两个函数模型:二次函数模型$y_1=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,指数函数模型$y_2=a\cdot b^x+c(a\neq 0,b\neq 1,b>0)$,那么哪个模型能更好地反映该公司年销量$y$(万辆)与第$x$年的关系?

[**要点总结**](1)指数函数模型常与增长率相结合进行考查,在实际问题中有人口增长、银行利率、细胞分裂等增长问题可以利用指数函数模型来表示.

(2)应用指数、对数函数模型时,先设定模型,再将已知数据代入求解,确定参数,从而确定函数模型.

【考点3】分段函数模型的应用

例4　国家规定个人稿费纳税方法为:不超过800元的不纳税,超过800元且不超过4000元的按超过800元的部分的14%纳税,超过4000元的按全部稿费的11.2%纳税.设某人所得稿费为x元,纳税额为y元.

(1)建立y与x的函数关系.

(2)某人出了一本书,获得20 000元的个人稿费,则此人需要纳税多少元?

(3)某人发表一篇文章共纳税70元,则此人的稿费是多少元?

例5　某市居民自来水收费标准如下:每户每月用水不超过4吨时,每吨为2.1元;当用水超过4吨时,超过部分每吨3元.某月甲、乙两用户共交水费y元,已知甲、乙两用户该月的用水量分别为$5x$吨、$3x$吨.

(1)求y关于x的函数;

(2)如果甲、乙两用户该月共交水费40.8元,分别求出甲、乙两用户该月的用水量和水费.

[**要点总结**](1)分段函数在每一段上自变量变化所遵循的规律不同.求解析式时可以先将其当作几个问题,将各段的解析式分别求出来,再将其合到一起.要注意各段自变量的取值范围,特别是端点值.

(2)构造分段函数时,要力求准确、简洁,做到不重不漏.

(3)分段函数的最值是各段的最大(最小)值中的最大(最小)者.

参考答案

模块一　必修 1

第 1 讲　集　合

【题型示例】

考点 1　集合的基本概念

例 1　(1)D　(2)-3　**[解析]**(1)对于 A,$\sqrt{2}$是无理数,所以$\sqrt{2}\in\mathbf{N}$不正确;对于 B,$-1<0$,所以$-1\in\mathbf{N}$不正确;对于 C,$\frac{1}{2}$不是自然数,所以$\frac{1}{2}\in\mathbf{N}$不正确. 故选 D.

(2)$\because$集合 A,B 中有唯一的公共元素 9,$\therefore 9\in A$. 若 $2a-1=9$,则 $a=5$,此时 $A=\{-4,9,25\}$,$B=\{9,0,-4\}$,则集合 A,B 中有两个公共元素 $-4,9$,与题意矛盾,舍去. 若 $a^2=9$,则 $a=\pm 3$,当 $a=3$ 时,$A=\{-4,5,9\}$,$B=\{9,-2,-2\}$,B 中有两个元素均为 -2,与集合元素的互异性矛盾,舍去;当 $a=-3$ 时,$A=\{-4,-7,9\}$,$B=\{9,-8,4\}$,符合题意. 综上所述,$a=-3$.

考点 2　集合间的基本关系

例 2　(1)B　(2)C　**[解析]**(1)由 $x+1\geqslant 0$,得 $x\geqslant -1$,所以$P=[-1,+\infty)$,又由 $y=\sqrt{x-1}\geqslant 0$,得 $Q=[0,+\infty)$,所以 $P\supsetneqq Q$.

(2)由已知得集合 B 是集合 A 的真子集. 当 $B=\varnothing$ 时,$2a>a+3$,解得 $a>3$;当 $B\neq\varnothing$ 时,$\begin{cases}2a\leqslant a+3,\\2a\geqslant 2,\\a+3\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $a=1$,此时 $A=B$,不符合题意. 故 a 的取值范围是$\{a|a>3\}$,故选 C.

考点 3　集合的运算

例 3　(1)D　(2)B　(3)C　(4)$\{2\}$　$\{1,2,3\}$　**[解析]**(1)由补集的定义知 $\complement_U A=\{2,4\}$.

