2021

浙江省

CANPOINT®

全品高考复习方案

主编：肖德好

本册主编：沈联晖
副 主 编：高明山
编　　者：沈联晖　高明山　吴旻玲
林　永　李子忠　慕泽刚
特约主审：叶利民　沈新权

听课手册

数学

延边教育出版社

做好已知 才是最好（代序）

数学 浙江省

• 什么为有效的一轮复习？

• 关键是弄明白一轮复习的定位是什么。

经过多年一线的调研，我们从教学一线中找到了答案：“一轮复习更像后勤工作，它开展的充分与否，影响着考生在高考战役中成果的大小。”

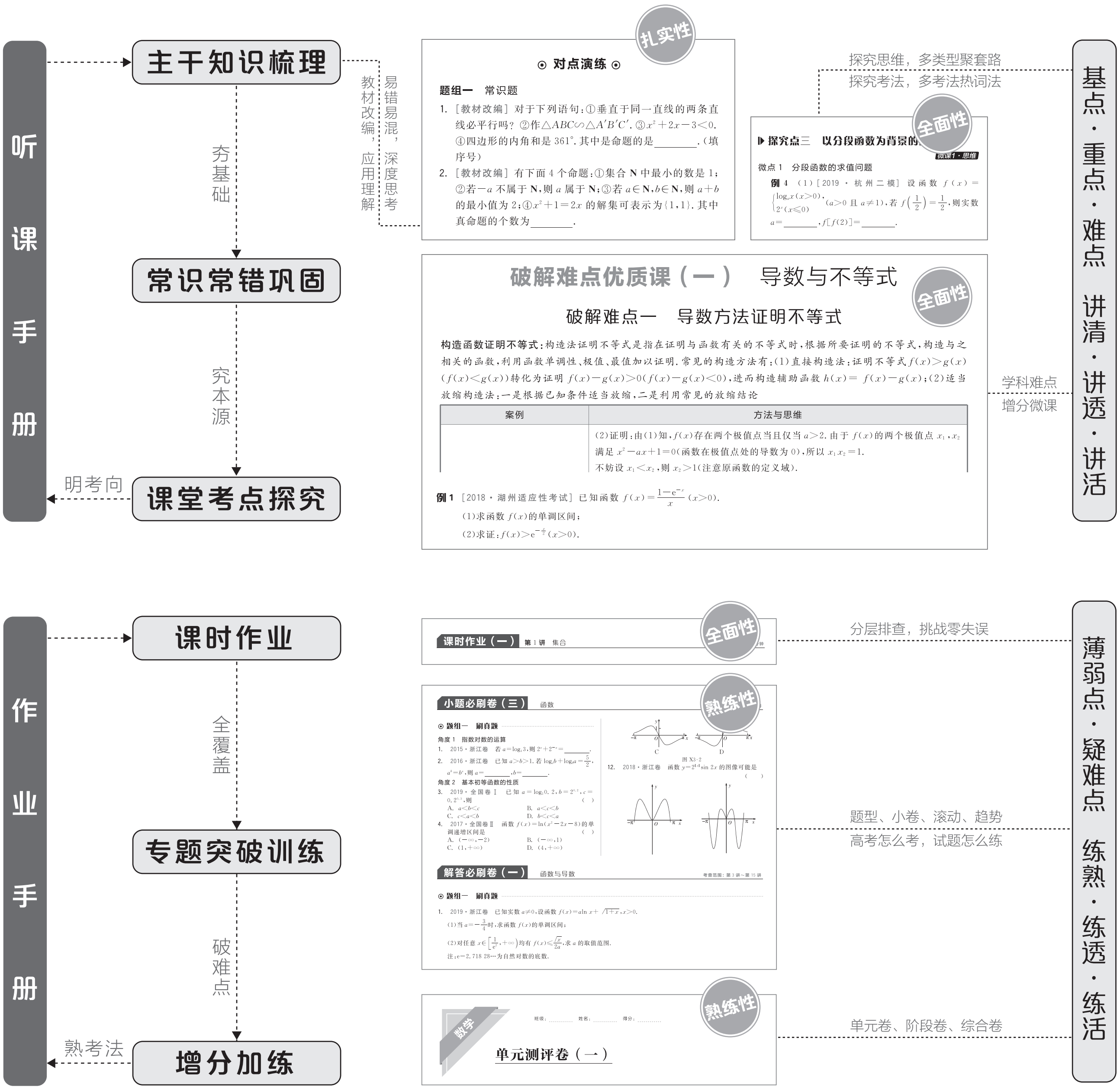
好的后勤工作，关键在于以下三点：

1. 扎实性：知识不落于面（理解与辨析）、解题不落于形（本质与变化）。

2. 全面性：全面建立有关知识、题型、方法、结论等的认知数据库。

3. 熟练性：分类分层、合理定量的训练，使基本功运用自如。为二三轮复习以及考前模拟做好铺垫。

2021版新高考《全品高考复习方案》图书结构与特点：



我是变了 / 我又没变 / 从始至今 / 择真而求

CONTENTS 目录

另有《全品基础小练习》与本书配套使用效果更佳，欢迎选购

07 第七单元　**解析几何**

08 第八单元　**计数原理、概率、随机变量及其分布**

参考答案

UNIT 01
第一单元 | 集合与常用逻辑用语、函数、导数及其应用

第1讲　集合

考试说明 1. 了解集合、元素的含义及其关系.
2. 理解集合的表示法.
3. 了解集合之间的包含、相等关系.
4. 理解全集、空集、子集的含义.
5. 会求简单集合间的并集、交集.
6. 理解补集的含义并会求补集.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 元素与集合

(1)集合元素的性质:________、________、无序性.

(2)集合与元素的关系:①属于,记为________;②不属于,记为________.

(3)集合的表示方法:列举法、________和________.

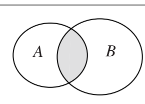
(4)常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	________	________	________	________	________

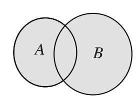
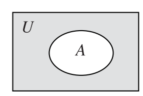
2. 集合间的基本关系

		文字语言	符号语言	记法
基本关系	子集	集合 A 中的________都是集合 B 中的元素	$x\in A\Rightarrow x\in B$	$A\subseteq B$ 或 ______
	真子集	集合 A 是集合 B 的子集,但集合 B 中____有一个元素不属于 A	$A\subseteq B$,$\exists x_0\in B$,$x_0\notin A$	A ____ B 或 $B\supsetneqq A$
	相等	集合 A,B 的元素完全______	$A\subseteq B$,$B\subseteq A$	______
空集		______任何元素的集合,空集是任何集合的子集	$\forall x$,$x\notin\varnothing$,$\varnothing\subseteq A$	$\varnothing$

3. 集合的基本运算

表示 / 运算	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	属于 A ____ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____$x\in B\}$		______

(续表)

表示 / 运算	文字语言	符号语言	图形语言	记法
并集	属于 A ______ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____$x\in B\}$		______
补集	全集 U 中____属于 A 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$,x _____ $A\}$		______

4. 集合的运算性质

(1)并集的性质:$A\cup\varnothing=A$;$A\cup A=A$;$A\cup B=$________;$A\cup B=$________$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(2)交集的性质:$A\cap\varnothing=\varnothing$;$A\cap A=A$;$A\cap B=B\cap A$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A$ ________ B.

(3)补集的性质:$A\cup(\complement_U A)=U$;$A\cap(\complement_U A)=$________;$\complement_U(\complement_U A)=$________;$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$________$(\complement_U B)$;$\complement_U(A\cap B)=$________$\cup$________.

常用结论

(1)非常规性表示常用数集:如 $\{x\mid x=2(n-1),n\in\mathbf{Z}\}$ 为偶数集,$\{x\mid x=4n\pm1,n\in\mathbf{Z}\}$ 为奇数集等.

(2)①一个集合的真子集必是其子集,一个集合的子集不一定是其真子集;

②任何一个集合是它本身的子集;

③对于集合 A,B,C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$(真子集也满足);

④若 $A\subseteq B$,则有 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种可能.

(3)集合子集的个数:集合 A 中有 n 个元素,则集合 A 有 2^n 个子集、2^n-1 个真子集、2^n-1 个非空子集、2^n-2 个非空真子集.集合元素个数:$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$(常用在实际问题中).

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 已知集合 $A=\{0,1,x^2-5x\}$,若 $-4\in A$,则实数 x 的值为________.

2. [教材改编] 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{x|x\geqslant 1\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$________.
3. [教材改编] 已知集合 $A=\{a,b\}$,若 $A\cup B=\{a,b,c\}$,则满足条件的集合 B 有________个.
4. [教材改编] 已知集合 $A=\{-1,1\}$,$B=\{a,a^2+2\}$.若 $A\cap B=\{1\}$,则实数 a 的值为________.

题组二 常错题

◆**索引**:忽视集合元素的性质致错;对集合的表示方法理解不到位致错;忘记空集的情况导致出错;忽视集合运算中端点取值致错.

5. 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$,$B=\{1,m\}$,若 $B\subseteq A$,则 $m=$________.
6. 已知 $x\in\mathbf{N}$,$y\in\mathbf{N}$,$M=\{(x,y)|x+y\leqslant 2\}$,$N=\{(x,y)|x-y\geqslant 0\}$,则 $M\cap N$ 中元素的个数是________.
7. 已知集合 $A=\{1,-2\}$,$B=\{x|ax=1\}$,若 $A\cap B=B$,则由实数 a 的所有可能的取值组成的集合为________.
8. 设集合 $A=\{x||x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x|1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\subsetneqq B$,则 a 的取值范围为________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

探究点一 集合的含义与表示

例1 (1)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-2x-3\leqslant 0\}$,$B=\left\{x\middle|\frac{x-1}{x}>0\right\}$,若集合 $C=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$,则 $C=$ ( )

A. $\{0,1\}$ B. $\{-1,1\}$
C. $\{0\}$ D. $\varnothing$

(2)[2019·天津红桥区一模] 已知集合 $U=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$,则集合 U 中的元素个数为________.(用数字填写)

[总结反思] 解决集合含义问题的关键有三点:一是确定构成集合的元素是什么;二是看这些元素的限制条件是什么;三是根据元素的特征(满足的条件)构造关系式解决相应问题.特别提醒:含字母的集合问题,在求出字母的值后,需要验证集合的元素是否满足互异性.

变式题 (1)已知集合 $A=\{x|x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$,则下列表示正确的是 ( )

A. $-1\notin A$ B. $-11\in A$
C. $3k^2-1\in A$ D. $-34\notin A$

(2)[2019·南通期末] 已知集合 $A=\{x|(x+1)(x+a^2-a-2)\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$,若 $0\in A$,则 a 的取值范围是________.

探究点二 集合间的基本关系

例2 (1)集合 $M=\left\{x\middle|x=\frac{n}{2}+1,n\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{y\middle|y=m+\frac{1}{2},m\in\mathbf{Z}\right\}$,则两集合 M,N 之间的关系为 ( )

A. $M\cap N=\varnothing$ B. $M=N$
C. $M\subseteq N$ D. $N\subseteq M$

(2)[2019·重庆北碚区期末] 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x|2m-1<x<m+1\}$,且 $B\subseteq A$,则实数 m 的取值范围是________.

[总结反思] (1)一般利用数轴法、Venn 图法以及结构法判断两集合间的关系,如果集合中含有参数,需要对式子进行变形,有时需要进一步对参数分类讨论.
(2)确定非空集合 A 的子集的个数,需先确定集合 A 中的元素的个数.特别提醒:不能忽略任何非空集合是它自身的子集.
(3)根据集合间的关系求参数值(或取值范围)的关键是将条件转化为元素满足的式子或区间端点间的关系.

变式题 (1)[2019·重庆西南大学附中月考] 设集合 $U=\{-1,0,1,2\}$,$A=\{y|y=\sqrt{x^2+1},x\in U\}$,则集合 A 的真子集的个数为 ( )

A. 2 B. 3
C. 7 D. 8

(2)已知集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{x|x^2-(a+1)x+a=0,a\in\mathbf{R}\}$,若 $A=B$,则 $a=$ ( )

A. 1 B. 2
C. -1 D. -2

探究点三 集合的基本运算

角度1 集合的运算

例3 (1)[2019·绍兴柯桥区三模] 已知集合 $A=\{x|x^2-1\geqslant 0\}$,集合 $B=\{y|y=3^{-x}-1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $(1,+\infty)$ B. $(-\infty,-1)$
C. $(-\infty,1]$ D. $[1,+\infty)$

(2)[2020·台州4月模拟] 若全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,3\}$,则集合 $A\cap(\complement_U B)=$ ( )

A. $\{1\}$ B. $\{4\}$
C. $\{1,4,5\}$ D. $\{1,4\}$

[总结反思] 对于已知集合的运算,可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解,必要时可结合数轴求解.

角度 2　利用集合运算求参数

例 4　(1)[2019·晋城二模] 若集合 $A=\{x|x\geqslant 3-2a\}$，$B=\{x|(x-a+1)(x-a)\geqslant 0\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围为　　(　　)

A. $[2,+\infty)$

B. $(-\infty,2]$

C. $\left(-\infty,\dfrac{4}{3}\right]$

D. $\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right)$

(2)[2019·莆田八中期中] 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-(2m-3)x+m(m-3)\leqslant 0\}$，若 $A\cap B=[2,4]$，则实数 $m=$________.

[总结反思] 根据集合运算求参数，要把集合语言转换为方程或不等式，然后解方程或不等式，再利用数形结合法求解.

角度 3　集合语言的运用

例 5　(1)[2019·保定一模] 设 P 和 Q 是两个集合，定义集合 $P-Q=\{x|x\in P$，且 $x\notin Q\}$，如果 $P=\{x|1<2^x<4\}$，$Q=\{y|y=2+\sin x,x\in\mathbf{R}\}$，那么 $P-Q=$　　(　　)

A. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　　B. $\{x|0\leqslant x<2\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|0<x<1\}$

(2)[2019·北京延庆区一模] 已知集合 $M=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 15\}$，集合 A_1,A_2,A_3 满足：①每个集合都恰有 5 个元素；② $A_1\cup A_2\cup A_3=M$. 集合 A_i 中元素的最大值与最小值之和称为集合 A_i 的特征数，记为 $X_i(i=1,2,3)$，则 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值与最小值的和为________.

[总结反思] 解决集合新定义问题的关键是：

(1)准确转化：解决新定义问题时，一定要读懂新定义的本质含义，紧扣题目所给定义，结合题目的要求进行恰当转化，切忌同已有概念或定义相混淆.

(2)方法选取：对于新定义问题，可恰当选用特例法、筛选法、一般逻辑推理等方法，并结合集合的相关性质求解.

请完成课时作业（一）

第 2 讲　命题及其关系、充分条件与必要条件

考试说明　1. 了解原命题和原命题的逆命题、否命题、逆否命题的含义，及其相互之间的关系.

2. 理解命题的必要条件、充分条件、充要条件的意义，能判断并证明命题成立的充分条件、必要条件、充要条件.

课前双基巩固

/纵横梳知识　多向固基础/

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 命题

(1)命题的概念：数学中把用语言、符号或式子表达的，能够判断________的陈述句叫作命题. 其中__________的语句叫作真命题，__________的语句叫作假命题.

(2)四种命题及其相互关系

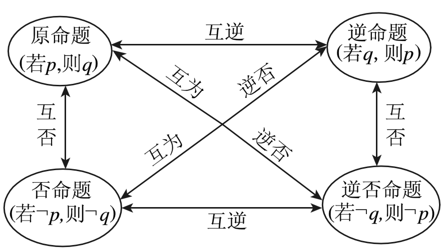


图 1-2-1

特别提醒：若两个命题互为逆否命题，则它们有相同的真假性.

2. 充分条件、必要条件与充要条件

(1)若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件.

(2)若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的________条件.

(3)若既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，记作 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的________条件.

常用结论

1. 充要条件的两个结论：

(1)若 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 r 的充分不必要条件，则 p 是 r 的充分不必要条件；

(2)若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

2. 充分、必要条件与集合的关系

使 p 成立的对象构成的集合为 A,使 q 成立的对象构成的集合为 B	
p 是 q 的充分条件	$A\subseteq B$
p 是 q 的必要条件	$B\subseteq A$
p 是 q 的充分不必要条件	$A\subsetneqq B$
p 是 q 的必要不充分条件	$B\subsetneqq A$
p 是 q 的充要条件	$A=B$

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 对于下列语句:①垂直于同一直线的两条直线必平行吗?②作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.③$x^2+2x-3<0$.④四边形的内角和是 361°.其中是命题的是________.(填序号)
2. [教材改编] 有下面 4 个命题:①集合 $\mathbf{N}$ 中最小的数是 1;②若 $-a$ 不属于 $\mathbf{N}$,则 a 属于 $\mathbf{N}$;③若 $a\in\mathbf{N}$,$b\in\mathbf{N}$,则 $a+b$ 的最小值为 2;④$x^2+1=2x$ 的解集可表示为$\{1,1\}$.其中真命题的个数为________.
3. [教材改编] 命题"若整数 a 不能被 2 整除,则 a 是奇数"的逆否命题是________________.
4. [教材改编] "点 $P(x,y)$ 在第一象限"是"$x+y>1$"的________条件.

题组二 常错题

◆ **索引**:命题的条件与结论不明确;含有大前提的命题的否命题易出现否定大前提的情况;真、假命题的推理考虑不全面;对充分必要条件判断错误.

5. 命题"若 $a^2+b^2=0$,$a,b\in\mathbf{R}$,则 $a=b=0$"的逆否命题是________________.
6. 已知命题"对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $ab>0$,则 $a>0$",则它的否命题是________________.
7. 若"$ax^2-2ax-3>0$ 不成立"是真命题,则实数 a 的取值范围是________.
8. 条件 p:$x>a$,条件 q:$x\geqslant 2$.
   ①若 p 是 q 的充分不必要条件,则 a 的取值范围是________;
   ②若 p 是 q 的必要不充分条件,则 a 的取值范围是________.
9. 已知 p 是 r 的充分不必要条件,s 是 r 的必要条件,q 是 s 的必要条件,那么 p 是 q 的____________条件.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

▶ 探究点一 四种命题及其相互关系

1. 已知命题"若函数 $f(x)=e^x-mx$ 在$(0,+\infty)$上是增函数,则 $m\leqslant 1$",则下列说法正确的是 ( )
   A. 否命题是"若函数 $f(x)=e^x-mx$ 在$(0,+\infty)$上是减函数,则 $m>1$"
   B. 逆命题是"若 $m\leqslant 1$,则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在$(0,+\infty)$上是增函数"
   C. 逆否命题是"若 $m>1$,则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在$(0,+\infty)$上是减函数"
   D. 逆否命题是"若 $m\leqslant 1$,则函数 $f(x)=e^x-mx$ 在$(0,+\infty)$上不是增函数"
2. 已知命题"设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,若 $a>b$,则 $a+c>b+c$",则在原命题以及它的逆命题、否命题、逆否命题中,真命题的个数为 ( )
   A. 1 B. 2 C. 4 D. 0
3. 下列四个命题为真命题的是 ( )
   A. "设 $x\in\mathbf{R}$,若 $2^x>8$,则$|x|>3$"的逆命题
   B. "全等三角形的面积相等"的否命题
   C. "若 $c\leqslant 1$,则 $x^2+2x+c=0$ 无实根"的逆否命题
   D. 对于实数 x,y,若 $x+y\neq 3$,则 $x\neq 2$ 或 $y\neq 1$
4. [2019·重庆 5 月联考] 命题"若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"的逆否命题是________________.

[总结反思] (1)求一个命题的其他三种命题时,需注意:
①对于不是"若 p,则 q"形式的命题,需先改写为"若 p,则 q"的形式;
②若命题有大前提,写其他三种命题时需保留大前提.
(2)判断一个命题为真命题,要给出推理证明;判断一个命题为假命题,只需举出反例.
(3)当直接判断一个命题的真假不容易时,根据互为逆否命题的两个命题同真同假,可转化为判断其逆否命题的真假.

▶ 探究点二 充分、必要条件的判定

1. [2019·丽水期末] "$0<k<1$"是"方程$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{k}=1$ 表示双曲线"的 ( )
   A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
   C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 在$\triangle ABC$ 中,"$\sin A<\cos B$"是"$\triangle ABC$ 为钝角三角形"的 ( )
   A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
   C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. [2020·杭四中月考] 设 $a\in\mathbf{R}$,则"$a=0$"是"直线 l_1:$ax+4y-5=0$ 与直线 l_2:$2x+ay-a=0$ 垂直"的 ( )
   A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
   C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[总结反思] 充分条件、必要条件的判定方法有定义法、集合法和等价转化法.三种不同的方法适用于不同的类型:定义法适用于定义、定理的判断问题;集合法多适用于命题中涉及参数的取值范围的判断问题;等价转化法适用于条件和结论中带有否定性词语的命题的判断问题.

探究点三　充分、必要条件的应用

例 (1)[2019·临川一中、南昌二中等九校联考] 已知 $p:A=\left\{x\left|\frac{x-2}{1-x}\leqslant 0\right.\right\}$,$q:B=\{x|x-a<0\}$,若 p 是 q 的必要不充分条件,则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,1]$

(2)[2019·全国卷Ⅱ] 设 α,β 为两个平面,则 $\alpha/\!/\beta$ 的充要条件是　(　　)

A. α 内有无数条直线与 β 平行

B. α 内有两条相交直线与 β 平行

C. α,β 平行于同一条直线

D. α,β 垂直于同一平面

[总结反思] 充分条件、必要条件的应用一般表现在参数问题的求解上,解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系,然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解.解题过程中要注意检验区间的端点值.

变式题 (1)[2019·南昌七校期末] 已知 $p:x\leqslant 1$,且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,则 q 可以是　(　　)

A. $x>1$　　B. $x>0$

C. $x\leqslant 2$　　D. $-1<x<0$

(2)[2019·武汉期末] 已知 $p:\forall x\in[-1,1]$,$x^2-ax-2<0$,则使 p 成立的一个充分不必要条件为　(　　)

A. $-\frac{1}{2}<a<1$

B. $-1<a<1$

C. $-1<a<2$

D. $-1\leqslant a\leqslant 1$

请完成课时作业(二)

第3讲　函数的概念及其表示

考试说明　1. 了解函数、映射的概念.

2. 了解函数的定义域、值域及三种表示法(解析法、图像法和列表法).

3. 了解简单的分段函数,会用分段函数解决简单的问题.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数与映射的概念

	函数	映射
两集合 A,B	设 A,B 是两个________	设 A,B 是两个________
对应关系 $f:A\to B$	按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的______一个数 x,在集合 B 中都有________的数 $f(x)$ 与之对应	按某一个确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的________一个元素 x,在集合 B 中都有________的元素 y 与之对应
名称	称________为从集合 A 到集合 B 的一个函数	称对应________为从集合 A 到集合 B 的一个映射
记法	$y=f(x)$,$x\in A$	对应 $f:A\to B$

2. 函数的三要素

函数由________、________和对应关系三个要素构成.在函数 $y=f(x)$,$x\in A$ 中,x 叫作自变量,x 的取值范围 A 叫作函数的________.与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值,函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫作函数的________.