(2)由 $x^2+2x-8>0$ 得$(x-2)(x+4)>0$,解得 $x<-4$ 或 $x>2$,即 $B=(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$. $\because A=[-2,3]$,$\therefore A\cup B=(-\infty,-4)\cup[-2,+\infty)$. 故选 B.

(3)根据补集、交集的定义,应选 C.

(4)根据集合交集、并集的定义,得 $A\cap B=\{2\}$,$A\cup B=\{1,2,3\}$.

第 2 讲　函数及其基本性质

【题型示例】

考点 1　函数的概念

例 1　(1)A　(2)C　**[解析]**(1)当 $x=0$ 时,有两个 y 值与之对应,故 A 不可能是函数 $y=f(x)$的图像.

(2)对于 A,$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$,则 $f(x)$与 $g(x)$不表示同一函数;对于 B,$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$,则 $f(x)$与 $g(x)$不表示同一函数;对于 C,$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $g(x)=x=f(x)$,则 $f(x)$与 $g(x)$表示同一函数;对于 D,$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(x)=2|x|$,则 $f(x)$与 $g(x)$不表示同一函数. 故选 C.

考点 2　函数的定义域与值域

例 2　(1)A　(2)D　**[解析]**(1)根据对数函数的真数大于 0 知,$x-2>0$,则 $x>2$,故选 A.

(2)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=2x^2\in[0,2]$;当 $1<x<2$ 时,$f(x)=2$;当 $x\geqslant 2$ 时,$f(x)=x+1\geqslant 3$. 所以函数 $f(x)$的值域是$[0,2]\cup[3,+\infty)$.

考点 3　函数的表示方法

例 3　(1)D　(2)C　**[解析]**(1)设 $f(x)=kx+b(k>0)$,则 $f[f(x)]=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b=16x+5$,

所以$\begin{cases}k^2=16,\\k>0,\\kb+b=5,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=4,\\b=1,\end{cases}$所以 $f(x)=4x+1$.

(2)当$|x|\leqslant 1$ 时,$f(x)=x^2\leqslant 1$,所以若 $f(x)=4$,则$|x|>1$ 且 $x+1=4$,解得 $x=3$,故选 C.

考点 4　函数的单调性与最值

例 4　**解**:(1)由已知得 $f(x)$的图像开口向上,且 $f(1)=1-a$,$f(2)=4-2a$,又 $f(2)\geqslant f(1)$,$\therefore 4-2a\geqslant 1-a$,即 $a\leqslant 3$,

$\therefore a$ 的取值范围为$(-\infty,3]$.

(2)证明:函数 $f(x)=x^2-ax$ 的图像的对称轴方程为 $x=\frac{a}{2}$.

①当$\frac{a}{2}\geqslant 2$,即 $a\geqslant 4$ 时,$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,

$\therefore M=f(1)=1-a$,$m=f(2)=4-2a$,

$\therefore M-m=1-a-4+2a=a-3\geqslant 1>\frac{1}{4}$.

②当$\frac{a}{2}\leqslant 1$,即 $a\leqslant 2$ 时,$f(x)$在$[1,2]$上单调递增,

$\therefore M=f(2)=4-2a$,$m=f(1)=1-a$,

$\therefore M-m=4-2a-1+a=3-a\geqslant 1>\frac{1}{4}$.

③当 $2<a<3$ 时,$M=f(2)=4-2a$,$m=f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{4}a^2$,

$\therefore M-m=4-2a+\frac{1}{4}a^2$,又 $y=4-2a+\frac{1}{4}a^2$ 在$(2,3)$上为减函数,$\therefore M-m>\frac{1}{4}$.

④当 $3\leqslant a<4$ 时,$M=f(1)=1-a$,$m=f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{4}a^2$,

$\therefore M-m=1-a+\frac{1}{4}a^2$,又 $y=1-a+\frac{1}{4}a^2$ 在$[3,4)$上为增函数,

$\therefore M-m\geqslant\frac{1}{4}$.

综上所述,$M-m\geqslant\frac{1}{4}$.

考点 5　函数奇偶性的判断及性质

例 5　(1)C　(2)3　**[解析]**(1)对于 A,函数 $y=x^2+|x|$,$x\in(-1,1]$的定义域不关于原点对称,所以函数是非奇非偶函数;对于 B,显然函数 $y=x+1$ 是非奇非偶函数;对于 C,设函数 $f(x)=2^x+2^{-x}$,则其定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$,所以函数 $y=2^x+2^{-x}$是定义域上的偶函数;对于 D,函数 $y=\sqrt{x}$的定义域为$[0,+\infty)$,其定义域不关于原点对称,所以函数 $y=\sqrt{x}$为非奇非偶函数. 故选 C.

(2)方法一:$\because$函数 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$\therefore f(0)=0$,即 $f(0)=\frac{a}{2}-\frac{3}{2}=0$,解得 $a=3$.

经检验当 $a=3$ 时,$f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

方法二:$f(-x)=\frac{a}{2}-\frac{3}{2^{-x}+1}=\frac{a}{2}-\frac{3\times 2^x}{2^x+1}$,$\because$函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$\therefore f(-x)+f(x)=0$,即$\frac{a}{2}-\frac{3}{2^x+1}+\frac{a}{2}-$

$\frac{3\times 2^x}{2^x+1}=a-\frac{3(2^x+1)}{2^x+1}=a-3=0$，解得 $a=3$.

考点 6　函数中的恒成立问题

例 6　$\left(-\frac{1}{7},-\frac{1}{17}\right)$　［解析］当 $n\geqslant 8$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(n)>f(n+1)$恒成立，∴$a<0$，且$-\frac{1}{2a}<\frac{17}{2}$，解得$a<-\frac{1}{17}$，又 $f(3)<f(4)$，∴$9a+3<16a+4$，解得 $a>-\frac{1}{7}$，∴$a\in\left(-\frac{1}{7},-\frac{1}{17}\right)$.

例 7　解：(1)若 $a=0$，则由 $f(x)\geqslant g(x)$，得 $|x|\geqslant 2|x-1|$，即 $3x^2-8x+4\leqslant 0$，解得 $\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2$，

所以不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集为 $\left[\frac{2}{3},2\right]$.

(2)若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant g(x)$恒成立，即$|x|+a\leqslant 2|x-1|$恒成立.

令 $h(x)=2|x-1|-|x|$，则 $a\leqslant h(x)_{\min}$.

因为 $h(x)=2|x-1|-|x|=\begin{cases}2-x,x\leqslant 0,\\2-3x,0<x<1,\\x-2,x\geqslant 1.\end{cases}$

当 $x\leqslant 0$ 时，$h(x)=2-x\geqslant 2$；

当 $0<x<1$ 时，$h(x)=2-3x\in(-1,2)$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$h(x)=x-2\geqslant -1$.

所以 $h(x)_{\min}=-1$，

故 $a\leqslant -1$，即实数 a 的取值范围为$(-\infty,-1]$.

第 3 讲　基本初等函数Ⅰ

【题型示例】

考点 1　指数与指数幂的运算

例 1　(1)D　(2)B　［解析］(1)由指数幂的运算性质，易知选 D.

(2)$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$.

考点 2　指数函数及其性质

例 2　(1)D　(2)C　［解析］(1)因为$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{6}{e^2}\right)^x$，而 $0<\frac{6}{e^2}<1$，所以当 $x>0$ 时，$\left(\frac{6}{e^2}\right)^x<1$，故选 D.

(2)若 $a>0$，则当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，不符合题意；若 $a=0$，则 $3^{ax}=1$，$f(x)=(1-b)^2$，不符合题意，所以 $a<0$. 由图可知，$f(x)$的零点 $x_0<0$，又 $3^{ax_0}-b=0$，所以 $b=3^{ax_0}$，因为 $a<0$，所以 $b>1$，故选 C.

例 3　解：(1)由 $f(x)=\frac{e^x+a}{e^x+1}$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $f(0)=0$，即 $\frac{1+a}{1+1}=0$，解得 $a=-1$. 此时 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，

所以 $f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$，因此 $a=-1$ 满足题意.

(2)令$\frac{e^x+a}{e^x+1}=\frac{a+2}{2}$，化简得 $ae^x=a-2$(*)，易知 $a\neq 0$.