3. 函数的表示法

函数的常用表示方法:________、________、________.

4. 分段函数

若函数在其定义域内,对于定义域内的不同取值区间,有着不同的________,这样的函数通常叫作分段函数.分段函数虽由几个部分组成,但它表示的是一个函数.

常用结论

1. 常见函数的定义域

(1)分式函数中分母不等于0.

(2)偶次根式函数的被开方式大于或等于0.

(3)一次函数、二次函数的定义域为$\mathbf{R}$.

(4)零次幂的底数不能为0.

(5)$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$,$y=\sin x$,$y=\cos x$的定义域均为$\mathbf{R}$.

(6)$y=\log_a x(a>0$且$a\neq1)$的定义域为$\{x|x>0\}$.

(7)$y=\tan x$的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. 抽象函数的定义域

(1)若$f(x)$的定义域为$[m,n]$,则在$f[g(x)]$中,$m\leqslant g(x)\leqslant n$,从而解得$x$的范围,即为$f[g(x)]$的定义域.

(2)若$f[g(x)]$的定义域为$[m,n]$,则由$m\leqslant x\leqslant n$确定$g(x)$的范围,即为$f(x)$的定义域.3. 基本初等函数的值域

(1)$y=kx+b(k\neq0)$的值域是$\mathbf{R}$.

(2)$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的值域:当$a>0$时,值域为$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$;当$a<0$时,值域为$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.

(3)$y=\frac{k}{x}(k\neq0)$的值域是$\{y|y\neq0\}$.

(4)$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$的值域是$(0,+\infty)$.

(5)$y=\log_a x(a>0$且$a\neq1)$的值域是$\mathbf{R}$.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 以下属于函数的有________.(填序号)

①$y=\pm\sqrt{x}$;②$y^2=x-1$;③$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$;④$y=x^2-2(x\in\mathbf{N})$.

2. [教材改编] 已知函数$f(x)=\begin{cases}x+1,x\geqslant0,\\x^2,x<0,\end{cases}$则$f(-2)=$________,$f[f(-2)]=$________.

3. [教材改编] 函数$f(x)=\frac{\sqrt{8-x}}{x+3}$的定义域是__________.

4. [教材改编] 已知集合$A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{a,b,c\}$,f:$A\to B$为从集合A到集合B的一个函数,那么该函数的值域C的不同情况有________种.

题组二 常错题

◆**索引**:求函数定义域时非等价化简解析式致错;分段函数解不等式时忘记范围;换元法求解析式,反解忽视范围;对函数值域理解不透彻致错.

5. 函数$y=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$的定义域是________.

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leqslant0,\\-x+3,x>0,\end{cases}$则使得$f(x)\geqslant2$的自变量$x$的取值范围为________.

7. 已知$f(\sqrt{x})=x-1$,则当$x\geqslant0$时,$f(x)=$____________.

8. 若一系列函数的解析式相同、值域相同,但其定义域不同,则称这些函数为"同族函数",则函数解析式为$y=x^2$,值域为$\{1,4\}$的"同族函数"共有________个.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

探究点一 函数的定义域

角度1 求给定解析式的函数的定义域

例1 (1)函数$f(x)=\sqrt{2^x-1}+\frac{1}{x-2}$的定义域为 ( )

A. $[0,2)$ B. $(2,+\infty)$

C. $[0,2)\cup(2,+\infty)$ D. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

(2)已知函数$f(x)=\frac{3x}{\sqrt{2x-1}}+\log_2(4-x^2)$,则$f(x)$的定义域为________.

[总结反思] (1)求函数定义域即求使解析式有意义的自变量x的取值集合;(2)若函数是由几个基本初等函数的和、差、积、商的形式构成的,定义域一般是各个基本初等函数定义域的交集;(3)具体求解时一般是列出自变量满足的不等式(组),得出不等式(组)的解集即可;(4)注意不要轻易对解析式化简变形,否则易出现定义域错误.

角度2 求抽象函数的定义域

例2 (1)若函数$y=f(x)$的定义域是$[0,2020]$,则函数$g(x)=\frac{f(x+1)}{x-1}$的定义域是 ( )

A. $[0,1)\cup(1,2020]$ B. $[-1,1)\cup(1,2020]$

C. $[0,1)\cup(1,2019]$ D. $[-1,1)\cup(1,2019]$

(2)[2019·黄冈调研] 已知函数$f(x+1)$的定义域为$(-2,0)$,则$f(2x-1)$的定义域为 ( )

A. $(-1,0)$ B. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

C. $(0,1)$ D. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

[总结反思] (1)无论抽象函数的形式如何,已知定义域还是求定义域,均是指其中的x的取值集合;(2)若已知函数$f(x)$的定义域为$[a,b]$,则复合函数$f[g(x)]$的定义域由不等式$a\leqslant g(x)\leqslant b$求出.(3)若复合函数$f[g(x)]$的定义域为$[a,b]$,则函数$f(x)$的定义域为$g(x)$在$[a,b]$上的值域.

变式题 (1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$,则函数 $g(x)=f(2x)+\sqrt{1-\lg x}$ 的定义域为 ( )

A. $\{x|0<x<4\}$　　B. $\{x|-4<x<10\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x<1\}$

(2)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$,函数 $g(x)=f(x-1)+f(3-2x)$,则函数 $g(x)$ 的定义域为________.

探究点二　函数的解析式

例 3 (1)已知函数 $f(\sqrt{x}+1)=x-4$,则 $f(x)=$________.

(2)已知 $f(x)$ 为二次函数且 $f(0)=3$,$f(x+2)-f(x)=4x+2$,则 $f(x)=$________.

(3)已知函数 $f(x)$ 对一切不为 0 的实数 x 均满足 $f(x)+2f\left(\frac{2020}{x}\right)=\frac{2020}{x}+2$,则 $f(x)=$________.

[总结反思] 求函数解析式的常用方法:

(1)换元法:已知复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式,可用换元法,此时要注意新元的取值范围.

(2)待定系数法:已知函数的类型(如一次函数、二次函数),可用待定系数法.

(3)配凑法:由已知条件 $f[g(x)]=F(x)$,可将 $F(x)$ 改写成关于 $g(x)$ 的表达式,然后以 x 替代 $g(x)$,便得 $f(x)$ 的解析式.

(4)解方程组法:已知 $f(x)$ 与 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 或 $f(-x)$ 之间的关系式,可根据已知条件再构造出另外一个等式,两等式组成方程组,通过解方程组求出 $f(x)$.

变式题 (1)已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1-x}$,则 $f(x)$ 的解析式为 ( )

A. $f(x)=\frac{1-x}{x}(x\neq0$ 且 $x\neq1)$

B. $f(x)=\frac{1}{1-x}(x\neq0$ 且 $x\neq1)$

C. $f(x)=\frac{1}{x-1}(x\neq0$ 且 $x\neq1)$

D. $f(x)=\frac{x}{x-1}(x\neq0$ 且 $x\neq1)$

(2)已知 $f(x)$ 满足 $3f(x)+2f(-x)=4x$,则 $f(x)=$________.

(3)若一次函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)]=x+4$,则 $f(-1)=$________.

探究点三　以分段函数为背景的问题

微课1·思维

微点 1　分段函数的求值问题

例 4 (1)[2019·杭州二模] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x(x>0),\\2^x(x\leqslant0)\end{cases}(a>0$ 且 $a\neq1)$,若 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$,则实数 $a=$________,$f[f(2)]=$________.

(2)[2019·南昌一模] 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2^x(x\leqslant0),\\f(x-3)(x>0),\end{cases}$ 则 $f(5)$ 的值为 ( )

A. -7　　B. -1

C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

[总结反思] 求分段函数的函数值时务必要确定自变量所在的区间及其对应关系.对于复合函数的求值问题,应由里到外依次求值.

微点 2　分段函数与方程

例 5 (1)[2019·安庆二模] 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1},-1<x<0,\\2x,x\geqslant0,\end{cases}$ 若实数 a 满足 $f(a)=f(a-1)$,则 $f\left(\frac{1}{a}\right)=$ ( )

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

(2)[2019·浙江三校二联] 定义 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a,a\geqslant b,\\b,a<b,\end{cases}$ 已知函数 $f(x)=\max\{|x|,-(x-1)^2+b\}$,$b\in\mathbf{R}$,$f(1)>1$,则 b 的取值范围是________;若 $f(x)=2$ 有四个不同的实根,则 b 的取值范围是________.

[总结反思] (1)若分段函数中含有参数,则直接根据条件选择相应区间上的解析式代入求参;(2)若是求自变量的值,则需要结合分段区间的范围对自变量进行分类讨论,再求值.

微点 3　分段函数与不等式问题

例 6 (1)[2019·浙江七彩联盟模拟] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1,x\leqslant0,\\\log_{\frac{1}{2}}x,x>0,\end{cases}$ 且 $f\left(m-\frac{1}{2}\right)=0$,则不等式 $f(x)>m$ 的解集为 ( )

A. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

C. $\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$　　D. $(-1,+\infty)$

(2)[2019·江淮十校联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3\left(x<\frac{1}{2}\right),\\\frac{1}{x}\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right),\end{cases}$ 则不等式 $x^2\cdot f(x)+x-2\leqslant0$ 的解集是________.

[总结反思] 涉及与分段函数有关的不等式问题，主要表现为解不等式，当自变量取值不确定时，往往要分类讨论求解；当自变量取值确定，但分段函数中含有参数时，只需依据自变量的情况，直接代入相应解析式求解.

应用演练

1. 【微点1】[2019·四川名校联盟一模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x, x\leqslant 3,\\ x^2, x>3,\end{cases}$ 则 $f[f(-2)]$ 的值为 ( )

A. 81　　B. 27

C. 9　　D. $\frac{1}{9}$

2. 【微点2】[2019·呼和浩特调研] 设 $f(x)=\begin{cases}3^{-x}+a(x\leqslant 2),\\ f(x-1)(x>2),\end{cases}$ 若 $f(3)=-\frac{8}{9}$，则实数 $a=$ ( )

A. 1　　B. -1

C. $\frac{1}{9}$　　D. 0

3. 【微点3】[2019·东莞一模] 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, x\leqslant 1,\\ 1-\log_2 x, x>1,\end{cases}$ 则满足 $f(x)\leqslant 2$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[-1,2]$　　B. $[0,2]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

4. 【微点3】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\leqslant 1,\\ \ln x+1, x>1,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x+1)>1$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $(-1,+\infty)$

B. $\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$

C. $(0,+\infty)$

D. $(1,+\infty)$

5. 【微点2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x<0,\\ a\sqrt{x}, x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $f(-1)+f(1)=2$，则 $a=$________.

请完成课时作业（三）

第4讲　函数的单调性

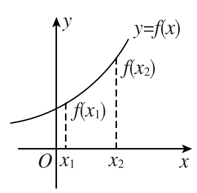
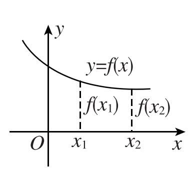
考试说明 理解函数的单调性，会判断函数的单调性

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 单调函数的定义

	增函数	减函数
定义	一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2	
	当 $x_1<x_2$ 时，都有______，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数	当 $x_1<x_2$ 时，都有______，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数
图像描述	 自左向右看图像是________	 自左向右看图像是________

2. 单调区间的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是________，那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有（严格的）单调性，________叫作函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

常用结论

1. 函数单调性的常用结论：

(1)若 $f(x)$，$g(x)$ 均为区间 A 上的增（减）函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是区间 A 上的增（减）函数.

(2)若 $k>0$，则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同；若 $k<0$，则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相反.

(3)函数 $y=f(x)(f(x)>0)$ 在公共定义域内与 $y=-f(x)$，$y=\frac{1}{f(x)}$ 的单调性相反.

(4)函数 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 在公共定义域内与 $y=\sqrt{f(x)}$ 的单调性相同.

(5)复合函数单调性的判断方法：若两个简单函数的单调性相同，则这两个函数的复合函数为增函数；若两个简单函数的单调性相反，则这两个函数的复合函数为减函数. 简称"同增异减".

2. 单调性定义的等价形式：设 $x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1\neq x_2$.

(1)若有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$ 或 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是增函数；

(2)若有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$ 或 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是减函数.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=(2a-1)x-3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则 a 的取值范围是________.
2. [教材改编] 函数 $f(x)=(x-2)^2+5(x\in[-3,3])$ 的单调递增区间是________；单调递减区间是________.
3. [教材改编] 函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ 的单调递增区间为________.
4. [教材改编] 函数 $f(x)=|x-a|+1$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是________.

题组二　常错题

◆ 索引：求单调区间忘记定义域导致出错；求分段函数的单调性时忘记整体考虑；利用单调性解不等式时忘记在单调区间内求解；混淆"单调区间"与"在区间上单调"两个概念.

5. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-3)$ 的单调递增区间是________.
6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x, x\geqslant 2,\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1, x<2\end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则实数 a 的取值范围为________.
7. 函数 $y=f(x)$ 是定义在 $[-2,2]$ 上的减函数，且 $f(a+1)<f(2a)$，则实数 a 的取值范围是________.
8. (1)若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是________.
   (2)若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的单调递减区间为 $(-\infty,4]$，则 a 的值为________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

▶ 探究点一　函数单调性的判断与证明

例1 判断函数 $f(x)=a^x+\dfrac{x-3}{x+2}(a>1)$，$x\in(-2,+\infty)$ 的单调性，并用单调性的定义证明你的结论.

[总结反思] (1)定义法证明函数单调性的一般步骤：①任取 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$；②作差 $f(x_1)-f(x_2)$；③变形(通常是因式分解和配方)；④定号(即判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负)；⑤下结论(即指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性).

变式题 (1)下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是 (　　)

A. $y=\ln(x+2)$　　B. $y=-\sqrt{x}$

C. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=x+\dfrac{1}{x}$

(2)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意 $x_1<x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$，则下列说法正确的是 (　　)

A. $y=f(x)+x$ 是增函数

B. $y=f(x)+x$ 是减函数

C. $y=f(x)$ 是增函数

D. $y=f(x)$ 是减函数

▶ 探究点二　求函数的单调区间

例2 (1)函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的单调递增区间是 (　　)

A. $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, x>1,\\0, x=1,\\-1, x<1,\end{cases}$ $g(x)=x^2f(x-1)$，则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是________.

[总结反思] (1)求函数单调区间的常见方法：①定义法；②图像法；③导数法.

(2)求复合函数单调区间的一般步骤为：①确定函数的定义域；②求简单函数的单调区间；③求复合函数的单调区间，其依据是"同增异减".

(3)单调区间只能用区间表示，不能用集合或不等式表示，有多个单调区间应分开写，不能用并集符号"∪"连接.

变式题 (1)[2019·哈尔滨三中二模] 函数 $f(x)=\log_2(x^2-3x-4)$ 的单调递减区间为 (　　)

A. $(-\infty,-1)$　　B. $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　D. $(4,+\infty)$

(2)[2019·贵阳二模] 下列关于函数 $f(x)=|x-1|-1$ 的结论，正确的是 (　　)

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

C. $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减

探究点三 利用函数单调性解决问题

微课2 · 方法

微点1 利用函数的单调性比较大小

例3 函数 $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$，若 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$b=f(\ln 2)$，$c=f\left(\ln\frac{1}{3}\right)$，则 ( )

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

[总结反思] 比较函数值的大小时，若自变量的值不在同一个单调区间内，则要利用其函数性质，转化到同一个单调区间内进行比较，对于选择题、填空题能数形结合的尽量用图像法求解.

微点2 利用函数的单调性解决不等式问题

例4 (1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且对任意的 x_1,x_2 且 $x_1\neq x_2$，都有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)>0$ 成立，若 $f(x^2+1)>f(m^2-m-1)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $(-1,2)$

B. $[-1,2]$

C. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

(2)函数 $f(x)=e^x+x-e$，若实数 $a(a>0$ 且 $a\neq1)$ 满足 $f\left(\log_a\frac{3}{4}\right)<1$，则 a 的取值范围为________.

[总结反思] 利用函数单调性解不等式的具体步骤是：(1)将函数不等式转化成 $f(x_1)>f(x_2)$ 的形式；(2)考查函数 $f(x)$ 的单调性；(3)根据函数 $f(x)$ 的单调性去掉法则“f”，转化为形如“$x_1>x_2$”或“$x_1<x_2$”的常规不等式，从而得解.

微点3 利用函数的单调性求参数的范围(或值)

例5 (1)[2019·温州模拟] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<a,\\x^2,x\geq a,\end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调的，则实数 a 的取值范围是________；若对任意的实数 $x_1<a$，总存在实数 $x_2\geq a$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=0$，则实数 a 的取值范围是________.

(2)已知函数 $f(x)=e^{|x-a|}$(a 为常数)，若 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是________.

[总结反思] (1)视参数为已知数，依据函数的图像或单调性的定义，确定函数的单调区间，与已知单调区间比较求参数；(2)若分段函数是单调函数，则不仅要保证在各区间上单调性一致，还要确保在整个定义域内是单调的.

应用演练

1. 【微点1】设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 ( )

A. $f(a^2+a+2)>f\left(\frac{7}{4}\right)$

B. $f(a^2+a+2)<f\left(\frac{7}{4}\right)$

C. $f(a^2+a+2)\geq f\left(\frac{7}{4}\right)$

D. $f(a^2+a+2)\leq f\left(\frac{7}{4}\right)$

2. 【微点2】[2020·佛山一中月考] 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $[0,+\infty)$ 的减函数，且 $f(2)=-1$，则满足 $f(2x-4)>-1$ 的实数 x 的取值范围是 ( )

A. $(3,+\infty)$　　B. $(-\infty,3)$

C. $[2,3)$　　D. $[0,3)$

3. 【微点2】[2019·新乡三模] 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，且当 $x\in[-2,1]$ 时，$f(x)=x^2-2x-4$，则关于 x 的不等式 $f(x)<-1$ 的解集为 ( )

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-\infty,3)$

C. $(-1,3)$　　D. $(-1,+\infty)$

4. 【微点3】设函数 $f(x)=\frac{2x}{x-2}$ 在区间 $[3,4]$ 上的最大值和最小值分别为 M,m，则 $\frac{m^2}{M}=$ ( )

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{8}{3}$

5. 【微点4】已知函数 $f(x)=x^2-6x+8$ 在 $[1,a)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,3]$　　B. $[0,3]$

C. $[3,+\infty)$　　D. $(1,3]$

请完成课时作业(四)

第5讲 函数的值域与最值

考试说明 1. 了解函数的值域.

2. 理解函数的最大(小)值的含义，会求简单函数的最大(小)值.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数的最值

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足	
条件	(1)对于任意 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$； (2)存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$	(1)对于任意 $x\in I$，都有________； (2)存在 $x_0\in I$，使得________
结论	M 为最大值	M 为最小值

2. 求值域的步骤

(1)确定函数的定义域；

(2)分析函数解析式的特点，并寻找相对应的方法(此为关键步骤)；

(3)计算出函数的值域.

常用结论

函数最值的两条结论：

(1)闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值，当函数在闭区间上单调时最值一定在端点处取得.

(2)开区间上的“单峰”函数一定存在最大值或最小值.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=2x-3, x\in[-1,4]$ 的值域是________.

2. [教材改编] 函数 $f(x)=x^2-2x-3, x\in[-1,4]$ 的值域是________.

3. [教材改编] 函数 $f(x)=3^{-x+1}, x\in[-1,5]$ 的最大值为________.

4. [教材改编] 函数 $f(x)=|4x-1|-8, x\in[-2,2]$ 的值域为________.

题组二　常错题

◆ **索引**：忘记定义域导致值域求错；换元时忽视参数范围导致值域求错.

5. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$ 的值域为 $[1,2]$，则函数 $y=f(x+1)$ 的值域为________.

6. 函数 $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 的值域为________.

7. 函数 $f(x)=\sqrt{16-4^x}$ 的值域是________.

8. 若函数 $y=\dfrac{2}{x^2-1}$ 的定义域是 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5 \text{ 且 } x\in\mathbf{Z}\right\}$，则函数的最大值为________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

▶ 探究点一　利用单调性求值域

例 1 (1)已知 $a>0$，设函数 $f(x)=\dfrac{2020^{x+1}+2019}{2020^x+1}+2019x^3(x\in[-a,a])$ 的最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N$ 的值为 (　　)

A. 2019　　B. 2020

C. 4039　　D. 4038

(2)[2019·福建龙岩质检] 函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\log_2(x+4), x\in[-2,2]$ 的值域为____________.

[总结反思] 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，则 $f(x)$ 必在区间的端点处取得最值；若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不单调，则最小值为函数 $f(x)$ 在该区间内的极小值和 $f(a)$，$f(b)$ 中最小的值，最大值为函数 $f(x)$ 在该区间内的极大值和 $f(a)$，$f(b)$ 中最大的值.

变式题 (1)函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\geqslant 2)$ 的最大值为 (　　)

A. 不存在　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

(2)已知函数 $f(x)=\left|\sqrt{|x|}-\dfrac{1}{x^2}\right|$，当 $|x|\in[1,9]$ 时，若 $f(x)$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M-m=$ (　　)

A. $\dfrac{241}{81}$　　B. $\dfrac{242}{81}$　　C. $\dfrac{26}{9}$　　D. $\dfrac{31}{9}$

▶ 探究点二　常见基本函数在给定区间上的值域

例 2 (1)函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}, x\in[0,8]$ 的值域是________.

(2)若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2x+4$ 的定义域、值域都是闭区间 $[2,2b]$，则 b 的值为________.

(3)函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域是________.

(4)函数 $y=\dfrac{2x^2+4x-7}{x^2+2x+3}$ 的值域是________.

[总结反思] (1)求常见基本函数在给定区间上的值域要先确定函数在给定区间上的单调性，根据单调性求值域. (2)分子、分母中含有二次项的函数，通常先化为 $A(y)x^2+B(y)x+C(y)=0$ 的形式，再利用 $\Delta\geqslant 0$ 求解关于 y 的不等式. (3)形如 $f(x)=ax+b+\sqrt{cx+d}$ 的函数，可以考虑用换元法消掉根式，化成一个二次函数，再求值

域.(4)对于“对称”的分式函数 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ 或 $y=\frac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c}$,常利用分式的除法分离成常数与一个分式函数的和,再求值域.

变式题 (1)函数 $y=\frac{2x}{x+1}$, $x\in(3,+\infty)$ 的值域为________.