①当 $x=0$ 时，(*)不成立；

②当 $x<0$ 时，$e^x=\frac{a-2}{a}$，此时 $e^x\in(0,1)$，则 $0<\frac{a-2}{a}<1$，解得 $a>2$.

综上所述，a 的取值范围为$(2,+\infty)$.

考点 3　对数与对数运算

例 4　(1)A　(2)A　［解析］(1)$\log_2\frac{1}{4}=-2\log_2 2=-2$.

(2)因为 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，所以 $\log_{12}10=\frac{1}{\lg(2^2\times 3)}=\frac{1}{2\lg 2+\lg 3}=\frac{1}{2a+b}$.

考点 4　对数函数及其性质

例 5　(1)A　(2)B　［解析］(1)由对数函数的定义知 $x+1>0$，解得 $x>-1$，故选 A.

(2)∵$a=3\log_{\frac{1}{3}}2<3\log_{\frac{1}{3}}1=0$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$，$0<c=\sqrt{\frac{2}{3}}<\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$，∴$a<c<b$. 故选 B.

例 6　解：(1)∵函数 $f(x)=\lg\frac{1-ax}{x-1}$的图像关于原点对称，∴函数 $f(x)=\lg\frac{1-ax}{x-1}$为奇函数，即 $f(-x)+f(x)=0$，

∴$\lg\frac{1+ax}{-x-1}+\lg\frac{1-ax}{x-1}=0$，且 $a\neq 1$，∴$\lg\frac{(1+ax)(1-ax)}{(1-x)(1+x)}=0$，

∴$\frac{(1+ax)(1-ax)}{(1-x)(1+x)}=1$，整理可得，$(a^2-1)x^2=0$ 恒成立，

解得 $a=1$(舍)或 $a=-1$，∴$f(x)=\lg\frac{1+x}{x-1}$，由$\frac{1+x}{x-1}>0$ 可得，$x<-1$ 或 $x>1$，

即函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2)∵关于 x 的方程 $f(2^x)+2\lg(2^x-1)=b$ 在$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$上有实数解，∴$\lg\frac{2^x+1}{2^x-1}+2\lg(2^x-1)=\lg[(2^x+1)(2^x-1)]=\lg(2^{2x}-1)=b$ 在$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$上有实数解.

设 $u(x)=2^{2x}-1$，则 $u(x)$为增函数，又 $y=\lg x$ 为增函数，

∴函数 $y=\lg(2^{2x}-1)$在$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$上为增函数，

∴$0\leqslant y\leqslant\lg 7$，则 $b\in[0,\lg 7]$.

考点 5　幂函数

例 7　(1)D　(2)C　［解析］(1)由题意可得 $4^\alpha=2$，∴$\alpha=\frac{1}{2}$，则幂函数的解析式为 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，∴$f(9)=9^{\frac{1}{2}}=3$.

(2)∵幂函数 $f(x)=x^m$ 在区间$(0,+\infty)$上单调递减，∴$m<0$，由选项可知，实数 m 的值可能为-1. 故选 C.

第 4 讲　函数与方程

【题型示例】

考点 1　零点所在区间的判定

例 1　C　［解析］易知函数 $f(x)=e^x+4x-3$ 在$(-\infty,+\infty)$上为增函数，∵$f\left(\frac{1}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}+1-3<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}+2-3=\sqrt{e}-1>0$，∴$f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$，∴函数 $f(x)=e^x+4x-3$ 的零点所在的区间为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$. 故选 C.

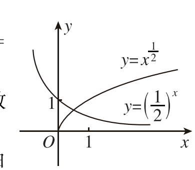
考点 2　函数零点个数的判断

例 2　(1)C　(2)B　［解析］(1)当 $x\geqslant 0$ 时，令 $f(x)=x^2-x-6=0$，得 $x=-2$ 或 3，∴$x=3$；

当 $x<0$ 时，令 $f(x)=x^2+x-6=0$，得 $x=2$ 或-3，∴$x=-3$.

∴$f(x)$的零点个数为 2.

(2)令 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$，得 $x^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，求 $f(x)$的零点个数可转化为求函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图像的交点个数. 由图可知，两函数图像有 1 个交点，故选 B.