(2)已知 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}-a$, $x\in[1,4]$ 的最小值是 5,则 $f(x)$ 的值域为________.

(3)函数 $y=2x-\sqrt{x-1}$ 的值域为________.

(4)函数 $y=\frac{x^2+4x+6}{x^2+4x+5}$ 的值域为________.

探究点三 分段、复合函数的值域(换元法)

例 3 (1)已知函数 $f(x)=\log_2\left(3^x+\frac{1}{3^x}-2\right)$,则 $f(x)$ 的值域为 ( )

A. $(-\infty,-2)$ B. $(-2,2)$

C. $(-\infty,+\infty)$ D. $[0,+\infty)$

(2)若函数 $f(x)=\begin{cases}x+a, x\leqslant 2,\\ \log_4 x, x>2\end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是________.

[总结反思] (1)求复合函数的值域常利用换元法.(2)分段函数是一个函数,各段自变量取值范围的并集是分段函数的定义域;各段函数值取值范围的并集是分段函数的值域.解决分段函数的值域问题,关键是求出(列出)组成分段函数的各段函数值的取值范围(应满足的条件).

变式题 (1)设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,对于给定的正数 M,定义函数 $f_M(x)=\begin{cases}f(x), f(x)\leqslant M,\\ M, f(x)>M,\end{cases}$ 则称函数 $f_M(x)$ 为 $f(x)$ 的“孪生函数”.若给定函数 $f(x)=\begin{cases}2-x^2, -2\leqslant x\leqslant 0,\\ 2^x-1, x>0,\end{cases}$ $M=1$,则 $f_M(x)$ 的值域为 ( )

A. $[-2,1]$ B. $[-1,2]$

C. $(-\infty,2]$ D. $(-\infty,-1]$

(2)函数 $y=4^{x-\frac{1}{2}}-3\times 2^x+5$, $x\in[0,2]$ 的值域是________.

探究点四 函数值域与最值的综合问题

例 4 (1)[2019·江西七校二联] 已知 $f(x)=\begin{cases}|x-a|+1, x>1,\\ a^x+a, x\leqslant 1(a>0 且 a\neq 1),\end{cases}$ 若 $f(x)$ 有最小值,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(\frac{2}{3},1\right)$ B. $(1,+\infty)$

C. $\left(0,\frac{2}{3}\right]\cup(1,+\infty)$ D. $\left(\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$

(2)[2019·温州模拟] 已知 $f(x)=x^2-ax$,若对任意的 $a\in\mathbf{R}$,存在 $x_0\in[0,2]$,使得 $|f(x_0)|\geqslant k$ 成立,则实数 k 的最大值是________.

[总结反思] 已知函数的最值求参数取值范围问题,往往可以结合图像来解决,任意、存在性问题可以转化为函数的最值问题来解决.

变式题 (1)[2019·杭高期中] 若函数 $f(x)=\begin{cases}2^{|x-2|}, x\leqslant 2,\\ \log_2(x+a), x>2\end{cases}$ 的最小值为 $f(2)$,则实数 a 的取值范围为 ( )

A. $a<0$ B. $a>0$

C. $a\leqslant 0$ D. $a\geqslant 0$

(2)已知函数 $f(x)=\left|x+\frac{a}{x}\right|(a\in\mathbf{R})$.

①当 $a=1$ 时,写出 $f(x)$ 的单调递增区间(不需写出推证过程);

②当 $x>0$ 时,若直线 $y=4$ 与函数 $f(x)$ 的图像交于 A,B 两点,记 $|AB|=g(a)$,求 $g(a)$ 的最大值.

请完成课时作业(五)

第 6 讲 函数的奇偶性与周期性

考试说明 1. 理解函数的奇偶性,会判断函数的奇偶性.

2. 了解函数的周期性.

3. 会运用函数图像理解和讨论函数的性质

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数的奇偶性

	偶函数	奇函数
定义	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x	
	都有______，那么函数 $f(x)$ 是偶函数	都有______，那么函数 $f(x)$ 是奇函数
图像特征	关于______对称	关于______对称

2. 函数的周期性

(1)周期函数

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有________，那么就称函数$y=f(x)$为周期函数，称 T 为这个函数的周期.

(2)最小正周期

如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个______，那么这个______就叫作 $f(x)$ 的最小正周期.

常用结论

1. 奇(偶)函数定义的等价形式：
(1) $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数；
(2) $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.
2. 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，对 $f(x)$ 的定义域内任一自变量的值 x，有如下结论：
(1)若 $f(x+a)=-f(x)$，则 $T=2|a|$；
(2)若 $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，则 $T=2|a|$；
(3)若 $f(x+a)=f(x+b)$，则 $T=|a-b|$.
3. 对称性与周期性之间的常用结论：
(1)若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称，则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2|b-a|$；
(2)若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称，则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2|b-a|$；
(3)若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)$ 对称，则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4|b-a|$.
4. 关于函数图像的对称中心或对称轴的常用结论：
(1)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)=f(a-x)$，则函数$f(x)$的图像关于直线 $x=a$ 对称；
(2)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)=f(b-x)$，则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称；
(3)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)=-f(b-x)$，则函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\dfrac{a+b}{2},0\right)$ 对称；
(4)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)+f(b-x)=c$，则函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{c}{2}\right)$ 对称.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=x^2-1$，$f(x)=x^3$，$f(x)=x^2+\cos x$，$f(x)=\dfrac{1}{x}+|x|$ 中，偶函数的个数是______.
2. [教材改编] 若奇函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是减函数，则它在 $[-b,-a]$ 上是______函数；若偶函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数，则它在 $[-b,-a]$ 上是______函数.
3. [教材改编] 已知 $f(x)$ 为奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-1$，则 $f(-2)=$______.
4. [教材改编] 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(x)$，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\log_4(x^2+4)$，则 $f(2019)=$______.

题组二　常错题

◆ **索引**：判定奇偶性时，不化简解析式导致出错；奇偶性应用不熟练导致出错；找不到周期函数的周期从而求不出结果；利用奇偶性求解析式时忽略定义域导致出错.

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\lg(1-x^2)}{|x+3|-3}$ 是______函数.(填“奇”或“偶”或“非奇非偶”)
6. 若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数，则函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线______对称；若函数 $y=g(x+b)$ 是奇函数，则函数 $y=g(x)$ 的图像关于点______成中心对称.
7. 若奇函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，$f(2.5)=2$，则 $f(-0.5)=$______.
8. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x-3$，则函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　函数奇偶性及其延伸　微课3·思维

微点 1　函数奇偶性的判断

例 1 (1)函数 $f(x)=|x+1|-|x-1|$ (　　)

A. 是奇函数

B. 是偶函数

C. 既是奇函数也是偶函数

D. 既不是奇函数也不是偶函数

(2)下列函数是奇函数的是 (　　)

A. $y=\cos x+x$　　B. $y=x^3\sin x$

C. $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$　　D. $y=e^x+e^{-x}$

[总结反思] 函数具有奇偶性包括两个必备条件：

(1)定义域关于原点对称，这是函数具有奇偶性的必要不充分条件，所以首先考虑定义域.

(2)判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.在判断奇偶性时，可以转化为判断奇偶性的等价关系式 $f(x)+f(-x)=0$(奇函数)或 $f(x)-f(-x)=0$(偶函数)是否成立.

常见特殊结构的奇偶函数：$f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)(a>0$ 且 $a\neq1)$ 为奇函数，$f(x)=a^x+a^{-x}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 为偶函数.

微点 2 函数奇偶性的应用

例 2 (1)[2019·烟台一模] 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，当 $x<0$ 时，$f(x)=\log_2(-x)+m$，则实数 $m=$ ( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

(2)[2019·上饶横峰中学模拟] 设函数 $f(x)=\frac{\sin x+x\cos x}{ax^2}(a\in\mathbf{R}, a\neq0)$，若 $f(-2019)=2$，则 $f(2019)=$ ( )

A. 2 B. -2 C. 2019 D. -2019

[总结反思] 利用函数的奇偶性可以解决以下问题：

(1)求函数值：将待求函数值利用奇偶性转化为求函数已知解析式的区间上的函数值.

(2)求解析式：将待求区间上的自变量转化到已知解析式区间上，再利用奇偶性的定义求出.

(3)求解析式中的参数：利用待定系数法求解，根据 $f(x)\pm f(-x)=0$ 得到关于参数的恒等式，由系数的对等性得方程(组)，进而得出参数的值.

(4)画函数图像：利用函数的奇偶性可画出函数在另一对称区间上的图像.

(5)求特殊值：利用奇函数的最大值与最小值的和为零可求一些特殊结构的函数值.

微点 3 奇偶性延伸到其他对称性问题(从平移角度说说对称性问题)

例 3 (1)[2019·临沂三模] 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，设 $h(x)=|f(x+1)|+g(x+1)$，则下列结论中正确的是 ( )

A. $h(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称

B. $h(x)$ 的图像关于点 $(-1,0)$ 对称

C. $h(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称

D. $h(x)$ 的图像关于直线 $x=-1$ 对称

(2)[2019·重庆西南大学附属中学月考] 已知函数 $f(x+2)$ 是偶函数，$f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上单调递减，$f(0)=0$，则 $f(2-3x)>0$ 的解集是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

B. $\left(\frac{2}{3},2\right)$

C. $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

D. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

[总结反思] 由奇偶性延伸所得对称性问题的常见结论有：

(1)若函数 $y=f(x)$ 为奇函数(或偶函数)，则函数 $y=f(x+a)$ 的图像关于点 $(-a,0)$ 对称(或关于直线 $x=-a$ 对称)；

(2)若函数 $y=f(x+a)$ 为奇函数(或偶函数)，则函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称(或关于直线 $x=a$ 对称).

应用演练

1. 【微点 1】[2019·北京房山区二模] 下列函数中为偶函数的是 ( )

A. $y=x^3+x$ B. $y=x^2-4$

C. $y=\sqrt{x}$ D. $y=|x+1|$

2. 【微点 2】[2019·江西师范大学附属中学三模] 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geqslant0,\\ -x^2+ax, x<0\end{cases}$ 为奇函数，则实数 a 的值为 ( )

A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

3. 【微点 2】已知函数 $f(x)=\lg(\sqrt{9x^2+1}-3x)+\sin x+1$，设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上的最大值和最小值分别为 M，N，则 $M+N$ 的值为 ( )

A. 2 B. 1

C. 0 D. -1

4. 【微点 3】已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2]$ 上为增函数，且 $f(x+2)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，若 $f(a)\leqslant f(3)$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1]$ B. $[3,+\infty)$

C. $[1,3]$ D. $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

5. 【微点 3】[2019·台州 4 月模拟] 已知 $f(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}\cdot\cos(2x+\alpha)$，$x\in\mathbf{R}$，则当 $\alpha\in[0,\pi]$ 时，$f(x)$ 的图像不可能是 ( )

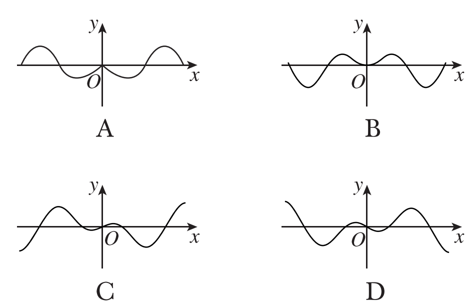


图 1-6-1

6. 【微点 3】[2019·内江三模] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，若 $f(x)$ 的图像向左平移 2 个单位后关于 y 轴对称，且 $f(1)=1$，则 $f(4)+f(5)=$________.

探究点二 函数的周期性及其应用

例 4 (1)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $f(x)=f(x+2)$ 恒成立，当 $x\in(-2,0]$ 时，$f(x)=x^2$，则当 $x\in(2,4]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式为 ( )

A. $f(x)=x^2-4$ B. $f(x)=x^2+4$

C. $f(x)=(x+4)^2$ D. $f(x)=(x-4)^2$

(2)[2019·西安中学月考] 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足 $f(x)=-\frac{1}{f(x+2)}$,且当 $x\in(-2,0]$时,$f(x)=2^x-\frac{1}{4}$,则 $f(\log_2 20)=$ ( )

A. -16 B. $-\frac{1}{16}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. -4

[总结反思](1)注意周期性的常见表达式的应用.
(2)根据函数的周期性,可以由函数局部的解析式(或函数值)得到整个定义域内的解析式(或相应的函数值).
(3)在解决具体问题时,要注意结论"若 T 是函数的周期,则 $kT(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0)$也是函数的周期"的应用.

变式题 [2019·西安中学期末] 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足 $f(x+6)=f(x)$.当$-3\leqslant x<-1$ 时,$f(x)=-(x+2)^2$,当$-1\leqslant x<3$ 时,$f(x)=x$,则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2019)=$ ( )

A. 335 B. 336 C. 338 D. 2016

探究点三 以函数性质的综合为背景的问题

微课4·思维

微点 1 奇偶性与单调性的结合

例 5 (1)[2019·天津北辰区模拟] 已知函数 $f(x)$是定义在 **R** 上的偶函数,且在$[0,+\infty)$上单调递增,$a=f(-\log_3 13)$,$b=f\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}\right)$,$c=f(2^{0.6})$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$ B. $a>c>b$
C. $b>a>c$ D. $c>a>b$

(2)已知定义在$[-1,1]$上的奇函数 $f(x)=\frac{2^x-m}{2^x+1}+\sin x$,若 $f(2x+3)<f(2m-1)$,则实数 x 的取值范围是________.

[总结反思](1)比较函数值的大小问题,可以利用奇偶性把不在同一单调区间上的两个或多个自变量的函数值转化到同一单调区间上,再利用函数的单调性比较大小;
(2)对于抽象函数不等式的求解,应变形为 $f(x_1)>f(x_2)$的形式,再结合单调性脱去法则"f"变成常规不等式(如 $x_1<x_2$ 或 $x_1>x_2$)求解.

微点 2 奇偶性与周期性的结合

例 6 (1)[2019·兰州一中三模] 已知函数 $f(x)$是 **R** 上的偶函数,且对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+3)=-f(x)$,当 $x\in(-3,0)$时,$f(x)=2x-5$,则 $f(8)=$ ( )

A. 11 B. 5
C. -9 D. -1

(2)[2019·栖霞模拟] 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=f(x-2)$,当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$f(x)=x^2$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=$ ( )

A. 2019 B. 0 C. 1 D. -1

[总结反思] 周期性与奇偶性相结合的问题多为求函数值问题,常利用奇偶性及周期性将所求函数值转化为已知函数解析式的区间上的函数值.

微点 3 奇偶性、周期性与单调性的结合

例 7 [2019·泉州质检] 定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=f(-x)$,且当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=2^x-\cos x$,则下列结论正确的是 ( )

A. $f\left(\frac{2020}{3}\right)<f\left(\frac{2019}{2}\right)<f(2018)$

B. $f(2018)<f\left(\frac{2020}{3}\right)<f\left(\frac{2019}{2}\right)$

C. $f(2018)<f\left(\frac{2019}{2}\right)<f\left(\frac{2020}{3}\right)$

D. $f\left(\frac{2019}{2}\right)<f\left(\frac{2020}{3}\right)<f(2018)$

[总结反思] 解决周期性、奇偶性与单调性相结合的问题,通常先利用周期性转化自变量所在的区间,然后利用奇偶性和单调性求解.

应用演练

1. 【微点 1】下列函数中,既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是 ( )

A. $y=x^3$ B. $y=\cos x$
C. $y=e^x$ D. $y=|x|+1$

2. 【微点 2】[2019·上饶重点中学联考] 函数 $f(x)=2^{|\sin 2x|}$是 ( )

A. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数
B. 最小正周期为 π 的奇函数
C. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数
D. 最小正周期为 π 的偶函数

3. 【微点 3】定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$,当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=2^x-1$,设 $a=\ln\frac{1}{\pi}$,$b=e^{-\ln\frac{2}{5}}$,$c=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.1}$,则 ( )

A. $f(a)<f(b)<f(c)$ B. $f(b)<f(c)<f(a)$
C. $f(b)<f(a)<f(c)$ D. $f(c)<f(b)<f(a)$

4. 【微点 2】[2019·浙江金丽衢十二校一联] 已知偶函数 $f(x)$满足 $f(x-1)=f(x+1)$,且当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=x$,则 $f\left(\frac{4}{3}\right)=$________;若在区间$[-1,3]$内,函数 $g(x)=f(x)-kx-k$ 有 4 个不同的零点,则实数 k 的取值范围是________.

请完成课时作业(六)

第 7 讲　二次函数与幂函数

考试说明 1. 二次函数

(1)掌握二次函数的图像与性质(单调性、对称性、顶点、最值).

(2)了解二次函数的广泛应用.

2. 幂函数

(1)了解幂函数的概念.

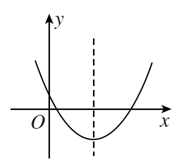
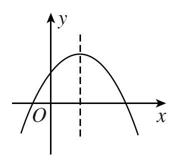
(2)掌握幂函数 $y=x,y=x^2,y=x^3,y=\frac{1}{x},y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图像和性质.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

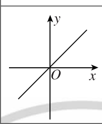
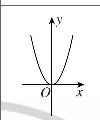
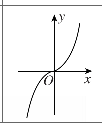
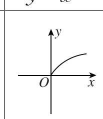
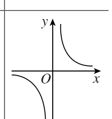
1. 二次函数的图像和性质

解析式	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
图像		
定义域	**R**	**R**
值域	________	________
单调性	在______上单调递减,在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递增	在______上单调递增,在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递减
顶点坐标	________	
奇偶性	当______时为偶函数	
对称轴方程	$x=-\frac{b}{2a}$	

2. 幂函数

(1)定义:形如 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$的函数称为幂函数,其中 x 是自变量,α 是常数.

(2)常见的五种幂函数的图像和性质比较

函数		$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图像						
性质	定义域	**R**	**R**	**R**	______	______
	值域	**R**	______	**R**	______	______
	奇偶性	____函数	____函数	____函数	______函数	____函数
	单调性	在 **R** 上单调递增	在____上单调递减;在____上单调递增	在 **R** 上单调递增	在______上单调递增	在______和______上单调递减
公共点		______				

> **常用结论**
>
> 1. 二次函数解析式的三种形式:
>
> (1)一般式:$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$;
>
> (2)顶点式:$f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq0)$;
>
> (3)零点式:$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$.
>
> 2. 一元二次不等式恒成立的条件:
>
> (1)"$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$恒成立"的充要条件是"$a>0$ 且 $\Delta<0$";
>
> (2)"$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$恒成立"的充要条件是"$a<0$ 且 $\Delta<0$".

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 若函数 $f(x)=4x^2-kx-8$ 在$[5,20]$上是单调函数,则实数 k 的取值范围是________.

2. [教材改编] 已知幂函数 $y=f(x)$的图像过点$(2,\sqrt{2})$,则函数 $f(x)=$______.

3. [教材改编] 函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 在闭区间$[0,3]$上的最大值为______,最小值为______.

4. [教材改编] 若函数 $y=x^2+(a+2)x+3,x\in[a,b]$的图像关于直线 $x=1$ 对称,则 $b=$______.

题组二　常错题

◆ **索引**:图像特征把握不准出错;不会利用二次函数图像解决问题出错;二次函数的单调性理解不到位出错;忽略幂函数的定义域出错;幂函数的图像掌握不到位出错.

5. 如图 1-7-1,若 $a<0,b>0$,则函数 $y=ax^2+bx$ 的大致图像是______(填序号).

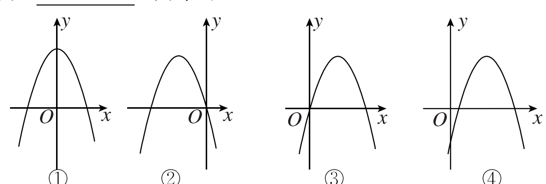


图 1-7-1

6. 设二次函数 $f(x)=x^2-x+a(a>0)$,若 $f(m)<0$,则 $f(m-1)$______0.(填">""<"或"=")

7. 若函数 $y=mx^2+x+2$ 在$[3,+\infty)$上是减函数,则 m 的取值范围是______.

8. 已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$,若 $f(a+1)<f(10-2a)$,则 a 的取值范围为______.

9. 当 $x\in(0,1)$时,函数 $y=x^m$ 的图像在直线 $y=x$ 的上方,则 m 的取值范围是______.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　幂函数的图像和性质

1. 已知幂函数 $y=x^n$，$y=x^m$，$y=x^p$ 的图像如图1-7-2所示，则　(　　)

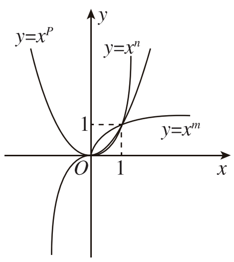


图 1-7-2

A. $m>n>p$

B. $m>p>n$

C. $n>p>m$

D. $p>n>m$

2. 幂函数 $f(x)=x^{a^2-10a+23}$ $(a\in\mathbf{Z})$ 为偶函数，且 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则 $a=$　(　　)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

3. 已知点 $(m,9)$ 在幂函数 $f(x)=(m-2)x^n$ 的图像上，设 $a=f\left(m^{-\frac{1}{3}}\right)$，$b=f\left(\ln\frac{1}{3}\right)$，$c=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 a,b,c 的大小关系为　(　　)

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

[总结反思] 幂函数的性质因幂指数大于零、等于零或小于零而不同，解题中要善于根据幂指数的符号和其他性质确定幂函数的解析式、参数取值等.

探究点二　二次函数的解析式

例 1 (1)已知二次函数 $y=f(x)$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{3}{2},49\right)$，且方程 $f(x)=0$ 的两个实根之差等于7，则此二次函数的解析式是________.

(2)已知二次函数 $f(x)$ 的图像经过点 $(4,3)$，$f(x)$ 的图像截 x 轴所得的线段长为2，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(2-x)=f(2+x)$，则函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$________.

[总结反思] 求二次函数解析式的三个策略：(1)已知三个点的坐标，宜选用一般式；(2)已知顶点坐标、对称轴、最大(小)值等，宜选用顶点式；(3)已知图像与 x 轴的两交点的坐标，宜选用零点式.

变式题 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=-1$，$f(-1)=-1$，且 $f(x)$ 的最大值是8，则此二次函数的解析式为________.

探究点三　二次函数的图像与性质问题

微课5・方法

微点1　通过图像识别二次函数

例 2 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图1-7-3所示. 给出下列结论：①$a+b+c<0$；②$a-b+c>0$；③$abc>0$；④$b=2a$. 其中正确的是________.(填序号)

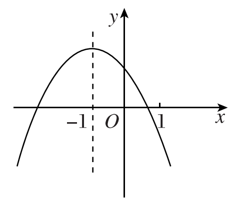


图 1-7-3

[总结反思] 一般地，给出了二次函数的图像，我们可以从图像中得到下列信息：(1)开口方向；(2)判别式的正负；(3)对称轴方程；(4)特殊点的函数值的大小(正负).

微点2　二次函数的单调性问题

例 3 (1)函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 的单调递增区间是　(　　)

A. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ 和 $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$ 和 $\left[\frac{3}{2},2\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ 和 $[2,+\infty)$

(2)已知函数 $f(x)=ax^2-2x-2$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上不单调，则实数 a 的取值范围是________.

[总结反思] 对于二次函数的单调性，关键是确定其图像的开口方向与对称轴的位置，若开口方向或对称轴的位置不确定，则需要分类讨论求解.

微点3　二次函数的最值问题

例 4 (1)[2019・河南八市重点高中二联] 已知 $f(x)=x^2+2x+1+a$，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f[f(x)]\geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为　(　　)

A. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{\sqrt{5}-3}{2},+\infty\right)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

(2)已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为2，则 a 的值为________.

[总结反思] 二次函数在闭区间上的最值主要有三种类型：轴定区间定、轴动区间定、轴定区间动. 不论哪种类型，解题的关键都是对称轴与区间的位置关系，当含有参数时，要依据对称轴与区间的位置关系进行分类讨论.

微点 4　二次函数的零点问题

例 5　已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 有两个不同的零点,则"$-2<a+b<0$"是"函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上至少有一个零点"的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

[总结反思] 由不等式恒成立求参数取值范围一般有两个解题思路:一是分离参数,二是不分离参数.两种思路都是将问题归结为求函数的最值,若不分离参数,则一般需要对参数进行分类讨论求解;若分离参数,则 $a\geqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\max}$, $a\leqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\min}$.

应用演练

1. 【微点 1】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像如图 1-7-4 所示,则下列结论中正确的是　　(　　)

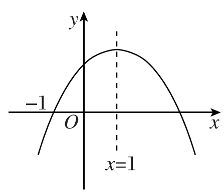


图 1-7-4

A. $a>0$

B. 当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大

C. $c<0$

D. 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根

2. 【微点 3】已知函数 $f(x)=x^2-6x+8$,且函数 $f(x)$ 在 $[1,a]$ 上的最小值为 $f(a)$,则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(1,2]$　　B. $(1,3]$

C. $(1,4]$　　D. $(1,5]$

3. 【微点 4】已知函数 $f(x)=x^2+x+6$,若存在 $x_0\in[0,2]$,使得 $f(x_0)\geqslant a^2-a$ 成立,则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $[-3,4]$

B. $[-2,3]$

C. $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$

4. 【微点 2】已知函数 $f(x)=(a-1)x^2+2x+3$ 在 $(-\infty,4]$ 上是增函数,则实数 a 的取值范围是________.

5. 【微点 4】[2019·天津和平区质检] 已知函数 $f(x)=-x^2+2x+3$,若 $f(x)\leqslant 2^{1-3a}$ 对任意实数 x 都成立,则实数 a 的最大值为________.

6. 【微点 4】[2019·绍兴柯桥区三模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2-|x|, x\leqslant2,\\(x-2)^2, x>2,\end{cases}$ 函数 $g(x)=b-f(2-x)$,若函数 $y=f(x)-g(x)$ 恰有四个零点,则实数 b 的取值范围为________.

请完成课时作业(七)

第 8 讲　指数与指数函数

考试说明　1. 了解指数幂的含义,掌握有理指数幂的运算.

2. 理解指数函数的概念,掌握指数函数的图像、性质及应用.

3. 了解指数函数的变化特征.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 根式

n 次方根	概念	如果 $x^n=a$,那么 x 叫作 a 的________,其中 $n>1$,$n\in\mathbf{N}^*$
	性质	当 n 是________时,a 的 n 次方根为 $x=\sqrt[n]{a}$
		当 n 是________时,正数 a 的 n 次方根为 $x=\pm\sqrt[n]{a}$,负数的偶次方根________
		0 的任何次方根都是 0,记作 $\sqrt[n]{0}=0$
根式	概念	式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作________,其中 n 叫作________,a 叫作________
	性质	当 n 为奇数时,$\sqrt[n]{a^n}=$________
		当 n 为偶数时,$\sqrt[n]{a^n}=\|a\|=$________

2. 有理数指数幂

(1)幂的有关概念

①正数的正分数指数幂:$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$.

②正数的负分数指数幂:$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$,且 $n>1)$.

③0 的正分数指数幂等于________,0 的负分数指数幂________.

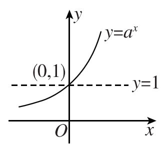
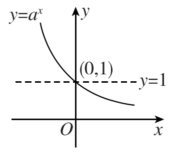
(2)有理数指数幂的性质

①$a^ra^s=$________$(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

②$(a^r)^s=$________$(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$;

③$(ab)^r=$________$(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

3. 指数函数的图像与性质

$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$a>1$	$0<a<1$
图像		
定义域	**R**	
值域	________	
性质	过定点________	
	当 $x>0$ 时，________；当 $x<0$ 时，________	当 $x>0$ 时，________；当 $x<0$ 时，________
	在 **R** 上是________	在 **R** 上是________

常用结论

1. 函数 $y=a^x+b$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像恒过定点 $(0,1+b)$.
2. 指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像以 x 轴为渐近线.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 若 $x+x^{-1}=3$，则 $x^2-x^{-2}=$________.

2. [教材改编] 已知 $2^{x-1}<2^{3-x}$，则 x 的取值范围是________.

3. [教材改编] 函数 $y=a^{x-1}+2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像恒过定点________.

4. [教材改编] 下列所给函数中值域为 $(0,+\infty)$ 的是________.（填序号）

①$y=-5^x$；②$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$；

③$y=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1}$；

④$y=\sqrt{1-2^x}$.

题组二　常错题

◆ **索引**：忽略 n 的范围导致式子 $\sqrt[n]{a^n}$（$a\in$ **R**）化简出错；不能正确理解指数函数的概念致错；指数函数问题忽略底数的两种情况致错；复合函数问题容易忽略指数函数的值域致错.

5. 计算 $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}=$________.

6. 若函数 $f(x)=(a^2-3)\cdot a^x$ 为指数函数，则 $a=$________.

7. 若函数 $f(x)=a^x$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 2，则 $a=$________.

8. 函数 $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ 的值域为____________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　指数幂的化简与求值

1. 化简 $\left(\sqrt[3]{(-5)^2}\right)^{\frac{3}{4}}$ 的结果为　　(　　)

A. 5　　B. $\sqrt{5}$　　C. $-\sqrt{5}$　　D. -5

2. 化简 $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$ 的结果为(　　)

A. $6a$　　B. $-a$

C. $-9a$　　D. $9a^2$

3. 计算：$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+(-2019)^0-4\times\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=$________.

4. 已知 $x+x^{-1}=3$，则 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^2+x^{-2}-6}$ 的值为________.

[总结反思] 指数幂运算的一般原则：

(1)指数幂的运算首先将根式、负分数指数幂统一为正分数指数幂，以便利用法则计算.

(2)先乘除后加减，负指数幂化成正指数幂的倒数.

(3)底数是负数，先确定符号；底数是小数，先化成分数；底数是带分数，先化成假分数.

(4)运算结果不能同时含有根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数.

探究点二　指数函数的图像及应用

例 1 (1)函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）与函数 $y=(a-1)x^2-2x-1$ 在同一个坐标系内的图像可能是　　(　　)

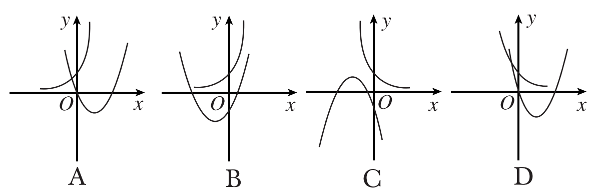


图 1-8-1

(2)[2019·菏泽期末] 已知实数 a,b 满足等式 $2019^a=2020^b$，则下列关系式中不可能成立的是　　(　　)

A. $0<a<b$　　B. $a<b<0$

C. $0<b<a$　　D. $a=b$

[总结反思] (1)研究指数函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$）的图像要抓住三个特殊点：$(1,a)$，$(0,1)$，$\left(-1,\frac{1}{a}\right)$.

(2)与指数函数有关的函数图像问题的研究,往往利用基本指数函数的图像,通过平移、对称变换得到其图像.

(3)一些指数方程、不等式问题的求解,往往结合相应的指数型函数图像,利用数形结合求解.

变式题 (1)函数 $y=\frac{xa^x}{|x|}(a>1)$的大致图像是 (　　)

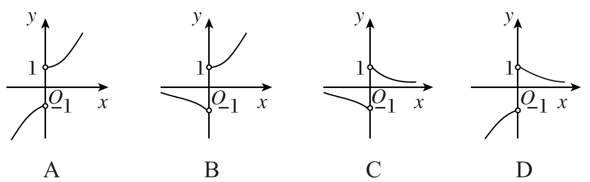


图 1-8-2

(2)已知方程$|3^x-1|=k$只有一个解,则 k 的取值范围为__________.

探究点三　解决指数型函数有关问题的方法

微课6・方法

微点 1　利用单调性比较大小

例 2 (1)已知 $a=36^{\frac{1}{5}}$,$b=3^{\frac{4}{3}}$,$c=9^{\frac{2}{5}}$,则 (　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$

C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

(2)[2019・厦门质检] 已知 $a>b>0$,$x=a+be^b$,$y=b+ae^a$,$z=b+ae^b$,则 (　　)

A. $x<z<y$　　B. $z<x<y$

C. $z<y<x$　　D. $y<z<x$

[总结反思] 比较指数式的大小,其依据是指数函数的单调性,原则上是将待比较的指数式化为同底的指数式,并要注意底数的范围是(0,1)还是$(1,+\infty)$,若不能化为同底,则可化为同指数或利用中间变量比较.

微点 2　指数方程或不等式的应用

例 3 (1)若关于 x 的方程$\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}+a-2=0$有解,则 a 的取值范围是 (　　)

A. $0\leqslant a<1$　　B. $1\leqslant a<2$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a>2$

(2)若 $f(x)$为偶函数,当 $x\geqslant 0$ 时满足 $f(x)=2^x-4$,则不等式$f(x-2)>0$的解集为__________.

[总结反思] (1)$a^{f(x)}=a^{g(x)}(a>0$ 且 $a\neq 1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$.(2)$a^{f(x)}>a^{g(x)}$,当 $a>1$ 时,等价于 $f(x)>g(x)$;当 $0<a<1$ 时,等价于 $f(x)<g(x)$.(3)有些含参数的指数不等式,需要分离变量,转化为求有关函数的最值问题.

微点 3　探究指数型函数的性质

例 4 (1)[2019・江淮名校联考] 已知函数 $f(x)=\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{2}$,则 $f(x)$是 (　　)

A. 奇函数,且在 **R** 上是增函数

B. 偶函数,且在$(0,+\infty)$上是增函数

C. 奇函数,且在 **R** 上是减函数

D. 偶函数,且在$(0,+\infty)$上是减函数

(2)[2019・延边第二中学月考] 函数 $f(x)=\frac{2^x-b}{2^{x+1}+a}$是 **R** 上的奇函数,$a,b$ 是常数.不等式 $f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则实数 k 的取值范围为 (　　)

A. $k<2\sqrt{2}-1$　　B. $-2\sqrt{2}-1<k<2\sqrt{2}-1$

C. $k\leqslant -1$　　D. $-1\leqslant k<2\sqrt{2}-1$

[总结反思] 指数函数性质的综合问题,主要涉及单调性、奇偶性、最值等,应在有关性质的基础上,结合指数函数的性质进行解决,而指数函数性质的重点是单调性,注意利用单调性实现问题的转化.

应用演练

1. 【微点 1】[2019・北京通州区一模] 已知 $c<0$,则下列不等式中成立的是 (　　)

A. $c>2^c$　　B. $c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$

C. $2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　D. $2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$

2. 【微点 1】[2019・宜宾二诊] 已知 $a=2^{0.4}$,$b=9^{0.2}$,$c=(\sqrt[4]{3})^3$,则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

3. 【微点 2】设 $2^x=8^{y+1}$,$9^y=3^{x-9}$,则 $x+y$ 的值为 (　　)

A. 18　　B. 21

C. 24　　D. 27

4. 【微点 2】若 $2^{x^2+1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$,则函数 $y=2^x$ 的值域是 (　　)

A. $\left[\frac{1}{8},2\right)$　　B. $\left[\frac{1}{8},2\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{8}\right]$　　D. $[2,+\infty)$

5. 【微点 3】已知幂函数 $f(x)=(m-1)^2x^{m^2-4m+2}$在$(0,+\infty)$上单调递增,函数 $g(x)=2^x-t$,若对任意 $x_1\in[1,6)$,总存在 $x_2\in[1,6)$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$,则 t 的取值范围是 (　　)

A. $\varnothing$　　B. $t\geqslant 28$ 或 $t\leqslant 1$

C. $t>28$ 或 $t<1$　　D. $1\leqslant t\leqslant 28$

请完成课时作业(八)

第 9 讲　对数与对数函数

考试说明 1. 理解对数的概念,掌握对数的运算,会用换底公式.

2. 理解对数函数的概念,掌握对数函数的图像、性质及应用.

3. 了解对数函数的变化特征.

课前双基巩固

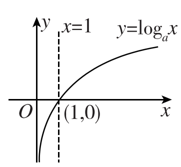
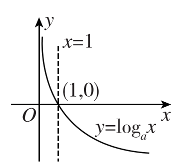
/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 对数

概念	如果 $a^x=N(a>0$,且 $a\neq1)$,那么 x 叫作以 a 为底 N 的________,记作 $x=\log_aN$,其中 a 叫作对数的底数,N 叫作真数,$\log_aN$ 叫作对数式	
性质	底数的限制:$a>0$,且 $a\neq1$	
	对数式与指数式的互化:$a^x=N\Leftrightarrow$________	
	负数和零没有________	
	$\log_a1=$________	
	$\log_aa=1$	
	对数恒等式:$a^{\log_aN}=$________	
运算法则	$\log_a(M\cdot N)=$________	$a>0$,且 $a\neq1$,$M>0$,$N>0$
	$\log_a\dfrac{M}{N}=$________	
	$\log_aM^n=$________$(n\in\mathbf{R})$	
换底公式	换底公式:$\log_ab=\dfrac{\log_cb}{\log_ca}(a>0$,且 $a\neq1$,$c>0$,且 $c\neq1$,$b>0)$	
	推论:$\log_{a^m}b^n=$________,$\log_ab=\dfrac{1}{\log_ba}$	

2. 对数函数的概念、图像与性质

概念	函数 $y=\log_ax(a>0$,且 $a\neq1)$叫作________函数	
底数	$a>1$	$0<a<1$
图像		
定义域	________	
值域	________	
性质	过定点________,即 $x=1$ 时,$y=0$	
	在区间$(0,+\infty)$上是________函数	在区间$(0,+\infty)$上是________函数

3. 反函数

指数函数 $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1)$与对数函数____________互为反函数,它们的图像关于直线________对称.

常用结论

1. $\lg2+\lg5=1$.

2. 底数 a 越大,函数在第一象限的图像越靠近 x 轴.

3. 函数 $y=\log_ax(a>0$ 且 $a\neq1)$的图像和函数 $y=\log_{\frac{1}{a}}x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图像关于 y 轴对称.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 化简 $\log_ab\log_bc\log_ca$ 的结果是________.

2. [教材改编] 函数 $f(x)=\log_2(2-x)$的定义域是________.

3. [教材改编] 若函数 $y=f(x)$是函数 $y=2^x$ 的反函数,则 $f(2)=$________.

4. [教材改编] 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)$的单调递增区间是________.

题组二　常错题

◆**索引**:对数的性质及其运算掌握不到位;忽略真数大于零致错;不能充分运用对数函数的性质;忽略对底数的讨论致误.

5. 有下列结论:①$\lg(\lg10)=0$;②$\lg(\ln e)=0$;③若 $\lg x=1$,则 $x=10$;④若 $\log_22=x$,则 $x=1$;⑤若 $\log_mn\cdot\log_3m=2$,则 $n=9$.其中正确结论的序号是____________.

6. 已知 $\lg x+\lg y=2\lg(x-2y)$,则 $\dfrac{x}{y}=$________.

7. 设 $a=\dfrac{1}{4}$,$b=\log_9\dfrac{8}{5}$,$c=\log_8\sqrt{3}$,则 a,b,c 的大小关系是________.

8. 若函数 $y=\log_ax(a>0,a\neq1)$在$[2,4]$上的最大值与最小值的差是 1,则 $a=$________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　对数式的化简与求值

例 1 (1)[2019·新乡三模] 设 $a=\lg 6$,$b=\lg 20$,则 $\log_2 3=$ (　　)

A. $\dfrac{a+b-1}{b+1}$　　B. $\dfrac{a+b-1}{b-1}$

C. $\dfrac{a-b+1}{b+1}$　　D. $\dfrac{a-b+1}{b-1}$

(2)$\log_3\dfrac{1}{2}\times\log_4 9+\lg\dfrac{5}{2}+2\lg 2=$________.

[总结反思] (1)对数运算法则是在化为同底的情况下进行的,因此经常会用到换底公式及其推论.在对含有字母的对数式进行化简时,必须保证恒等变形.

(2)利用对数运算法则,在真数的积、商、幂与对数的和、差、倍之间进行转化.

变式题 (1)[2019·杭州外国语学校月考] 计算:$\lg 25+2\lg 2+8^{\frac{2}{3}}=$________.

(2)[2019·济宁二模] 已知 $a=\log_4 9$,$b=\log_2 5$,则 $2^{2a+b}=$________.

探究点二　对数函数的图像及应用

例 2 (1)[2019·济南外国语学校模拟] 若函数 $f(x)=a^x-a^{-x}$($a>0$ 且 $a\neq1$)在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,则函数 $y=\log_a(|x|-1)$的图像可以是 (　　)

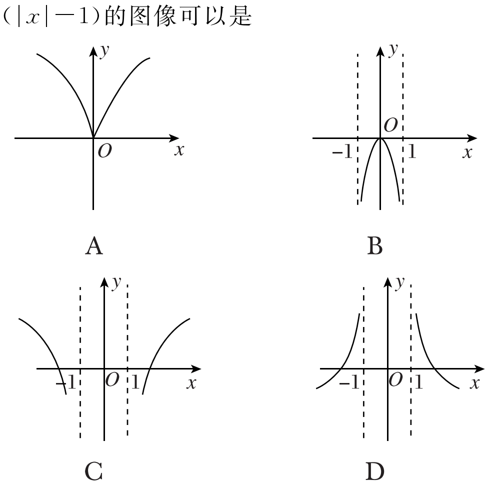


图 1-9-1

(2)[2019·延安一模] 已知函数 $f(x)=|\lg(x-1)|$,若 $1<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$,则 $2a+b$ 的取值范围是 (　　)

A. $[3+2\sqrt{2},+\infty)$　　B. $(3+2\sqrt{2},+\infty)$

C. $[6,+\infty)$　　D. $(6,+\infty)$

[总结反思] (1)在研究对数函数图像时一定要注意其定义域,注意根据基本的对数函数图像作出经过平移、对称变换得到的函数的图像.(2)一些对数型方程、不等式问题常转化为相应的函数图像问题,利用数形结合法求解.

变式题 (1)[2019·六安一中期末] 函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{|x+1|}\cdot\log_a|x|$($a>1$)的图像大致是 (　　)

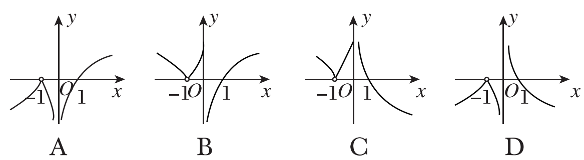


图 1-9-2

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}\lg x, & x>0,\\ \lg\left(-\dfrac{1}{x}\right), & x<0,\end{cases}$ 若 $f(m)>f(-m)$,则实数 m 的取值范围是 (　　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

探究点三　解决与对数函数性质有关的问题

微课7·方法

微点 1　比较大小

例 3 (1)[2019·唐山二模] 已知 $a=\log_3 2$,$b=\log_4 3$,$c=\log_{0.2}0.3$,则 a,b,c 的大小关系是 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

(2)设 $m=\log_{0.3}0.6$,$n=\dfrac{1}{2}\log_2 0.6$,则 (　　)

A. $m-n>m+n>mn$

B. $m-n>mn>m+n$

C. $m+n>m-n>mn$

D. $mn>m-n>m+n$

[总结反思] 比较对数式的大小,一是将对数式转化为同底的形式,再根据对数函数的单调性进行比较,二是采用中间值 0 或 1 等进行比较,三是将对数式转化为指数式,再将指数式转化为对数式,通过循环转化进行比较.

微点 2　解简单的对数不等式

例 4　(1)[2019·江西名校学术联盟质检] 若 $\log_a(a+1)<\log_a(2\sqrt{a})<0$,则实数 a 的取值范围是________.

(2)[2019·温州九校联盟期末] 已知对数函数 $f(x)$ 的图像过点 $(4,-2)$,则不等式 $f(x-1)-f(x+1)>3$ 的解集为________.

[总结反思] 对于形如 $\log_a f(x)>b$ 的不等式,一般转化为 $\log_a f(x)>\log_a a^b$,再根据底数的范围转化为 $f(x)>a^b$ 或 $0<f(x)<a^b$. 而对于形如 $\log_a f(x)>\log_b g(x)$ 的不等式,一般要转化为同底的不等式来解.

微点 3　对数函数性质的综合问题

例 5　(1)[2019·广州执信中学月考] 已知函数 $f(x)=\log_a(x^2+x-1)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值比最小值大 2,则 a 的值为　(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2)[2019·广东百校联考] 已知函数 $f(x)=\ln(x-2)+\ln(6-x)$,则　(　　)

A. $f(x)$ 在 $(2,6)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 在 $(2,6)$ 上的最大值为 $2\ln 2$

C. $f(x)$ 在 $(2,6)$ 上单调递减

D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(4,0)$ 对称

[总结反思] 利用对数函数的性质,求与对数函数有关的函数值域、最值和复合函数的单调性问题,必须弄清三方面的问题:一是定义域,所有问题都必须在定义域内讨论;二是底数与 1 的大小关系;三是复合函数的构成,即它是由哪些基本初等函数复合而成的. 另外,解题时要注意数形结合、分类讨论、转化与化归思想的使用.

应用演练

1. 【微点 1】[2019·韶关模拟] 已知 $a=\ln\frac{2}{3}$,$b=-\log_3\frac{3}{2}$,$c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,则下面大小顺序正确的是　(　　)

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$

C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

2. 【微点 3】[2019·威海二模] 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(a-x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,则函数 $f(x)$ 的值域为　(　　)

A. $(0,2)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,0]$

3. 【微点 3】函数 $f(x)=\log_2(-x^2+2x)$ 的单调递减区间是________.