考点 3　函数零点的应用

例 3　(1)B　(2)C　［解析］(1)易知 $f(1)=a+b+c=0$，又 $a>b>c$，所以 $a>0$，$c<0$，则 $b^2-4ac>0$，故函数$f(x)$有两个零点. 设另一个零点为 m，则 $f(x)=a(x-1)(x-m)=a[x^2+(-1-m)x+m]$，所以 $b=a(-1-m)$，$c=am$，则 $a>a(-1-m)>am$，

即 $1>-1-m>m$,故 $-2<m<-\frac{1}{2}$. 又 $m<x_0<1$,所以 $x_0-3<m<x_0$. 结合选项知只有 $x_0-\frac{1}{2}$ 可能为 $f(x)$ 的另一个零点. 故选 B.

(2)因为 $f(x)$ 有零点,所以 $\Delta_1=(-1)^2-8a\geqslant0$,即 $a\leqslant\frac{1}{8}$. 令 $f(x)=t$,则 $f[f(x)]=0$ 可化为 $2t^2-t+a=0$. 当 $a=\frac{1}{8}$ 时,$2t^2-t+\frac{1}{8}=0$,即 $t=\frac{1}{4}$,所以 $f(x)=2x^2-x+\frac{1}{8}=t=\frac{1}{4}$,即 $2x^2-x-\frac{1}{8}=0$,则 $\Delta_2=1+1=2>0$,所以方程 $2x^2-x-\frac{1}{8}=0$ 有 2 个根,所以函数 $y=f[f(x)]$ 有 2 个零点. 当 $a<\frac{1}{8}$ 时,$2t^2-t+a=0$ 的根为 $t=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4}$,函数 $f(x)=2x^2-x+a=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}+a$ 的最小值为 $-\frac{1}{8}+a$,$\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4}-\left(-\frac{1}{8}+a\right)=\frac{3-8a-2\sqrt{1-8a}}{8}$,因为 $(3-8a)^2-(2\sqrt{1-8a})^2=64\left(a-\frac{1}{8}\right)^2+4>0$,所以 $2t^2-t+a=0$ 的 2 个根都大于函数 $f(x)$ 的最小值,故 $y=f[f(x)]$ 有 4 个零点. 故选 C.

第 5 讲　函数模型及其应用

【题型示例】

考点 1　一次、二次、“双勾”函数模型的应用

例 1　D　[解析] 设销售单价在进价的基础上增加 x 元时,日均销售利润为 y 元,则 $y=x[480-40(x-1)]-200=x(520-40x)-200$,由于 $x>0$,且 $520-40x>0$,所以 $0<x<13$,所以 $y=-40x^2+520x-200$,$0<x<13$,所以当 $x=\frac{520}{80}=6.5$ 时,y 取得最大值,所以销售单价应定为 $5+6.5=11.5$(元). 故选 D.

考点 2　指数、对数函数模型的应用

例 2　B　[解析] 设 t 表示经过的时间(单位:h),a 表示原来细菌的个数,y 表示繁殖后细菌的个数,则 $y=a\cdot2^t$. 当 $a=10$,$t=7$ 时,$y=10\times2^7=1280$. 故选 B.

例 3　**解:**由题可知函数图像过点(1,8),(2,18),(3,30).

①设二次函数模型 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,

将点的坐标代入,可得 $\begin{cases}a+b+c=8,\\4a+2b+c=18,\\9a+3b+c=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=7,\\c=0,\end{cases}$

则 $f(x)=x^2+7x$,故 $f(4)=4^2+7\times4=44$,与 2019 年的目标误差为 4.7.

②设指数函数模型 $g(x)=a\cdot b^x+c(a\neq0,b\neq1,b>0)$,

将点的坐标代入,可得 $\begin{cases}ab+c=8,\\ab^2+c=18,\\ab^3+c=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{125}{3},\\b=\frac{6}{5},\\c=-42,\end{cases}$

则 $g(x)=\frac{125}{3}\times\left(\frac{6}{5}\right)^x-42$,故 $g(4)=\frac{125}{3}\times\left(\frac{6}{5}\right)^4-42=44.4$,与 2019 年的目标误差为 5.1.