4. 【微点 2】[2019·北京朝阳区期末] 对任意实数 x,都有 $\log_a(e^x+3)\geqslant 1$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$,则实数 a 的取值范围是________.

5. 【微点 3】[2019·绵阳期末] 已知函数 $f(x)=|\log_2 x|$,实数 a,b 满足 $0<a<b$,且 $f(a)=f(b)$,若 $f(x)$ 在 $[a^2,b]$ 上的最大值为 2,则 $\frac{1}{a}+b=$________.

请完成课时作业(九)

第 10 讲　函数的图像

考试说明　1. 掌握基本初等函数的图像特征,能熟练运用基本初等函数的图像解决问题.

2. 掌握图像的作法:描点法和图像变换.

3. 会运用函数的图像理解和研究函数性质.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 描点法作图

基本步骤是列表、描点、连线,具体为:

首先:①确定函数的定义域;②化简函数解析式;③讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性).

其次:列表(尤其注意特殊点、零点、最大值点、最小值点、与坐标轴的交点).

最后:描点,连线.

2. 图像变换

(1)平移变换

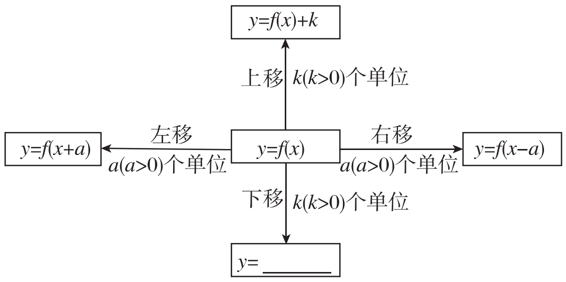


图 1-10-1

(2)对称变换

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}}$$y=$________的图像；

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}}$$y=$________的图像；

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow{\text{关于原点对称}}$$y=$________的图像；

$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图像$\xrightarrow{\text{关于直线 } y=x \text{ 对称}}$$y=$________（$a>0$，且 $a\neq1$）的图像.

(3)伸缩变换

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[\text{各点横坐标变为原来的}\frac{1}{a}(a>0)\text{倍}]{\text{纵坐标不变}}$$y=f(ax)$的图像.

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[\text{各点纵坐标变为原来的 } A(A>0)\text{倍}]{\text{横坐标不变}}$$y=Af(x)$的图像.

(4)翻折变换

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[x\text{ 轴及上方部分不变}]{x\text{ 轴下方部分翻折到上方}}$$y=$________的图像；

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[\text{原 } y \text{ 轴左侧部分去掉，右侧不变}]{y\text{ 轴右侧部分翻折到左侧}}$$y=$________的图像.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 函数 $y=\log_a x$ 与函数 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图像关于直线________对称.

2. [教材改编] 函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图像关于直线________对称.

3. [教材改编] 函数 $y=\log_2 x$ 与函数 $y=2^x$ 的图像关于直线________对称.

4. [教材改编] 函数 $y=\sqrt{|1-x^2|}$ 的大致图像是________.（填序号）

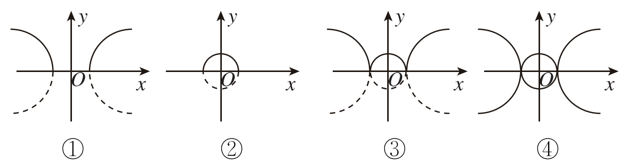


图 1-10-2

题组二 常错题

◆ **索引：**函数图像的几种变换记混；分段函数的图像问题.

5. 将函数 $f(x)=(2x+1)^2$ 的图像向左平移一个单位后，得到的图像的函数解析式为____________.

6. 把函数 $f(x)=\ln x$ 的图像上各点的横坐标扩大到原来的 2 倍，得到的图像的函数解析式是________.

7. 设 $f(x)=2^{-x}$，$g(x)$的图像与 $f(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，$h(x)$的图像由 $g(x)$的图像向右平移 1 个单位得到，则 $h(x)=$____________.

8. 函数 $y=e^{\ln x}+|x-1|$ 的图像是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　作函数的图像

例 1 分别画出下列函数的图像：

(1)$y=|\lg(x-1)|$；(2)$y=2^{x+1}-1$；(3)$y=x^2-|x|-2$.

[总结反思] 为了正确地作出函数的图像，除了掌握“列表、描点、连线”的方法之外，还要做到以下两点：

(1)熟练掌握几种基本函数的图像，以及形如 $y=x+\frac{1}{x}$ 的函数图像.

(2)掌握常用的图像变换方法，如平移变换、伸缩变换、对称变换、翻折变换、周期变换等，利用这些方法来帮助我们简化作图过程.

变式题 分别画出下列函数的图像：

(1)$y=|x^2-4x+3|$；(2)$y=\frac{2x+1}{x+1}$；(3)$y=10^{|\lg x|}$.

探究点二　识图与辨图的常见方法　微课8·方法

微点1　性质检验法

例2　(1)[2019·淮南一模] 函数 $f(x)=x^2(e^x-e^{-x})$ 的图像大致为　(　　)

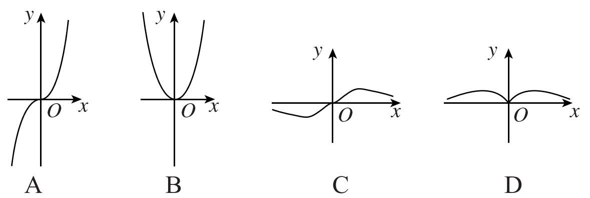


图 1-10-3

(2)[2019·绍兴一模] 函数 $f(x)=(x^3-x)\ln|x|$ 的大致图像是　(　　)

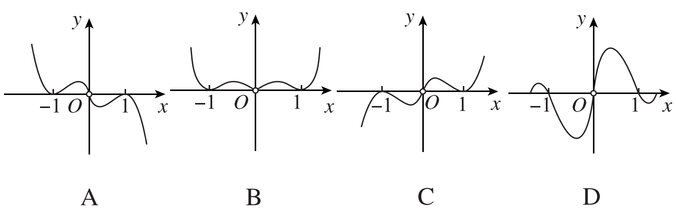


图 1-10-4

[总结反思] 利用性质识别函数图像是辨图中的主要方法,采用的性质主要是定义域、值域、函数的奇偶性、函数局部的单调性等.当然,对于一些更为复杂的函数图像的判断,还可能同特殊点法结合起来使用.

微点2　图像变换法

例3　已知对数函数 $f(x)=\log_a x$ 是增函数,则函数 $f(|x|+1)$ 的图像大致是　(　　)

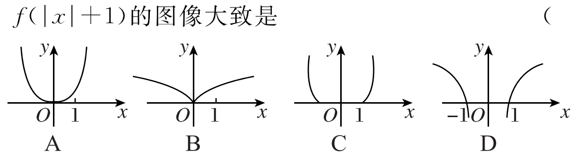


图 1-10-5

[总结反思] 通过图像变换识别函数图像要掌握两点:一是熟悉基本初等函数的图像(如指数函数、对数函数等图像);二是了解常见的一些变换形式,如平移变换、翻折变换.

应用演练

1.【微点2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 0,\\ -\dfrac{1}{x}, x>0,\end{cases}$ $g(x)=-f(-x)$,则函数 $g(x)$ 的图像大致是　(　　)

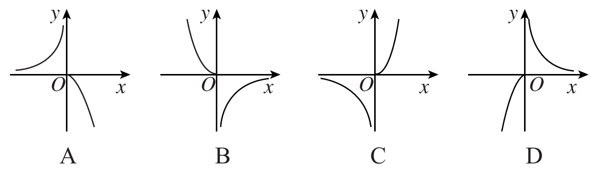


图 1-10-6

2.【微点1】[2019·雅礼中学二模] 函数 $f(x)=\dfrac{-4x^2+1}{2x^4}$ 的图像大致是　(　　)

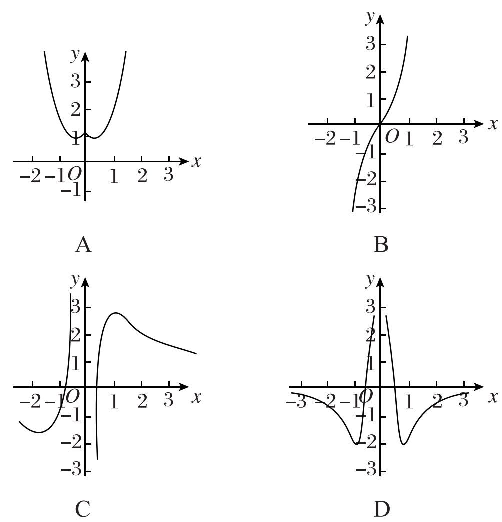


图 1-10-7

3.【微点1】[2019·杭州二模] 函数 $y=(x-1)^2(x-2)e^x$(其中 e 为自然对数的底数)的大致图像是　(　　)

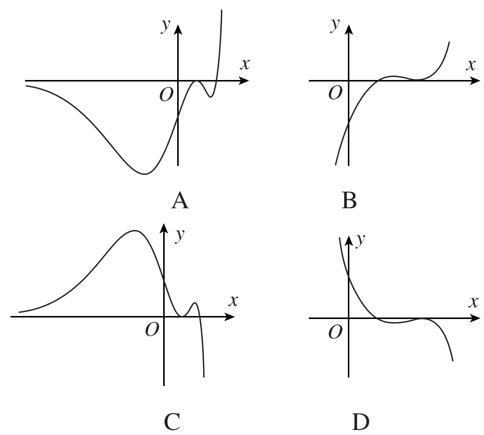


图 1-10-8

4.【微点1】函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{4x}$ 的图像大致为　(　　)

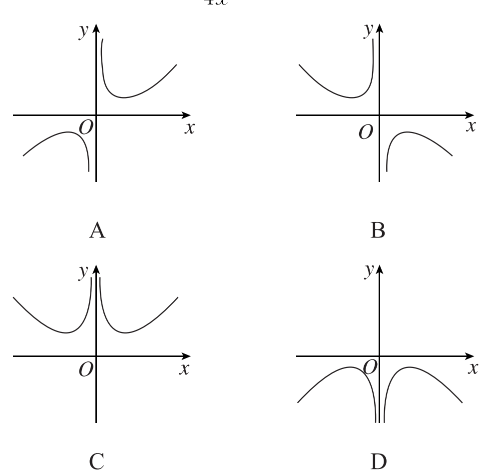


图 1-10-9

探究点三　以函数图像为背景的问题

微课9·思维

微点 1　研究函数的性质

例 4　[2019·大庆实验中学二模] 已知函数 $f(x)$ 的图像如图 1-10-10 所示,则函数 $f(x)$ 的解析式可能是　　(　　)

A. $f(x)=(4^x+4^{-x})|x|$

B. $f(x)=(4^x-4^{-x})\log_2|x|$

C. $f(x)=(4^x+4^{-x})\log_2|x|$

D. $f(x)=(4^x+4^{-x})\log_{\frac{1}{2}}|x|$

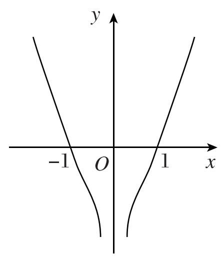


图 1-10-10

[总结反思] 一般根据图像研究函数的性质有以下几方面:一是观察函数图像是否连续以及最高点和最低点,确定定义域、值域;二是函数图像是否关于原点或 y 轴对称,确定函数是否具有奇偶性;三是根据图像上升与下降的情况,确定单调性.

微点 2　求不等式的解集

例 5　已知函数 $y=f(x)$ 的图像是如图 1-10-11 所示的折线 ACB,函数 $g(x)=\log_2(x+1)$,则不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集是　　(　　)

A. $\{x|-1<x\leqslant 0\}$

B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$

D. $\{x|-1<x\leqslant 2\}$

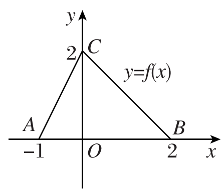


图 1-10-11

[总结反思] 当不等式问题不能用代数法求解或用代数法求解比较困难,但其对应函数的图像可作出时,常将不等式问题转化为两函数图像的位置关系问题,从而利用数形结合思想求解.

微点 3　确定方程根的个数

例 6　已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3,x\leqslant 1,\\ \ln x,x>1,\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0$ 解的个数为　　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

[总结反思] 根据方程合理构造函数.若构造的是一个函数,则方程根的个数就是函数图像与 x 轴交点的个数;若构造的是两个函数,则方程根的个数就是这两个函数的图像交点的个数.

微点 4　与函数思想结合求参数的取值范围

例 7　若不等式 $\log_a x+x-4>0(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $(0,2)$ 内有解,则实数 a 的取值范围是________.

[总结反思] 当参数的不等关系不易找出时,可将不等式、函数或方程等价转化为方便作图的两个函数,再根据题设条件和图像确定参数的取值范围.

应用演练

1. 【微点 1】[2019·宜昌 1 月调研] 已知函数 $f(x)$ 的部分图像如图 1-10-12 所示,则该函数的解析式可能为　　(　　)

A. $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$

B. $f(x)=(e^x+e^{-x})\cos x$

C. $f(x)=-(e^x+e^{-x})\sin x$

D. $f(x)=-(e^x+e^{-x})\cos x$

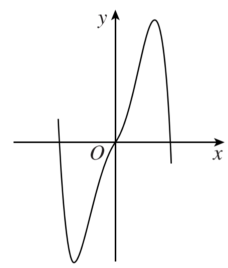


图 1-10-12

2. 【微点 3】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1,x\leqslant 1,\\ |\ln(x-1)|,x>1,\end{cases}$ 则方程 $f[f(x)]=1$ 的根的个数为　　(　　)

A. 7　　B. 5　　C. 3　　D. 2

3. 【微点 2】[2019·上海长宁区一模] 已知函数 $f(x)=\log_a x$ 和 $g(x)=k(x-2)$ 的图像如图 1-10-13 所示,则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0$ 的解集是________.

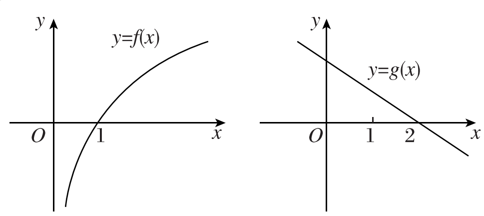


图 1-10-13

4. 【微点 4】[2019·湖北部分重点中学联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1,x\leqslant 0,\\ \lg x,x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 有两个不相同的实数根,则实数 a 的取值范围是________.

请完成课时作业(十)

第 11 讲　函数与方程

考试说明　结合二次函数的图像,了解函数的零点与方程根的联系,判断一元二次方程根的存在性及根的个数.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数的零点

(1)函数零点的定义

对于函数 $y=f(x)(x\in D)$,把使________的实数 x 叫作函数 $y=f(x)(x\in D)$的零点.

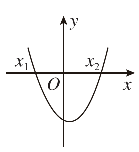
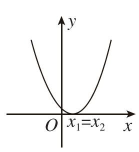
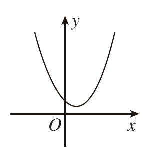
(2)等价关系

方程 $f(x)=0$ 有实数根⇔函数 $y=f(x)$的图像与________有交点⇔函数 $y=f(x)$有________.

(3)函数零点的判定(零点存在性定理)

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图像是连续不断的一条曲线,并且有__________,那么函数 $y=f(x)$在区间________内有零点,即存在 $c\in(a,b)$,使得________,这个________也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像与零点的关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像			
与 x 轴的交点	________	________	无交点
零点个数	________	________	________

常用结论

1. 在区间 D 上单调的函数在该区间内至多有一个零点.
2. 周期函数如果存在零点,则必有无穷个零点.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点的个数是________.
2. [教材改编] 如果函数 $f(x)=e^{x-1}+4x-4$ 的零点在区间$(n,n+1)$(n 为整数)内,则 $n=$________.
3. [教材改编] 函数 $f(x)=x^3-2x^2+x$ 的零点是________.
4. [教材改编] 若函数 $f(x)=x^2-4x+a$ 存在两个不同的零点,则实数 a 的取值范围是________.

题组二　常错题

◆**索引**:错用零点存在性定理;误解函数零点的定义;忽略限制条件;二次函数在 **R** 上无零点的充要条件(判别式小于零).

5. 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$的零点个数是________.
6. 函数 $f(x)=x^2-3x$ 的零点是________.
7. 若二次函数 $f(x)=x^2-2x+m$ 在区间$(0,4)$上存在零点,则实数 m 的取值范围是________.
8. 若二次函数 $f(x)=x^2+kx+k$ 在 **R** 上无零点,则实数 k 的取值范围是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

▶ 探究点一　函数零点所在区间的判断

例 1 (1)[2019·乌鲁木齐质检] 在下列区间中,函数 $f(x)=e^x+3x-4$ 的零点所在的区间为　(　　)

A. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

(2)[2019·皖西南名校联考] 设 x_0 是方程 $101-x=\lg x$ 的解,且 $x_0\in(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$,则 $k=$________.

[总结反思] 判断函数零点所在区间的方法:(1)解方程法,当对应方程易解时,可直接解方程;(2)零点存在性定理;(3)数形结合法,画出相应函数图像,观察与 x 轴的交点来判断,或转化为两个函数的图像在所给区间上是否有交点来判断.

变式题 [2019·重庆南开中学月考] 函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点一定位于区间　(　　)

A. $(1,2)$　　B. $(2,3)$

C. $(3,4)$　　D. $(4,5)$

▶ 探究点二　函数零点个数的讨论

例 2 (1)[2019·凯里三模] 函数 $f(x)=\log_3|x|-|\sin\pi x|$在区间$[-2,0)\cup(0,3]$上零点的个数为　(　　)

A. 5　　B. 6

C. 7　　D. 8

(2)[2019·潍坊三模] 已知 $f(x)$是定义在$[-10,10]$上的奇函数,且 $f(x)=f(4-x)$,则函数 $f(x)$的零点个数至少为　(　　)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

[总结反思] 关于函数零点个数的讨论,基本解法有:(1)直接法,令 $f(x)=0$,方程有多少个解则 $f(x)$有多少个零点;(2)定理法,利用定理时往往还要结合函数的单调性、奇偶性等;(3)图像法,一般是把函数拆分为两个简单函数,依据两函数图像的交点个数得出函数的零点个数.

变式题 (1)设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+1, x\geqslant 0,\\ |x^2+2x|, x<0,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=f(x)-3x-1$ 的零点个数为 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x<0,\\ x^2+\frac{1}{2}, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则函数 $y=f[f(x)]-1$ 的零点个数为 ( )

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

探究点三　函数零点的应用

例3 [2019·怀化一模] 已知函数 $f(x)=|\ln x|-a^x(x>0,0<a<1)$ 的两个零点为 x_1,x_2,则 ( )

A. $0<x_1x_2<1$　B. $x_1x_2=1$

C. $1<x_1x_2<e$　D. $x_1x_2>e$

[总结反思] 函数零点的应用主要体现在三类问题中:一是函数中不含参数,零点又不易直接求出,考查各零点的和或范围问题;二是函数中含有参数,根据零点情况求函数中参数的范围;三是函数中有参数,但不求参数,仍是考查零点的范围问题.这三类问题一般是通过数形结合或分离参数求解.

变式题 [2019·永州二模] 若函数 $f(x)=2^{|x|}-k$ 存在零点,则 k 的取值范围是 ( )

A. $k<0$　B. $k\geqslant 0$　C. $k<1$　D. $k\geqslant 1$

请完成课时作业(十一)

增分微课(一)
多维度探究数形结合思想在函数中的应用

类型一　绝对值函数

涉及绝对值函数的问题常见的有两种情况:一是含绝对值的函数图像的画法;二是含绝对值的函数的零点及相关方程的实数根个数问题.两类问题都需要通过数形结合、分类讨论等思想进行处理.

例1 (1)关于函数 $f(x)=|\ln|2-x||$,下列结论错误的是 ( )

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称

C. 若 $x_1\neq x_2$,但 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1+x_2=4$

D. 函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点

(2)[2019·天津红桥区一模] 已知函数 $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x-1}$,$g(x)=kx-2$,若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数根,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-1)$　B. $(-1,0)$

C. $(0,4)$　D. $(0,1)\cup(1,4)$

[总结反思] 含绝对值的函数问题最根本的方法就是找到绝对值的零点,然后消去绝对值,转化为分段函数,分段画出函数的图像.熟练掌握数形结合的思想、分类讨论思想及把问题等价转化是解题的关键.

变式题 (1)关于函数 $f(x)=|x^2-1|$,给出下列结论:

①$f(x)$ 是偶函数;

②若函数 $y=f(x)-m$ 有四个零点,则实数 m 的取值范围是 $(0,1)$;

③$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增;

④若 $f(a)=f(b)(0<a<b)$,则 $0<ab<1$.

其中正确的是 ( )

A. ①②　B. ③④　C. ①③④　D. ①②④

(2)[2019·天津十二重点中学联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, -3\leqslant x\leqslant 0,\\ 2x-3, x>0,\end{cases}$ 若方程 $f(x)+|x-2|-kx=0$ 有且只有三个不相等的实数解,则实数 k 的取值范围是 ( )

A. $\left[-\frac{2}{3},3-2\sqrt{2}\right)$　B. $\left[-\frac{2}{3},3+2\sqrt{2}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]$　D. $\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right]$

类型二　函数的迭代问题

迭代是重复反馈过程的活动,其目的通常是为了逼近所需目标或结果.每一次对过程的重复称为一次"迭代",而每一次迭代得到的结果会作为下一次迭代的初始值.我们常见的函数迭代问题有两种形式:一是二阶迭代函数 $y=f[f(x)]$;二是 $f(x+a)=kf(x)$ 形式.

例2 (1)[2019·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,满足 $f(x+1)=2f(x)$,且当 $x\in(0,1]$ 时,$f(x)=x(x-1)$.若对任意 $x\in(-\infty,m]$,都有 $f(x)\geqslant -\frac{8}{9}$,则 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$　B. $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$　D. $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$

(2)[2020·东阳中学模拟] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\leqslant 0,\\ \log_2 x, x>0,\end{cases}$ 则 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]=$________,若 $f[f(t)]\in[-1,0]$,则所有符合条件的 t 组成的集合为________.

［总结反思］(1)对于二阶迭代函数 $y=f[f(x)]$问题，通常是用换元法，设 $t=f(x)$，这样就转化为两个一阶函数 $y=f(t)$与 $t=f(x)$的有关问题，结合图像进行具体分析；(2)形如 $f(x+a)=kf(x)$的迭代问题，一般是结合定义区间，分段写出相应函数的解析式，结合图像及相应运算进行求解.