综上可得,二次函数模型 $y_1=x^2+7x$ 能更好地反映该公司年销量 y(万辆)与第 x 年的关系.

考点 3　分段函数模型的应用

例 4　**解:**(1)根据题意,得 $y=\begin{cases}0(0<x\leqslant800),\\\frac{7}{50}(x-800)(800<x\leqslant4000),\\\frac{14}{125}x(x>4000).\end{cases}$

(2)因为 $20\,000>4000$,所以 $y=\frac{14}{125}\times20\,000=2240$,故此人需要纳税 2240 元.

(3)显然 $x\in(800,4000]$,则有 $\frac{7}{50}(x-800)=70$,解得 $x=1300$,所以此人的稿费是 1300 元.

例 5　**解:**(1)当甲用户的用水量不超过 4 吨,即 $5x\leqslant4$ 时,$y=(5x+3x)\times2.1=16.8x$.

当甲用户的用水量超过 4 吨,乙用户的用水量不超过 4 吨,即 $3x\leqslant4$ 且 $5x>4$ 时,

$y=4\times2.1+3x\times2.1+3\times(5x-4)=21.3x-3.6$.

当乙用户的用水量超过 4 吨,即 $3x>4$ 时,

$y=8\times2.1+3\times(8x-8)=24x-7.2$.

所以 $y=\begin{cases}16.8x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{4}{5}\right),\\21.3x-3.6\left(\frac{4}{5}<x\leqslant\frac{4}{3}\right),\\24x-7.2\left(x>\frac{4}{3}\right).\end{cases}$

(2)由(1)知 $y=f(x)$ 在各段区间上均为增函数.

当 $x\in\left[0,\frac{4}{5}\right]$ 时,$y\leqslant16.8\times\frac{4}{5}<40.8$;

当 $x\in\left(\frac{4}{5},\frac{4}{3}\right]$ 时,$y\leqslant21.3\times\frac{4}{3}-3.6<40.8$;

当 $x\in\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ 时,令 $24x-7.2=40.8$,得 $x=2$.

所以甲用户的用水量为 $5x=10$(吨),应交水费 $y_1=4\times2.1+6\times3=26.4$(元);

乙用户的用水量为 $3x=6$(吨),应交水费 $y_2=4\times2.1+2\times3=14.4$(元).

模块二　必修 4

第 1 讲　任意角的三角函数和诱导公式

【题型示例】

考点 1　任意角

例 1　(1)B　(2)B　[解析] (1)由题知,$A=\{$第一象限角$\}=\left\{\theta\,\middle|\,2k\pi<\theta<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$C=\left\{\text{小于}\frac{\pi}{2}\text{的角}\right\}=\left\{\theta\,\middle|\,\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$,$B=\{$锐角$\}=\left\{\theta\,\middle|\,0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$,结合选项可知 B 正确.

(2)$\because -2017^\circ=-360^\circ\times6+143^\circ$,且 $90^\circ<143^\circ<180^\circ$,$\therefore -2017^\circ$ 角的终边所在的象限为第二象限.

考点 2　弧度制

例 2　(1)1　(2)$-\frac{5\pi}{3}$ rad　108°　[解析] (1)设圆心角的弧度数为 α,弧长为 l,则由弧长公式知 $l=r\alpha$,则 $r=\frac{l}{\alpha}=\frac{2}{2}=1$.

(2)$-300^\circ=-300\times\frac{\pi}{180}$ rad$=-\frac{5\pi}{3}$ rad.

$\because\pi$ rad$=180^\circ$,$\therefore\frac{3\pi}{5}$ rad$=\frac{3}{5}\times180^\circ=108^\circ$.

考点 3　任意角的三角函数

例 3　(1)C　(2)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\frac{1}{2}$　[解析] (1)由 $\sin\alpha<0$,得角 α 的终边在第三、第四象限或 y 轴的负半轴上;由 $\tan\alpha>0$,得角 α 的终边在第一或第三象限. 所以角 α 的终边在第三象限.

(2)由任意角的三角函数定义可得 $\sin\alpha=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=$