变式题 (1)［2019·宜昌1月调研］已知函数 $f(x)=x^2+(a-1)x-a$，若函数 $g(x)=f[f(x)]$有且仅有两个零点，则实数 a 的取值集合为________.

(2)［2019·泉州一模］已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\geqslant0,\\-x^2-3x+1,x<0,\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f[f(x)]=4$ 的所有实数根之和为 （　　）

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 4

类型三　复合二次函数 $y=a[f(x)]^2+bf(x)+c$

复合二次函数 $y=a[f(x)]^2+bf(x)+c$ 问题大多以函数的图像为背景，涉及方程根的个数、函数零点的个数、参数的取值范围等问题，突出数形结合思想、函数与方程思想.考查运算求解、逻辑思维、分析与解决问题的能力.解决这类问题的基本思想为由外到里，以二次函数的基本理论为基础，把里层函数 $f(x)$看成整体，通过研究二次函数的性质转化为函数 $f(x)$的性质，再对 $f(x)$进行研究.

例3 (1)［2019·石家庄质检］已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x<0,\\4x^3-6x^2+1,x\geqslant0,\end{cases}$ 其中e为自然对数的底数，则函数 $g(x)=3[f(x)]^2-10f(x)+3$ 的零点个数为 （　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 3

(2)［2019·上饶重点中学联考］已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\geqslant0,\\\log_2(-x),x<0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程$[f(x)]^2+2f(x)+m=0$有三个不同的实根，则 m 的取值范围为________.

［总结反思］对于方程 $a[f(x)]^2+bf(x)+c=0$ 解的个数(或函数 $y=a[f(x)]^2+bf(x)+c$ 零点个数)问题，一般采用换元法，设 $t=f(x)$，根据 t 的取值或范围，再利用函数 $f(x)$的值域或最值，结合函数的单调性、草图确定.注意数形结合思想、分类讨论思想的应用.

变式题 (1)若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值点 x_1，x_2，且 $f(x_1)=x_1$，则关于 x 的方程 $3[f(x)]^2+2af(x)+b=0$的不同实根个数是 （　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x^2-1|,x\geqslant0,\\x+1,x<0,\end{cases}$ 若方程$[f(x)]^2+af(x)+1=0$ 有四个不等的实根，则实数 a 的取值范围是________.

⊙ 题组训练 ⊙

1. ［2020·攀枝花一模］关于函数 $f(x)=\cos|x|+|\sin x|$的下述四个结论中，正确的是 （　　）

A. $f(x)$是奇函数

B. $f(x)$是最大值为2

C. $f(x)$在$[-\pi,\pi]$有3个零点

D. $f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单调递增

2. ［2019·上饶重点中学联考］已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}+1,x\in[-2,0],\\2f(x-2),x\in(0,+\infty),\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-x-2m+1$在区间$[-2,4]$内有3个零点，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $\left\{m\middle|-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{m\middle|-1<m\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{m\middle|-1<m<\frac{1}{2}\text{或}m=1\right\}$

D. $\left\{m\middle|-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}\text{或}m=1\right\}$

3. ［2019·龙岩质检］已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x},x\geqslant1,\\-(x-1)^3,x<1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程$[f(x)]^2+mf(x)-1-m=0$ 恰好有4个不相等的实数解，则实数 m 的取值范围为 （　　）

A. $\left(-1,\frac{1}{e}-1\right)$　　B. $\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)$

C. $\left(1,\frac{1}{e}+1\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$

4. 已知函数 $f(x)$满足：①定义域为 $\mathbf{R}$；②对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+2)=2f(x)$；③当 $x\in[-1,1]$时，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$.若函数 $g(x)=\begin{cases}e^x(x\leqslant0),\\\ln x(x>0),\end{cases}$ 则函数 $y=f(x)-g(x)$在区间$[-5,5]$上零点的个数是 （　　）

A. 7　　B. 8

C. 9　　D. 10

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{2x}, x>0,\\ -x^2-2x-3, x\leqslant 0,\end{cases}$ 当 $a<0$ 时,方程 $[f(x)]^2-2f(x)+a=0$ 有 4 个不相等的实根,则 a 的取值范围是 ( )

A. $-15\leqslant a<-8$　　B. $-15\leqslant a\leqslant e-\dfrac{e^2}{4}$

C. $-15<a<-8$　　D. $-15\leqslant a\leqslant \dfrac{e^2}{4}-e$

6. [2020 · 丽水四校联考] 将函数 $y=\left|\dfrac{1}{2}x-1\right|+\left|\dfrac{1}{2}x-2\right|+1$ 的图像绕原点按顺时针方向旋转角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 得到曲线 C.若曲线 C 是一个函数的图像,则 θ 的取值范围是________.

7. [2019 · 湖南师大附中月考] 已知函数 $f(x)=|x^2-4|+x^2+mx$,若函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上有两个不同的零点,则实数 m 的取值范围是________.

8. [2019 · 天津河西区质检] 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}kx+k, x\leqslant 0,\\ \ln x, x>0,\end{cases}$ 其中 $k\geqslant 0$,若函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 4 个零点,则实数 k 的取值范围是________.

9. [2019 · 浙江三校 4 月联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}f(x-2), 0<x\leqslant 4.\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)-\log_2(a-x)$ 恰有两个零点,则实数 a 的取值范围为________.

第 12 讲　函数模型及其应用

考试说明 1. 了解指数函数、对数函数以及幂函数的增长特征,知道直线上升、指数增长、对数增长等不同函数类型增长的含义.

2. 了解函数模型(如指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等在社会生活中普遍使用的函数模型)的广泛应用.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 三种函数模型的性质的比较

性质＼函数	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在 $(0,+\infty)$ 上的增减性	单调________	单调________	单调________
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳

2. 常见的函数模型

函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b$(a,b 为常数,$a\neq 0$)
二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq 0$)
反比例函数模型	$f(x)=\dfrac{k}{x}+b$(k,b 为常数且 $k\neq 0$)
指数函数模型	$f(x)=ba^x+c$(a,b,c 为常数,$a>0$ 且 $a\neq 1,b\neq 0$)
对数函数模型	$f(x)=b\log_a x+c$(a,b,c 为常数,$a>0$ 且 $a\neq 1,b\neq 0$)
幂函数模型	$f(x)=ax^{\alpha}+b$(a,b,α 为常数,$a\neq 0,\alpha\neq 0$)

常用结论

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}(a>0,b>0,x>0)$ 在区间 $(0,\sqrt{ab}]$ 上单调递减,在区间 $[\sqrt{ab},+\infty)$ 上单调递增.

2. 直线上升、对数缓慢、指数爆炸.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数模型 $y_1=0.25x$,$y_2=\log_2 x+1$,$y_3=1.002^x$,随着 x 的增大,增长速度的大小关系是________.(填关于 y_1,y_2,y_3 的关系式)

2. [教材改编] 在如图 1-12-1 所示的锐角三角形空地中,欲建一个面积不小于 300 m² 的内接矩形花园(阴影部分),则其边长 x(单位:m)的取值范围是________.

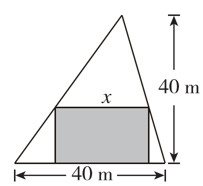


图 1-12-1

3. [教材改编] 某车间分批生产某种产品,每批的生产准备费用为 800 元.若每批生产 x 件,则平均仓储时间为 $\dfrac{x}{8}$ 天,且每件产品每天的仓储费用为 1 元.把平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和 S 表示为 x 的函数是__________.

题组二　常错题

◆ 索引:审题不清致错;忽视限制条件;忽视实际问题中实际量的单位、含义、范围等;分段函数模型的分界把握不到位.

4. 一枚炮弹被发射后,其升空高度 h 与时间 t 的函数关系式为 $h=130t-5t^2$,则该函数的定义域是__________.

5. 某物体一天中的温度 T 是关于时间 t 的函数，且 $T=t^3-3t+60$，时间单位是小时，温度单位是℃，当 $t=0$ 时表示中午 12：00，其后 t 值为正，则上午 8 时该物体的温度是________.

6. 在不考虑空气阻力的情况下，火箭的最大速度 v(米/秒)关于燃料的质量 M(千克)、火箭(除燃料外)的质量 m(千克)的函数关系式是 $v=2000\cdot\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$. 当燃料质量是火箭质量的________倍时，火箭的最大速度可达 12 千米/秒.

7. 已知 A,B 两地相距 150 km，某人开汽车以 60 km/h 的速度从 A 地到达 B 地，在 B 地停留 1 h 后再以 50 km/h 的速度返回 A 地，则汽车离开 A 地的距离 s(km)关于时间 t(h)的函数表达式是____________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　用函数图像刻画变化过程

例 1　水池有两个相同的进水口和一个出水口，每个口进出水的速度如图 1-12-2(甲)、(乙)所示，某天 0 点到 6 点该水池的蓄水量如图(丙)所示(至少打开一个水口)，给出以下 3 个论断：

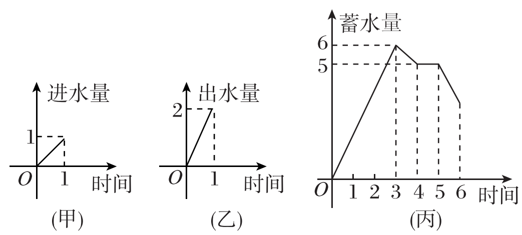


图 1-12-2

①0 点到 3 点只进水不出水；②3 点到 4 点不进水只出水；③4 点到 5 点不进水也不出水.

则一定正确的论断是　　(　　)

A. ①　　B. ①②

C. ①③　　D. ①②③

[总结反思] 判断函数图像与实际问题变化过程是否相吻合时，首先要关注横轴与纵轴所表达的变量的实际意义；其次根据实际问题中两变量的变化快慢等特点，结合图像变换趋势，验证是否吻合，从中排除不符合实际的情况，选出符合实际的答案.

变式题　有一商家从石塘沿水路顺水航行，前往河口，途中因故障停留一段时间，到达河口后逆水航行返回石塘，假设货船在静水中的速度不变，水流速度不变，若该船从石塘出发后所用的时间为 x(小时)，货船距石塘的距离为 y(千米)，则下列各图中，能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图像是　　(　　)

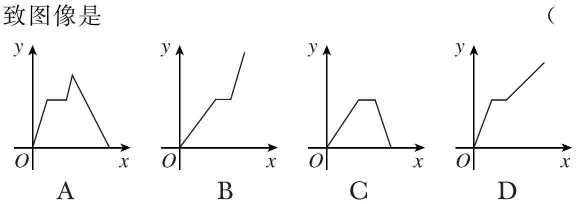


图 1-12-3

探究点二　一次、二次函数模型

例 2　某市的绿色富硒产品和特色农产品在国际市场上颇具竞争力，其中香菇远销日本和韩国等地. 香菇上市时，外商李经理按市场价格 10 元/千克在本市收购了 2000 千克香菇存放入冷库中. 据预测，香菇的市场价格每天每千克将上涨 0.5 元，但冷库存放这批香菇时每天需要支出各种费用合计 340 元，而且香菇在冷库中最多保存 110 天，同时，平均每天有 6 千克的香菇损坏不能出售.

(1)若存放 x 天后，将这批香菇一次性出售，设这批香菇的销售总金额为 y 元，试写出 y 与 x 之间的函数关系式.

(2)李经理如果想获得利润 22 500 元，需将这批香菇存放多少天后出售？(提示：利润＝销售总金额－收购成本－各种费用)

(3)李经理将这批香菇存放多少天后出售可获得最大利润？最大利润是多少？

[总结反思] 在建立二次函数模型解决实际问题中的最优问题时，一定要注意自变量的取值范围，即函数的定义域，解决函数应用问题时，最后还要还原到实际问题中.

变式题　为了保护环境和提高果树产量，某果农计划从甲、乙两个仓库用汽车向 A,B 两个果园运送有机化肥，甲、乙两个仓库分别可运出 80 吨和 100 吨有机化肥；A,B 两个果园分别需用 110 吨和 70 吨有机化肥. 两个仓库到 A,B 两个果园的路程如下表所示：

	路程（千米）	
	甲仓库	乙仓库
A 果园	15	25
B 果园	20	20

设甲仓库运往 A 果园 x 吨有机化肥，若汽车每吨每千米的运费为 2 元.

(1)根据题意，填写下表.

	运量（吨）		运费（元）	
	甲仓库	乙仓库	甲仓库	乙仓库
A 果园	x	$110-x$	$2\times15x$	$2\times25(110-x)$
B 果园	______	______	______	______

(2)设总运费为 y 元，求 y 关于 x 的函数表达式，并求当甲仓库运往 A 果园多少吨有机化肥时，总运费最少？最少的总运费是多少元？

探究点三　指数、对数函数模型

例 3　候鸟每年都要随季节的变化而进行大规模地迁徙，研究某种鸟类的专家发现，该种鸟类的飞行速度 v(单位：m/s)与其耗氧量 M 之间的关系为 $v=a+b\log_3\frac{M-15}{10}$(其中 a,b 是常数)，据统计，该种鸟类在静止时其耗氧量为 45 个单位，而其耗氧量为 105 个单位时，其飞行速度为 1 m/s.

(1)求出 a,b 的值；

(2)若这种鸟类为赶路程，飞行的速度不能低于 2 m/s，则其耗氧量至少要多少个单位？

[**总结反思**] 与指数函数、对数函数两类函数模型有关的实际问题，在求解时，要先学会合理选择模型. (1)在两类函数模型中，指数函数模型是增长速度越来越快(底数大于 1)的一类函数模型，对数函数模型是增长速度越来越慢(底数大于 1)的一类函数模型. (2)在解决这两类函数模型时，一般先要通过待定系数法确定函数解析式，再借助函数的图像求解最值问题.

变式题　[2019・北京人大附中三模] 某种物质在时刻 t(min)的浓度 M(mg/L)与 t 的函数关系为 $M(t)=ar^t+24$(a,r 为常数). 在 $t=0$ min 和 $t=1$ min 时测得该物质的浓度分别为 124 mg/L 和 64 mg/L，则在 $t=4$ min 时，该物质的浓度为________mg/L；若该物质的浓度小于 24.001 mg/L，则最小的整数 t 的值为________. (参考数据：$\lg 2\approx0.301$)

探究点四　分段函数模型

例 4　[2019・辽阳期末] 某地居民用水采用阶梯水价，其标准为：每户每月用水量不超过 15 吨的部分，每吨 3 元；超过 15 吨但不超过 25 吨的部分，每吨 4.5 元；超过 25 吨的部分，每吨 6 元.

(1)求每户居民每月需交水费 y(元)关于用水量 x(吨)的函数关系式；

(2)若 A 户居民某月交水费 67.5 元，求 A 户居民该月的用水量.

[总结反思] (1)某些实际问题中的变量关系不能用同一个关系式给出,而是由几个不同的关系式构成,所以应建立分段函数模型;(2)构建分段函数时,要力求准确、简捷、合理、不重不漏;(3)分段函数的最值是各段最大值(或最小值)中的最大值(或最小值).

变式题 [2019·佛山一中期末] 某企业生产的某种产品生产总成本 $f(x)$(元)与产量 x(吨)$(0\leqslant x\leqslant 80)$的函数关系为 $f(x)=\begin{cases}x^3-50x^2+ax,0\leqslant x\leqslant 30,\\x^2+250x+3600,30<x\leqslant 80,\end{cases}$ 且函数 $f(x)$ 是$[0,80]$上的连续函数.

(1)求 a 的值;

(2)当产量为多少吨时,平均生产成本最低?

请完成课时作业(十二)

第 13 讲　变化率与导数、导数的运算

考试说明 1. 了解导数的概念与实际背景,理解导数的几何意义.

2. 会用基本初等函数的导数公式表和导数运算法则求函数的导数,并能求简单的复合函数的导数(限于形如 $f(ax+b)$ 的导数).

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 变化率与导数

(1)平均变化率:

概念	对于函数 $y=f(x)$,$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$叫作函数 $y=f(x)$从 x_1 到 x_2 的________变化率
几何意义	函数 $y=f(x)$图像上两点$(x_1,f(x_1))$,$(x_2,f(x_2))$连线的________
物理意义	若函数 $y=f(x)$表示变速运动的质点的运动方程,则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$就是该质点在$[x_1,x_2]$上的________速度

(2)导数:

概念	点 x_0 处	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,我们称它为函数 $y=f(x)$在________处的导数,记为$f'(x_0)$或 $y'\|_{x=x_0}$,即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
	区间(a,b)	当$x\in(a,b)$时,$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}$________叫作函数在区间$(a,b)$内的导数
几何意义		函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$就是函数图像在该点处切线的________. 曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程是________
物理意义		函数 $y=f(x)$表示变速运动的质点的运动方程,则函数在 $x=x_0$ 处的导数就是质点在 $x=x_0$ 时的________速度,在(a,b)内的导数就是质点在(a,b)内的________方程

2. 导数的运算

	原函数	导函数	特例或推广
常用导数公式	常数函数	$C'=0$(C为常数)	
	幂函数	$(x^n)'=$______($n\in\mathbf{Z}$)	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
	三角函数	$(\sin x)'=$______,$(\cos x)'=$______	偶(奇)函数的导数是奇(偶)函数,周期函数的导数是周期函数
	指数函数	$(a^x)'=$______($a>0$,且$a\neq1$)	$(e^x)'=e^x$
	对数函数	$(\log_a x)'=$______($a>0$,且$a\neq1$)	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,$(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$
四则运算法则	加减	$[f(x)\pm g(x)]'=$______	$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)\right)'=\sum\limits_{i=1}^{n}f'_i(x)$
	乘法	$[f(x)\cdot g(x)]'=$______	$[Cf(x)]'=Cf'(x)$
	除法	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=$______($g(x)\neq0$)	$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$
复合函数求导		复合函数$y=f[g(x)]$的导数与函数$y=f(u)$,$u=g(x)$的导数之间具有关系$y'_x=$______,这个关系用语言表达就是"y对x的导数等于y对u的导数与u对x的导数的乘积"	

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数$f(x)=3x^2$在$[2,6]$内的平均变化率为______.
2. [教材改编] 已知将1吨水净化到纯净度为$x\%$时所需费用(单位:元)为$c(x)=\frac{5284}{100-x}(80<x<100)$,当净化到纯净度为98%时费用的瞬时变化率为______.
3. [教材改编] $y=\ln(x+1)$的导数是$y'=$______.
4. [教材改编] 曲线$y=xe^{x-1}$在点$(1,1)$处切线的斜率等于______.

题组二　常错题

◆**索引**:平均变化率与导数的区别;求导时不能掌握复合函数的求导法则致错;混淆$f'(x_0)$与$[f(x_0)]'$,$f'(ax+b)$与$[f(ax+b)]'$的区别.

5. 函数$f(x)=x^2$在区间$[1,2]$上的平均变化率为______,在$x=2$处的导数为______.
6. 已知函数$y=\sin 2x$,则$y'=$______.
7. 已知$f(x)=x^2+3xf'(2)$,则$f(2)=$______.
8. 已知$f(x)=x^3$,则$f'(2x+3)=$______,$[f(2x+3)]'=$______.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　导数的运算

例1 (1)[2019·吉安重点高中月考] 已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$,且满足关系式$f(x)=x^2+3xf'(2)+e^x$,则$f'(2)=$　(　　)

A. -2

B. $\frac{e^2}{2}-2$

C. $-\frac{e^2}{2}$

D. $-\frac{e^2}{2}-2$

(2)函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\ln 2x$的导数$y'=$______.

[总结反思] (1)对于复杂函数的求导,首先应利用代数、三角恒等变换等变形规则对函数解析式进行化简,之后再求导,这样可以减少运算量,提高运算速度.(2)利用公式求导时要特别注意除法公式中分子的符号,不要与求导的乘法公式混淆.

变式题 (1)[2019·榆林二中期末] 已知函数$f(x)=x\sin x+\cos x$,则$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$的值为　(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$

B. 1

C. -1

D. 0

(2)[2019·天津河东区二模] 已知$f(x)=x\cdot(a+\ln x)$,若$f'(e)=1$,则$a=$______.

探究点二 导数的几何意义

角度 1 求切线方程

例 2 过点 $P(2,-6)$ 作曲线 $f(x)=x^3-3x$ 的切线,则切线方程为 ( )

A. $3x+y=0$ 或 $24x-y-54=0$

B. $3x-y=0$ 或 $24x-y-54=0$

C. $3x+y=0$ 或 $24x-y+54=0$

D. $24x-y-54=0$

[**总结反思**] (1)曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$;(2)求解曲线切线问题的关键是求切点的横坐标,在使用切点横坐标求切线方程时应注意其取值范围;(3)注意曲线过某点的切线和曲线在某点处的切线的区别.

变式题 曲线 $f(x)=e^{4x}-x-2$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程是________.

角度 2 求切点坐标

例 3 若曲线 $y=x^2-2\ln x$ 的一条切线的斜率是 3,则切点的横坐标为________.

[**总结反思**] (1) $f'(x)=k$(k 为切线斜率)的解即为切点的横坐标;(2)切点既在曲线上也在切线上,这个点对于与切点有关的问题非常重要.

变式题 曲线 $y=e^x$ 在点 A 处的切线与直线 $x-y+1=0$ 平行,则点 A 的坐标为 ( )

A. $(-1,e-1)$　B. $(0,1)$

C. $(1,e)$　D. $(0,2)$

角度 3 求参数的值或范围

例 4 (1)[2019·南平 5 月质检] 若直线 $y=\frac{5}{2}x$ 与曲线 $y=mx-\ln(2x+1)$ 相切于点 $O(0,0)$,则 $m=$ ( )

A. 0　B. $\frac{5}{2}$

C. $\frac{7}{2}$　D. $\frac{9}{2}$

(2)[2019·蚌埠质检] 已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{2x}$,若曲线 $y=f(x)$ 存在两条过 $(1,0)$ 点的切线,则 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

[**总结反思**] (1)利用导数的几何意义求参数的基本方法:利用切点的坐标、切线的斜率、切线方程等得到关于参数的方程(组)或者参数满足的不等式(组),进而求出参数的值或取值范围.(2)注意曲线上点的横坐标的取值范围.

变式题 [2019·温州 5 月模拟] 已知点 $A(x_1,f(x_1))$,$B(x_2,f(x_2))$ 是函数 $f(x)=a\sqrt{x}+bx^2$ 的图像上的任意两点,且函数 $f(x)$ 的图像在点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行,则 ( )

A. $a=0$,b 为任意非零实数

B. $b=0$,a 为任意非零实数

C. a,b 均为任意实数

D. 不存在满足条件的实数 a,b

请完成课时作业(十三)

第 14 讲 导数与函数的单调性

考试说明 1. 了解函数单调性和导数的关系.

2. 能用导数求函数的单调区间.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

函数的单调性与导数

导数到单调性	单调递增	在区间(a,b)上,若$f'(x)>0$,则$f(x)$在这个区间上单调________
	单调递减	在区间(a,b)上,若$f'(x)<0$,则$f(x)$在这个区间上单调________
单调性到导数	单调递增	若函数$y=f(x)$在区间(a,b)上单调递增,则$f'(x)$________
	单调递减	若函数$y=f(x)$在区间(a,b)上单调递减,则$f'(x)$________
“函数$y=f(x)$在区间(a,b)上的导数大(小)于0”是“其单调递增(减)”的________条件		

常用结论

在定义域$[a,b]$上图像连续的函数$f(x)$,在$[a,x_1]$上单调递减,在$(x_1,b]$上单调递增,则方程$f(x)=0$的根的分布情况如下表:

根的个数	满足的条件
0	$f(x_1)>0$或者$f(a)<0$且$f(b)<0$
1	$f(x_1)=0$或者$f(a)\geqslant 0$且$f(b)<0$ 或者$f(a)<0$且$f(b)\geqslant 0$
2	$f(a)>0$且$f(b)>0$且$f(x_1)<0$

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数$f(x)=e^x-x$的单调递增区间是________.
2. [教材改编] 比较大小:x________$\ln x(x\in(1,+\infty))$.
3. [教材改编] 函数$y=ax^3-1$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数,则实数a的取值范围为________.
4. [教材改编] 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的可导函数,函数$y=e^{f'(x)}$的图像如图1-14-1所示,则$f(x)$的单调递减区间是________.

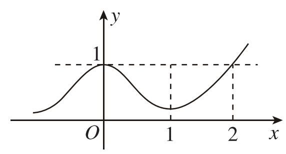


图1-14-1

题组二　常错题

◆ **索引**:可导函数在某区间上单调时导数满足的条件;利用单调性求解不等式时不能忽视原函数的定义域;求单调区间时忽略定义域;讨论函数单调性时分类标准有误.

5. 若函数$f(x)=kx-\ln x$在区间$(1,+\infty)$上为增函数,则k的取值范围是________.
6. 若函数$f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$,则不等式$f(1-x)>f(2x-1)$的解集为________.
7. 函数$f(x)=x+\ln(2-x)$的单调递增区间为________.
8. 讨论函数$y=ax^3-x$在$\mathbf{R}$上的单调性时,a应分________、________、________三种情况讨论.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

▶ 探究点一　函数单调性的判断或证明

例1 已知函数$f(x)=(x-1)e^x+ax^2(a\in\mathbf{R})$,其中e为自然对数的底数.讨论函数$f(x)$的单调性.

[总结反思] 用导数法判断和证明函数$f(x)$在区间(a,b)内的单调性的一般步骤:

(1)求$f'(x)$.

(2)确认$f'(x)$在区间(a,b)内的符号(如果含有参数,则依据参数的取值讨论符号).

(3)得出结论:当$f'(x)>0$时,函数$f(x)$为增函数;当$f'(x)<0$时,函数$f(x)$为减函数.

变式题 [2019·临沂期中] 已知函数$f(x)=e^x-ax\ln x$.

(1)当$a=1$时,求曲线$y=f(x)$在点$x=1$处的切线方程;

(2)证明:对于任意$a\in(0,e)$,函数$f(x)$在区间$\left(\dfrac{a}{e},1\right)$上单调递增.

探究点二　求函数的单调区间

例 2　已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+\ln x$，其中 $a>0$.

(1)当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)当 $a\neq1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间.

[总结反思] (1)利用导数求函数单调区间的关键是确定导数的符号.不含参数的问题直接解导数大于(或小于)零的不等式，其解集即为函数的单调区间；含参数的问题，应就参数范围讨论导数大于(或小于)零的不等式的解，其解集即为函数的单调区间.

(2)所有求解和讨论都必须在函数的定义域内，不要超出定义域的范围.

变式题　(1)函数 $f(x)=(x-2)e^x$ 的单调递增区间为　(　　)

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(0,2)$　　D. $(1,2)$

(2)若函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-3\ln x$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为　(　　)

A. $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$　　B. $(-1,3)$

C. $(0,3)$　　D. $(3,+\infty)$

探究点三　已知函数单调性确定参数的取值范围

例 3　已知函数 $f(x)=(3-2x)e^x-ax-2$，其中 e 为自然对数的底数.若函数 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上是单调函数，求实数 a 的取值范围.

[总结反思] (1) $f(x)$ 在 D 上单调递增(减)，只要满足 $f'(x)\geqslant0(\leqslant0)$ 在 D 上恒成立即可.如果能够分离参数，则可分离参数后转化为参数值与函数最值之间的关系.

(2)二次函数在区间 D 上大于零恒成立，讨论的标准是二次函数的图像的对称轴与区间 D 的相对位置，一般分对称轴在区间左侧、内部、右侧进行讨论.

变式题　(1)[2019·河南名校联盟联考] 若函数 $f(x)=e^x(2x^2-x+k)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，则实数 k 的取值范围是________.

(2)若函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2+x\ln x-x$ 存在单调递增区间，则 a 的取值范围是________.

探究点四　函数单调性的简单应用

例 4　(1)[2019·兰州二模] 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)>2$，且 $f(1)=3$，则不等式 $f(x)>2x+1$ 的解集为　(　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

(2)以下结论正确的是　(　　)

A. $\log_{2018}2019<\log_{2019}2020<\frac{2020}{2019}$

B. $\log_{2019}2020<\log_{2018}2019<\frac{2020}{2019}$

C. $\frac{2020}{2019}<\log_{2019}2020<\log_{2018}2019$

D. $\frac{2020}{2019}<\log_{2018}2019<\log_{2019}2020$

[总结反思] 用导数比较大小或解不等式，常常要构造新函数，把比较大小或求解不等式的问题转化为利用导数研究函数单调性的问题，再由单调性比较大小或解不等式.常见的辅助函数有：$g(x)=xf(x)$，$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，$g(x)=e^xf(x)$，$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，$g(x)=f(x)\ln x$，$g(x)=\frac{f(x)}{\ln x}$等.

变式题　(1)已知函数 $f(x)=x^3+2x+1$，若 $f(ax-e^x+1)>1$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时有解，则实数 a 的取值范围为　(　　)

A. $[1,e)$　　B. $(0,1)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(1,+\infty)$

(2)已知实数 $a>0$，$b>0$，$a\neq1$，且满足 $\ln b=\frac{a-1}{\sqrt{a}}$，则下列判断一定正确的是　(　　)

A. $a>b$　　B. $a<b$

C. $\log_ab>1$　　D. $\log_ab<1$

请完成课时作业(十四)

第 15 讲 导数与函数的极值、最值

考试说明 1. 理解函数极值的概念及函数在某点取到极值的条件.
2. 会用导数求函数的极大(小)值,会求闭区间上函数的最大(小)值.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识 多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数的极值

(1)函数的极小值:

函数 $y=f(x)$在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都小,$f'(a)=0$;而且在点 $x=a$ 附近的左侧________,右侧________.则点 a 叫作函数 $y=f(x)$的极小值点,$f(a)$叫作函数 $y=f(x)$的极小值.

(2)函数的极大值:

函数 $y=f(x)$在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$比它在点 $x=b$ 附近其他点的函数值都大,$f'(b)=0$;而且在点 $x=b$ 附近的左侧________,右侧________.则点 b 叫作函数 $y=f(x)$的极大值点,$f(b)$叫作函数 $y=f(x)$的极大值.

极小值点、极大值点统称为极值点,极大值和极小值统称为极值.

2. 函数的最值

(1)在闭区间$[a,b]$上连续的函数 $f(x)$在$[a,b]$上必有最大值与最小值.

(2)若函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调递增,则________为函数的最小值,________为函数的最大值;若函数 $f(x)$在$[a,b]$上单调递减,则________为函数的最大值,________为函数的最小值.

3. 实际应用题

理解题意、建立函数模型,使用导数方法求解函数模型,根据求解结果回答实际问题.

常用结论

导数研究不等式的关键是函数的单调性和最值,各类不等式与函数最值关系如下:

不等式类型	与函数最值的关系
任意 $x\in D,f(x)>M$	任意 $x\in D,f(x)_{\min}>M$
任意 $x\in D,f(x)<M$	任意 $x\in D,f(x)_{\max}<M$
存在 $x_0\in D,f(x_0)>M$	任意 $x\in D,f(x)_{\max}>M$
存在 $x_0\in D,f(x_0)<M$	任意 $x\in D,f(x)_{\min}<M$
任意 $x\in D,f(x)>g(x)$	任意 $x\in D,[f(x)-g(x)]_{\min}>0$
任意 $x\in D,f(x)<g(x)$	任意 $x\in D,[f(x)-g(x)]_{\max}<0$
任意 $x_1\in D_1$,任意 $x_2\in D_2$,$f(x_1)>g(x_2)$	任意 $x_1\in D_1$,任意 $x_2\in D_2$,$f(x_1)_{\min}>g(x_2)_{\max}$

常用结论

(续表)

不等式类型	与函数最值的关系
任意 $x_1\in D_1$,存在 $x_2\in D_2$,$f(x_1)>g(x_2)$	任意 $x_1\in D_1$,任意 $x_2\in D_2$,$f(x_1)_{\min}>g(x_2)_{\min}$
存在 $x_1\in D_1$,任意 $x_2\in D_2$,$f(x_1)>g(x_2)$	任意 $x_1\in D_1$,任意 $x_2\in D_2$,$f(x_1)_{\max}>g(x_2)_{\max}$
存在 $x_1\in D_1$,存在 $x_2\in D_2$,$f(x_1)>g(x_2)$	任意 $x_1\in D_1$,任意 $x_2\in D_2$,$f(x_1)_{\max}>g(x_2)_{\min}$

(注:上述的大于、小于分别改为不小于、不大于,相应的与最值关系对应的不等号也改变)

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 的极小值为________.
2. [教材改编] 函数 $f(x)=x^3-12x$ 在区间$[-3,3]$上的最大值是________.
3. [教材改编] 当 $x>0$ 时,$\ln x,x,e^x$ 的大小关系是________.
4. [教材改编] 现有一块边长为 a 的正方形铁片,铁片的四角截去四个边长均为 x 的小正方形,然后做成一个无盖方盒,该方盒容积的最大值是________.

题组二 常错题

◆ **索引**:利用极值求参数时忽略对所求参数的检验;混淆极值与极值点的概念;连续函数在区间(a,b)上不一定存在最值;不等式问题中的易错点.

5. 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处取得极值 10,则 $a+b=$________.
6. 函数 $g(x)=-x^2$ 的极值点是________,函数 $f(x)=(x-1)^3$ 的极值点________(填"存在"或"不存在").
7. 函数 $g(x)=x^2$ 在$[1,2]$上的最小值和最大值分别是________,在$(1,2)$上的最小值和最大值均________(填"存在"或"不存在").
8. 对任意实数 x,不等式 $\sin x\leqslant a$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________;存在实数 x_0,使不等式 $\sin x_0\leqslant a$ 成立,则实数 a 的取值范围是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　利用导数解决函数的极值问题

微课10 · 思维

微点 1　由图像判断函数极值

例 1　设三次函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，函数 $y=x\cdot f'(x)$ 的图像的一部分如图 1-15-1 所示，则下列说法正确的是　(　　)

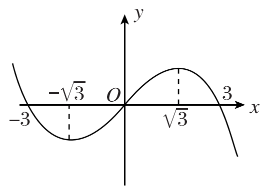


图 1-15-1

A. $f(x)$ 的极大值为 $f(\sqrt{3})$，极小值为 $f(-\sqrt{3})$

B. $f(x)$ 的极大值为 $f(-\sqrt{3})$，极小值为 $f(\sqrt{3})$

C. $f(x)$ 的极大值为 $f(3)$，极小值为 $f(-3)$

D. $f(x)$ 的极大值为 $f(-3)$，极小值为 $f(3)$

[总结反思] 可导函数在极值点处的导数一定为零，是否为极值点以及是极大值点还是极小值点要看在极值点左、右两侧导数的符号.

微点 2　已知函数求极值

例 2　[2019 · 重庆一中月考] 设函数 $f(x)=(x+1)e^x+1$，则　(　　)

A. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点

B. $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=-2$ 为 $f(x)$ 的极大值点

D. $x=-2$ 为 $f(x)$ 的极小值点

[总结反思] 求函数极值的一般步骤：①先求函数 $f(x)$ 的定义域，再求函数 $f(x)$ 的导函数；②求 $f'(x)=0$ 的根；③判断在 $f'(x)=0$ 的根的左、右两侧 $f'(x)$ 的符号，确定极值点；④求出具体极值.

微点 3　已知极值求参数

例 3　[2019 · 哈尔滨六中期末] 若函数 $f(x)=e^x-ax-a^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上有小于 0 的极值点，则实数 a 的取值范围是　(　　)

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$

C. $(-\infty,-1)$　　D. $(1,+\infty)$

[总结反思] 根据极值求参数的值(或取值范围)就是根据极值点处的导数等于零、极值点处的函数值即极值列出关于参数的方程组(或不等式组)，通过解方程组(或不等式组)求得参数的值(或取值范围).

应用演练

1. 【微点 1】[2019 · 舟山期末] 已知函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图 1-15-2 所示，则 $f(x)$　(　　)

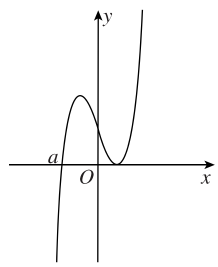


图 1-15-2

A. 有极小值，但无极大值

B. 既有极小值，也有极大值

C. 有极大值，但无极小值

D. 既无极小值，也无极大值

2. 【微点 2】[2019 · 日照实验中学月考] 函数 $f(x)=(x^2-1)^3+2$ 的极值点是　(　　)

A. $x=1$

B. $x=0$

C. $x=1$ 或 -1 或 0

D. $x=-1$

3. 【微点 2】已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，则 $f(x)$　(　　)

A. 有极小值，无极大值

B. 无极小值有极大值

C. 既有极小值，又有极大值

D. 既无极小值，又无极大值

4. 【微点 3】若函数 $f(x)=x^3-3bx+3$ 在 $(-1,2)$ 内有极值，则实数 b 的取值范围是　(　　)

A. $(0,4)$

B. $[0,4)$

C. $[1,4)$

D. $(1,4)$

5. 【微点 3】[2019 · 河南郑州模拟] 已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 在 $x=0$ 处取得极小值，则 $a=$________.

探究点二 利用导数解决函数的最值问题

例4 已知函数 $f(x)=ax+\ln x$,其中常数 $a<0$.

(1)当 $a=-1$ 时,求 $f(x)$的最大值;

(2)若 $f(x)$在区间$(0,e]$上的最大值为-3,求 a 的值.

[总结反思] (1)函数在闭区间上的最值在端点处或区间内的极值点处取得,上述值中最大的即为最大值、最小的即为最小值.如果函数在一个区间上(不论区间的类型)有唯一的极值点,则该点也是最值点.

(2)注意把不等式恒成立问题转化为函数的最值问题.

变式题 (1)[2019·浙江三校5月模拟] 已知函数 $f(x)=\dfrac{bx}{ax^2+4}(b\in\mathbf{R},a>0)$,若 $f(x)$的最小值为$-\dfrac{1}{4}$,且 $f(1)\geqslant\dfrac{1}{5}$,则 b 的取值范围是 ( )

A. $[-2,-1]$　　B. $[1,2]$

C. $[-4,-1]$　　D. $[1,4]$

(2)[2019·宁德质检] 若函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-a,x<1,\\x^3-3x^2,x\geqslant1\end{cases}$ 有最小值,则实数 a 的取值范围为________.

探究点三 利用导数解决函数零点问题

例5 (1)已知函数 $f(x)=x^2-bx+a$ 的图像如图1-15-3所示,则函数 $g(x)=e^x+f'(x)$的零点所在的区间是 ( )

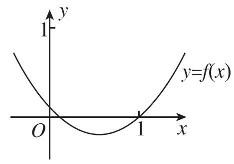


图 1-15-3

A. $(-1,0)$

B. $(0,1)$

C. $(1,2)$

D. $(2,3)$

(2)[2019·北仑中学期中] 设 $f(x)$与 $g(x)$的定义域均为$[0,1]$,且 $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}$,$g(x)=ax+5-2a(a>0)$,若对于任意 $x_1\in[0,1]$,总存在 $x_0\in[0,1]$,使得 $g(x_0)=f(x_1)$成立,则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$　　B. $[4,+\infty)$

C. $\left(0,\dfrac{5}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

[总结反思] 在解决函数零点问题的过程中,可以利用导数确定函数的单调性,掌握极值与导函数之间的关系,在相互协调的情况下提升解题效果.

变式题 (1)[2019·金华十校联考] 已知函数 $f(x)=xe^{2x}$,下列说法正确的是 ( )

A. 任意 $m>-\dfrac{1}{2e}$,函数 $y=f(x)-m$ 均有两个不同的零点

B. 存在实数 k,使得方程 $f(x)=k(x+2)$有两个负数根

C. 若 $f(a)=f(b)(a\neq b)$,则$-1<a+b<0$

D. 函数 $f(x)$存在极小值

(2)[2019·嘉兴一中月考] 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,若 $x_1+2x_0=3x_2$,函数 $g(x)=f(x)-f(x_0)$,则 $g(x)$ ( )

A. 恰有一个零点

B. 恰有两个零点

C. 恰有三个零点

D. 至多有两个零点

请完成课时作业(十五)

破解难点优质课（一）　导数与不等式

破解难点一　导数方法证明不等式

构造函数证明不等式：构造法证明不等式是指在证明与函数有关的不等式时，根据所要证明的不等式，构造与之相关的函数，利用函数的单调性、极值、最值加以证明．常见的构造方法有：(1)直接构造法：证明不等式 $f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$ 转化为证明 $f(x)-g(x)>0(f(x)-g(x)<0)$，进而构造辅助函数 $h(x)=f(x)-g(x)$；(2)适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩，二是利用常见的放缩结论，如 $\ln x\leqslant x-1$，$e^x\geqslant x+1$，$\ln x<x<e^x(x>0)$，$\frac{x}{x+1}\leqslant\ln(x+1)\leqslant x(x>-1)$；(3)构造“形似”函数：稍作变形再构造，对原不等式同解变形，如移项、通分、取对数，把不等式转化为左、右两边是相同结构的式子的形式，根据“相同结构”构造辅助函数；(4)构造双函数：若直接构造函数求导难以判断符号，导函数零点也不易求得，因此函数单调性与极值点都不易获得，则可构造函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，利用其最值求解．

案例	方法与思维
【直接构造法】[2018・全国卷Ⅰ]已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$. (1)讨论 $f(x)$ 的单调性； (2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.	…… (2)证明：由(1)知，$f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$．由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1，x_2 满足 $x^2-ax+1=0$(函数在极值点处的导数为0)，所以 $x_1x_2=1$. 不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$(注意原函数的定义域). 由于 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$，所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$.【关键1：将所证不等式进行变形与化简】 设函数 $g(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x$，由(1)知，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，【关键2：直接构造函数，判断函数单调性】 又 $g(1)=0$，从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，所以 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.【关键3：结合单调性得到函数最值，证明不等式】
【适当放缩构造法】[2018・全国卷Ⅰ]已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$. (1)设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间； (2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant 0$.	…… (2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1$.【关键1：利用不等式性质放缩，将 a 代换掉】 设 $g(x)=\frac{e^x}{e}-\ln x-1$，【关键2：利用不等式右边构造函数】 则 $g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x}$．当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$．所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的最小值点.【关键3：利用导数研究函数的单调性、最值】 故当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=0$.【关键4：利用函数最值使放缩后的不等式得到证明】 因此，当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

（续表）

案例	方法与思维
【构造双函数法】[2014·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$. (1)求 a,b； (2)证明：$f(x)>1$.	…… (2)证明：由(1)知，$f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$，从而 $f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.【关键1：将所证不等式等价转化，为构造双函数创造条件】 设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$，所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$. 故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，从而 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.【关键2：构造函数，利用导数研究函数的单调性，求最小值】 设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$. 所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$. 故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，从而 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.【关键3：构造函数，利用导数研究函数的单调性，求最大值】 因为 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=h(1)=h(x)_{\max}$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.【关键4：利用函数最值证明不等式】

提示：在构造函数证明不等式时，常会用到一些放缩技巧：(1)舍去一些正项(或负项)；(2)在和或积中换大(或换小)某些项；(3)扩大(或缩小)分式的分子(或分母)；(4)构造基本不等式(通常结合代换法，注意对指数的变换).

案例	方法与思维
[2015·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$. (1)讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数； (2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.	…… (2)证明：由(1)可设 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一零点为 x_0. 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(x_0)$.【关键1：利用导数判断函数单调性，并求函数最小值】 由于 $2e^{2x_0}-\frac{a}{x_0}=0$，将式子变形，可得①$e^{2x_0}=\frac{a}{2x_0}$， ②$\ln x_0=-2x_0-\ln\frac{2}{a}$(利用取对数法，把 $\ln x_0$ 用 a 及 x_0 表示出来)， 所以 $f(x_0)=\frac{a}{2x_0}+2ax_0+a\ln\frac{2}{a}\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.【关键2：利用代换法，结合基本不等式消去 x_0，证明不等式成立】 故当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\frac{2}{a}$.
[2016·全国卷Ⅲ] 设函数 $f(x)=\alpha\cos 2x+(\alpha-1)\cdot(\cos x+1)$，其中 $\alpha>0$，记 $\lvert f(x)\rvert$ 的最大值为 A. (1)求 $f'(x)$； (2)求 A； (3)证明：$\lvert f'(x)\rvert\leqslant 2A$.	…… (3)证明：由(1)得 $\lvert f'(x)\rvert=\lvert-2\alpha\sin 2x-(\alpha-1)\sin x\rvert\leqslant 2\alpha+\lvert\alpha-1\rvert$.【关键1：利用三角函数有界性及绝对值不等式性质放缩】 当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{5}$ 时，$\lvert f'(x)\rvert\leqslant 1+\alpha\leqslant 2-4\alpha<2(2-3\alpha)=2A$.【关键2：分类讨论，利用绝对值定义去绝对值符号，并放缩证明不等式】 当 $\frac{1}{5}<\alpha<1$ 时，$A=\frac{\alpha}{8}+\frac{1}{8\alpha}+\frac{3}{4}\geqslant 1$，所以 $\lvert f'(x)\rvert\leqslant 1+\alpha<2A$.【关键3：分类讨论，利用绝对值定义去绝对值符号，利用基本不等式与放缩法证明不等式】 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，$\lvert f'(x)\rvert\leqslant 3\alpha-1\leqslant 6\alpha-4=2A$，所以 $\lvert f'(x)\rvert\leqslant 2A$.【关键4：分类讨论，利用绝对值定义去绝对值符号，并放缩证明不等式】

微点 1　构造函数证明不等式

例 1　[2019·石家庄期末] 已知函数 $f(x)=ax\ln x+x^2+2(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时,求函数 $f(x)$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)当 $a>0$ 时,求证:对任意 $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)<x^2+(a+2)x+1$ 恒成立.

[总结反思] 待证不等式的两边含有同一个变量时,一般地,可以直接构造"左减右"的函数,即若证明 $f(x)>g(x)$ 在区间 D 上恒成立,则构造函数 $h(x)=f(x)-g(x)$,再根据函数单调性,证明 $h(x)>0$.

变式题　[2019·浙江舟山中学 5 月月考] 已知 $f(x)=e^x$, $g(x)=x^2+ax-2x\sin x+1$.

(1)证明: $1+x\leqslant e^x\leqslant\frac{1}{1-x}(x\in[0,1))$;

(2)若 $x\in[0,1)$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

微点 2　双变量不等式的证明

例 2　[2019·湖南师范大学附属中学月考] 已知函数 $f(x)=\ln\frac{1}{2x}-ax^2+x(a\geqslant 0)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数;

(2)若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2,证明: $f(x_1)+f(x_2)>3-4\ln 2$.

[总结反思] 破解含双变量不等式的证明的关键:

一是转化,即由已知条件入手,寻找双变量所满足的关系式,并把含双变量的不等式转化为含单变量的不等式;

二是巧构造函数,再借助导数,判断函数的单调性,从而求其最值;

三是回归双变量的不等式的证明,把所求的最值应用到双变量不等式,即可证得结果.

变式题 [2019·浙江三校5月联考] 已知函数 $f(x)=x^2-(a-2)x-a\ln x(a\neq0)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若方程 $f(x)=c$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2,求证:$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$.

破解难点二 根据不等式确定参数范围

一般地,若 $a>f(x)$ 对 $x\in D$ 恒成立,则只需 $a>f(x)_{\max}$;若 $a<f(x)$ 对 $x\in D$ 恒成立,则只需 $a<f(x)_{\min}$. 若存在 $x_0\in D$,使 $a>f(x_0)$ 成立,则只需 $a>f(x)_{\min}$;若存在 $x_0\in D$,使 $a<f(x_0)$ 成立,则只需 $a<f(x)_{\max}$. 由此构造不等式,求解参数的取值范围.

分类讨论法:常见有两种情况,一种先利用综合法,结合导函数零点之间大小关系的决定条件,确定分类讨论的标准,分类后,判断不同区间函数的单调性,得到最值,构造不等式求解;另外一种,直接通过导函数的式子,看出导函数值正负的分类标准,通常导函数为二次函数或者一次函数.

提示:求解参数范围时,一般会涉及分离参数法,理科试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况,通常需要设出导函数的零点,难度较大.

案例	方法与思维
【直接求参】[2019·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$,$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. (1)证明:$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点; (2)若 $x\in[0,\pi]$ 时,$f(x)\geqslant ax$,求 a 的取值范围.	…… (2)由题设知 $f(\pi)\geqslant a\pi$,$f(\pi)=0$,可得 $a\leqslant0$.【关键1:利用条件先确定 a 的大致范围】 由(1)知,$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 只有一个零点,设为 x_0,且当 $x\in(0,x_0)$ 时,$f'(x)>0$;【关键2:零点虽不可求,但可以设出来】 当 $x\in(x_0,\pi)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增,在 (x_0,π) 单调递减. 又 $f(0)=0$,$f(\pi)=0$,所以,当 $x\in[0,\pi]$ 时,$f(x)\geqslant0$.【关键3:结合单调性及区间端点处的函数值,确定 $f(x)$ 的取值范围】 又当 $a\leqslant0$,$x\in[0,\pi]$ 时,$ax\leqslant0$,故 $f(x)\geqslant ax$. 因此,a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.
【结合导函数的零点分类讨论】[2017·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$. (1)若 $f(x)\geqslant0$,求 a 的值; (2)设 m 为整数,且对于任意正整数 n,$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$,求 m 的最小值.	(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$(求函数定义域). ①若 $a\leqslant0$,因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+a\ln2<0$,所以不满足题意.【关键1:利用原函数解析式的特点确定分类标准】 ②若 $a>0$,由 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$ 知,当 $x\in(0,a)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(a,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.【关键2:根据导函数的零点分类讨论】 故 $x=a$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的唯一极小值点. 由于 $f(1)=0$,所以当且仅当 $a=1$ 时,$f(x)\geqslant0$,故 $a=1$. ……

提示:破解不等式求参问题,时常会通过不等式的同解变形,构造一个与背景函数相关的函数,利用函数最值确定参数的取值范围. 在构造函数或求最值过程中常用的放缩方法有函数放缩法、基本不等式放缩法、叠加不等式放缩法等.

案例	方法与思维
[2017·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$. (1)若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的值; (2)设 m 为整数,且对于任意正整数 n,$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$,求 m 的最小值.	…… (2)由(1)知当 $x\in(1,+\infty)$时,$x-1-\ln x>0$. 令 $x=1+\frac{1}{2^n}$,得 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}$,从而 $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$,**【关键:利用放缩法变形】** 故$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$. 而$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)>2$,所以 m 的最小值为 3.
[2016·江苏卷] 已知函数 $f(x)=a^x+b^x(a>0,b>0,a\neq1,b\neq1)$. (1)设 $a=2,b=\frac{1}{2}$. ①求方程 $f(x)=2$ 的根; ②若对于任意 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 恒成立,求实数 m 的最大值; (2)若 $0<a<1,b>1$,函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点,求 ab 的值.	(1)因为 $a=2,b=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)=2^x+2^{-x}$. ①方程 $f(x)=2$,即 $2^x+2^{-x}=2$,亦即$(2^x)^2-2\times2^x+1=0$, 所以$(2^x-1)^2=0$,于是 $2^x=1$,解得 $x=0$. ②由条件知 $f(2x)=2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2=[f(x)]^2-2$. 因为 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,且 $f(x)>0$, 所以 $m\leqslant\frac{[f(x)]^2+4}{f(x)}$对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.**【关键 1:分离参数】** 而$\frac{[f(x)]^2+4}{f(x)}=f(x)+\frac{4}{f(x)}\geqslant2\sqrt{f(x)\cdot\frac{4}{f(x)}}=4$,且$\frac{[f(0)]^2+4}{f(0)}=4$, 所以 $m\leqslant4$,故实数 m 的最大值为 4.**【关键 2:利用基本不等式求最值,进而得到参数的取值范围】** ……

微点 1　恒成立与能成立问题

例 3 已知函数 $f(x)=x(\ln x+a)+b$,曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的方程为 $2x-y-1=0$.

(1)求 a,b 的值;

(2)若对任意的 $x\in(1,+\infty)$,$f(x)\geqslant m(x-1)$恒成立,求正整数 m 的最大值.

[总结反思] 由不等式恒成立(能成立)求参数取值范围的思路及关键:

(1)一般有两个解题思路:一是分离参数;二是不分离参数.

(2)两种思路都是将问题归结为求函数的最值,至于用哪种方法,关键是看参数是否已分离.这两个思路的依据是:$a\geqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\max}$,$a\leqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\min}$;$a\geqslant f(x)$能成立$\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\min}$,$a\leqslant f(x)$能成立$\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\max}$.

变式题 [2019·浙江模拟] 已知函数 $f(x)=(2-a)\ln x+\frac{1}{x}+2ax(a\leqslant0)$.

(1)当 $a=0$ 时,求 $f(x)$的极值;

(2)当 $a<0$ 时,讨论 $f(x)$的单调性;

(3)若对任意的 $a\in(-3,-2)$,$x_1,x_2\in[1,3]$,$(m+\ln 3)\cdot a-2\ln 3>|f(x_1)-f(x_2)|$恒成立,求实数 m 的取值范围.

微点2 可化为恒成立问题的导数问题

例4 已知函数 $f(x)=x^2+a\ln x$.

(1)当 $a=-2$ 时,求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2)若函数 $g(x)=f(x)+\frac{2}{x}$ 在$[1,2]$上是减函数,求实数 a 的取值范围.

[总结反思] 可化为不等式恒成立问题的基本类型:

类型1:函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增,只需 $f'(x)\geqslant 0$.

类型2:函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减,只需 $f'(x)\leqslant 0$.

类型3:$\forall x_1,x_2\in D$,$f(x_1)>g(x_2)$,只需 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$.

类型4:$\forall x_1\in D_1$,$\exists x_2\in D_2$,$f(x_1)>g(x_2)$,只需 $f(x)_{\min}>g(x)_{\min}$.

类型5:$\forall x_1\in D_1$,$\exists x_2\in D_2$,$f(x_1)<g(x_2)$,只需 $f(x)_{\max}<g(x)_{\max}$.

变式题 [2019·湖州三校模拟] 已知函数 $f(x)=2x^2$,$g(x)=m\ln x(m>0)$,曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且仅有一个公共点.

(1)求 m 的值;

(2)若存在实数 a,b,使得关于 x 的不等式 $g(x)\leqslant ax+b\leqslant f(x)+2$ 对任意正实数 x 恒成立,求 a 的最小值.

破解难点三 可化为不等式问题的函数问题

利用导数解决函数问题一般是离不开不等式的,如利用导数求函数的单调性(区间)、求函数的极值、求函数的最值等,还包括求函数的零点,判断函数图像间的关系等等.解决该问题的关键是:一、合理地将相应函数问题转化为有关不等式;二、通过求解不等式反馈函数的实际问题.

案例	方法与思维
【单调性转化为不等式】[2019·全国卷Ⅱ] 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$. (1)讨论 $f(x)$ 的单调性,并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点; (2)设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点,证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线.	(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$. 因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$,$(1,+\infty)$ 单调递增.【关键1:由导数大于0判断单调性及单调区间】 因为 $f(e)=1-\frac{e+1}{e-1}<0$,$f(e^2)=2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 有唯一零点 x_1,即 $f(x_1)=0$. 又 $0<\frac{1}{x_1}<1$,$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$,故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点 $\frac{1}{x_1}$. 综上,$f(x)$ 有且仅有两个零点.【关键2:由一些特殊取值对应的符号确定零点的情况】 ……

例5 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x$.

(1)若 $a=-1$,求函数 $f(x)$ 的极值,并指出是极大值还是极小值;

(2)若 $a=1$,求证:在区间 $[1,+\infty)$ 上,函数 $f(x)$ 的图像在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图像的下方.

变式题 [2019·浙江新昌中学、浦江中学、富阳中学4月联考] 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x^2+1)-2\ln x}-x^2-ax$ $(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=0$ 时,求证:$f(x)>0$;

(2)当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,求实数 a 的取值范围;

(3)求证:$\ln[(1+2^2)\times(1+3^2)\times\cdots\times(1+n^2)]<1+2\ln(2\times3\times\cdots\times n)$,$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$.

请完成专题突破训练(一)

破解难点优质课（二）　导数与方程

破解难点一　判断、证明或讨论函数零点个数

两类零点问题的不同处理方法：利用零点存在性定理的条件为函数图像在区间$[a,b]$上是连续不断的曲线，且$f(a)\cdot f(b)<0$. ①直接法：判断一个零点时，若函数为单调函数，则只需取值证明$f(a)\cdot f(b)<0$；②分类讨论法：判断几个零点时，需要先结合单调性，确定分类讨论的标准，再利用零点存在性定理，在每个单调区间内取值证明$f(a)\cdot f(b)<0$.

案例	方法与思维
【分类讨论法】[2019·全国卷Ⅰ] 已知函数$f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$为$f(x)$的导数.证明： (1) $f'(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点； (2) $f(x)$有且仅有2个零点.	…… (2) $f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$. (i)当$x\in(-1,0]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(-1,0)$单调递增，而$f'(0)=0$， 所以当$x\in(-1,0)$时，$f'(x)<0$， 故$f(x)$在$(-1,0)$单调递减. 又$f(0)=0$，从而$x=0$是$f(x)$在$(-1,0]$的唯一零点. 【关键1：对x的取值分类讨论，判断$f(x)$的单调性】. (ii)当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，由(1)知，$f'(x)$在$(0,\alpha)$单调递增，在$\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$单调递减，而$f'(0)=0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$， 所以存在$\beta\in\left(\alpha,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(\beta)=0$，且当$x\in(0,\beta)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$. 故$f(x)$在$(0,\beta)$单调递增，在$\left(\beta,\frac{\pi}{2}\right)$单调递减. 又$f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$， 所以当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)>0$. 从而，$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$没有零点.【关键2：对$x$分类的依据是什么】 (iii)当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$f'(x)<0$， 所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减.而$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f(\pi)<0$，所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$有唯一零点. 【关键3：结合零点存在性定理】 (iv)当$x\in(\pi,+\infty)$时，$\ln(x+1)>1$，所以$f(x)<0$，从而$f(x)$在$(\pi,+\infty)$没有零点. 综上，$f(x)$有且仅有2个零点.
【直接法】[2019·全国卷Ⅱ] 已知函数$f(x)=\ln x-\frac{x+1}{x-1}$. (1)讨论$f(x)$的单调性，并证明$f(x)$有且仅有两个零点； (2)设$x_0$是$f(x)$的一个零点，证明曲线$y=\ln x$在点$A(x_0,\ln x_0)$处的切线也是曲线$y=e^x$的切线.	(1) $f(x)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$. 因为$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$，所以$f(x)$在$(0,1)$，$(1,+\infty)$单调递增.【关键1：函数的单调性问题转化为导数的符号问题】 因为$f(e)=1-\frac{e+1}{e-1}<0$，$f(e^2)=2-\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e^2-3}{e^2-1}>0$， 所以$f(x)$在$(1,+\infty)$有唯一零点$x_1$，即$f(x_1)=0$. 又$0<\frac{1}{x_1}<1$，$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\frac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，【关键2：结合零点存在性定理】 故$f(x)$在$(0,1)$有唯一零点$\frac{1}{x_1}$. 综上，$f(x)$有且仅有两个零点. ……

例1 ［2019·安阳二模］已知函数 $f(x)=\ln x-x^2+ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)证明：$\ln x\leqslant x-1$；

(2)若 $a\geqslant1$，讨论函数 $f(x)$的零点个数.

［总结反思］根据参数确定函数的零点个数有两种解决方法：一种是利用单调性与零点存在性定理求解，另一种是化原函数为两个函数，利用两个函数图像的交点来求解.

变式题 ［2019·浙江三校5月模拟］设函数 $f(x)=2x^2+a\ln x(a\neq0)$.

(1)若曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=2x+m$，求实数 a,m 的值.

(2)若 $f(2x-1)+2>2f(x)$对任意 $x\in[2,+\infty)$恒成立，求实数 a 的取值范围.

(3)关于 x 的方程 $f(x)+2\cos x=5$ 能否有三个不同的实根？证明你的结论.

破解难点二　根据零点个数确定参数

已知函数有零点求参数范围常用的方法：(1)分离参数法：一般命题情境为给出区间，求满足函数零点个数的参数范围，通常解法为从 $f(x)$中分离出参数，然后利用求导的方法求出由参数构造的新函数的最值，根据题设条件构建关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围；(2)分类讨论法：一般命题情境为没有固定区间，求满足函数零点个数的参数范围，通常解法为结合单调性，先确定参数分类的标准，在每个小范围内研究零点的个数是否符合题意，将满足题意的参数的各小范围并在一起，即为所求参数范围.

案例	方法与思维
【由导数特点分类讨论】［2018·全国卷Ⅱ］已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$. (1)若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant1$； (2)若 $f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点，求 a.	…… (2)设函数 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$. $f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点当且仅当 $h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点.【关键1：构造函数 $h(x)$，将 $f(x)$的零点情况转化为 $h(x)$的零点情况】 (i)当 $a\leqslant0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点.【关键2：对参数 a 分类讨论，结合函数值判断函数零点情况】 (ii)当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$. 当 $x\in(0,2)$时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$. 所以 $h(x)$在$(0,2)$单调递减，在$(2,+\infty)$单调递增. 故 $h(2)=1-\frac{4a}{e^2}$是 $h(x)$在$[0,+\infty)$的最小值.【关键3：利用导数研究函数单调性，求函数最值】 ①若 $h(2)>0$，即 $a<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0,+\infty)$没有零点； ②若 $h(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$，$h(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点； ③若 $h(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$，由于 $h(0)=1$，所以 $h(x)$在$(0,2)$有一个零点. 由(1)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以 $h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0$. 故 $h(x)$在$(2,4a)$有一个零点，因此 $h(x)$在$(0,+\infty)$有两个零点.【关键4：对函数最小值的符号分类讨论，结合函数单调性判断零点情况，求出参数值】 综上，$f(x)$在$(0,+\infty)$只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$.

（续表）

案例	方法与思维
【直接分类讨论】[2017·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$. (1)讨论 $f(x)$ 的单调性； (2)若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.	…… (2)(i)若 $a\leqslant 0$，由(1)知，$f(x)$ 至多有一个零点.**【关键1：针对 $f(x)$ 解析式的特点，可对参数 a 直接分类讨论】** (ii)若 $a>0$，由(1)知，当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值，最小值为 $f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}+\ln a$. **【关键2：结合函数单调性求函数最小值，进而根据最小值直接判断零点的情况】** ①当 $a=1$ 时，由于 $f(-\ln a)=0$，故 $f(x)$ 只有一个零点； ②当 $a\in(1,+\infty)$ 时，由于 $1-\frac{1}{a}+\ln a>0$，即 $f(-\ln a)>0$，故 $f(x)$ 没有零点； ③当 $a\in(0,1)$ 时，$1-\frac{1}{a}+\ln a<0$，即 $f(-\ln a)<0$. 又 $f(-2)=ae^{-4}+(a-2)e^{-2}+2>-2e^{-2}+2>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上有一个零点. 设正整数 n_0 满足 $n_0>\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)$，则 $f(n_0)=e^{n_0}(ae^{n_0}+a-2)-n_0>e^{n_0}-n_0>2^{n_0}-n_0>0$. 由于 $\ln\left(\frac{3}{a}-1\right)>-\ln a$，因此 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上有一个零点.**【关键3：对参数 a 分类讨论，结合函数单调性与最小值判断函数零点情况，求参数取值范围】** 综上，a 的取值范围为 $(0,1)$.

例2 [2019·宁德期末] 已知函数 $f(x)=e^x(ax+1)$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=bx-e$.

(1)求 a,b 的值；

(2)若函数 $g(x)=f(x)-3e^x-m$ 有两个零点，求实数 m 的取值范围.

[总结反思] 根据函数零点个数确定参数取值范围的核心思想是"数形结合"，即通过函数的单调性确定函数图像与 x 轴的交点个数，或者通过两个相关函数图像的交点个数确定参数满足的条件，进而求得参数的取值范围，解决问题的步骤是"先形后数".

变式题 [2019·绍兴一模] 已知函数 $f(x)=2\ln(ax+b)$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$.

(1)若直线 $y=x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求 ab 的最大值.

(2)设 $b=1$，若方程 $f(x)=a^2x^2+(a^2+2a)x+a+1$ 有两个不相等的实根，求 a 的最大整数值.$\left(\ln\frac{5}{4}\approx 0.223\right)$.

破解难点三　可化为函数零点的函数问题（与函数零点性质研究）

本探究点包括两个方向:一是与函数零点性质有关的问题(更多涉及构造函数法);二是可以转化为函数零点的函数问题(更多涉及整体转化、数形结合等方法技巧).

能够利用等价转换构造函数法求解的问题常涉及参数的最值、曲线交点、零点的大小关系等.求解时一般先通过等价转换,将已知转化为函数零点问题,再构造函数,然后利用导数研究函数的单调性、极值、最值等,并结合分类讨论,通过确定函数的零点达到解决问题的目的.

案例	方法与思维
【可化为函数零点的函数问题】[2014·全国卷Ⅱ] 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$.曲线 $y=f(x)$ 在点(0,2)处的切线与 x 轴交点的横坐标为-2. (1)求 a; (2)证明:当 $k<1$ 时,曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.	…… (2)证明:由(1)知,$f(x)=x^3-3x^2+x+2$. 设 $g(x)=f(x)-kx+2=x^3-3x^2+(1-k)x+4$.【关键1:等价转换,构造函数】 由题设知 $1-k>0$. 当 $x\leqslant 0$ 时,$g'(x)=3x^2-6x+1-k>0$,$g(x)$单调递增,$g(-1)=k-1<0$,$g(0)=4$, 所以$g(x)=0$ 在$(-\infty,0]$上有唯一实根.【关键2:利用导数判断函数单调性,判断实根情况】 当 $x>0$ 时,令 $h(x)=x^3-3x^2+4$, 则 $g(x)=h(x)+(1-k)x>h(x)$. $h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$, $h(x)$在(0,2)上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增, 所以$g(x)>h(x)\geqslant h(2)=0$, 所以 $g(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上没有实根. 综上,$g(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一实根.【关键3:利用导数判断函数单调性,结合零点存在性定理判断实根情况】 即曲线 $y=f(x)$与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.
【函数零点性质研究】[2016·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点. (1)求 a 的取值范围; (2)设 x_1,x_2 是 $f(x)$的两个零点,证明:$x_1+x_2<2$.	…… (2)证明:不妨设 $x_1<x_2$. 由(1)知,$x_1\in(-\infty,1)$,$x_2\in(1,+\infty)$,$2-x_2\in(-\infty,1)$,$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递减, 所以 $x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$,即 $f(2-x_2)<0$.【关键1:利用分析法转化要证明的不等式】 由于 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$,① 而 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$,② 所以 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$.【关键2:将②代入①,利用整体代入消元】 设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$,【关键3:构造函数】 则 $g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$. 所以当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,而 $g(1)=0$, 故当 $x>1$ 时,$g(x)<0$, 从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$, 故 $x_1+x_2<2$.【关键4:利用导数判断函数单调性、用最值证明不等式】

例3 [2019·嘉兴、丽水9月联考] 已知函数 $f(x)=e^{2x}-ax+b(a,b\in\mathbf{R}$,其中 e 为自然对数的底数).

(1)若 $a>0$,求函数 $f(x)$的单调递增区间.

(2)若函数 $f(x)$有两个不同的零点 x_1,x_2.

(i)当 $a=b$ 时,求实数 a 的取值范围;

(ii)设 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$,求证:$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

[**总结反思**] 多变量问题,往往要结合方程组转化为单变量,构造函数来处理,把方程的根和函数的零点结合起来解决问题.

变式题 [2019·杭州二模] 已知函数 $f(x)=(x-1)e^{x}$.

(1)求函数 $f(x)$的单调递增区间;

(2)若方程 $f(x)=ax+b(a,b\in\mathbf{R})$有非负实数解,求 $a^{2}+4b$ 的最小值.

请完成专题突破训练(二)