KEYS 参考答案 | 听课手册

第一单元　集合与常用逻辑用语

第 1 讲　集合

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. (1)确定性　互异性　(2)$\in$　$\notin$　(3)描述法　图示法　(4)$\mathbf{N}$　$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$　$\mathbf{Z}$　$\mathbf{Q}$　$\mathbf{R}$
2. 任意一个元素　$B\supseteq A$　至少　$\subsetneqq$　相同　$A=B$　不含
3. 且　且　$A\cap B$　或　或　$A\cup B$　不　$\notin$　$\complement_U A$
4. (1)$B\cup A$　A　(2)$\subseteq$　(3)$\varnothing$　A　$\cap$　$(\complement_U A)$　$(\complement_U B)$

对点演练

1. 4 或 1　2. $\{-2,-1,0\}$　3. 4　4. 1
5. 0 或 3　6. 4　7. $\left\{1,0,-\frac{1}{2}\right\}$　8. $2\leqslant a\leqslant 4$

【课堂考点探究】

例 1　(1)A　(2)5　变式题　(1)C　(2)$-1\leqslant a\leqslant 2$
例 2　(1)D　(2)$[-1,+\infty)$　变式题　(1)C　(2)B
例 3　(1)D　(2)B　例 4　(1)D　(2)5
例 5　(1)D　(2)96

第 2 讲　命题及其关系、充分条件与必要条件

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. (1)真假　判断为真　判断为假
2. (1)充分　(2)必要　(3)充要

对点演练

1. ④　2. 0
3. 若整数 a 不是奇数,则 a 能被 2 整除
4. 既不充分也不必要
5. 若 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$,$a,b\in\mathbf{R}$,则 $a^2+b^2\neq 0$
6. 对任意 $a,b\in\mathbf{R}$,若 $ab\leqslant 0$,则 $a\leqslant 0$
7. $[-3,0]$　8. ①$a\geqslant 2$　②$a<2$　9. 充分不必要

【课堂考点探究】

探究点一

1. B　2. C　3. D
4. 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$,则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

探究点二

1. A　2. B　3. B　4. C

例　(1)D　(2)B　变式题　(1)D　(2)AD

第 3 讲　简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. "且"　"或"　"非"　$\wedge$　$\vee$　$\neg$
2. (1)全称量词　$\forall$　(2)存在量词　$\exists$　(3)$\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$　$\forall x\in M,\neg q(x)$

对点演练

1. 真　真　真　假　2. $\forall x\in\mathbf{R},\log_2 x+2\geqslant 0$
3. 有些表面积相等的三棱锥体积不相等
4. $(\neg p)\vee(\neg q)$
5. 存在一个奇数,它的立方不是奇数　6. ④
7. 若 $ab\neq 0$,则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$　8. $(-\infty,4]$

【课堂考点探究】

1. D　2. D　3. D　4. ①④

例 1　(1)B　(2)A　变式题　(1)C　(2)A
例 2　(1)$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{5}{2}$　(2)$m>\frac{2\sqrt{3}}{3}$
变式题　(1)B　(2)$[1+\sqrt{3},+\infty)$

第二单元　函数、导数及其应用

第 4 讲　函数的概念及其表示

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. 非空数集　非空集合　任意　唯一确定　任意　唯一确定　$f:A\to B$　$f:A\to B$
2. 定义域　值域　定义域　值域
3. 解析法　图像法　列表法　4. 对应关系

对点演练

1. ④　2. 4　5　3. $(-\infty,-3)\cup(-3,8]$
4. 7　5. $\{x|x\geqslant 2\}$　6. $(-\infty,-1]\cup(0,1]$
7. $x^2-1(x\geqslant 0)$　8. 9

【课堂考点探究】

例 1　(1)C　(2)$\left(\frac{1}{2},2\right)$　例 2　(1)D　(2)C
变式题　(1)C　(2)$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$
例 3　(1)$x^2-2x-3(x\geqslant 1)$　(2)x^2-x+3　(3)$\frac{2}{3}x-\frac{2020}{3x}+\frac{2}{3}(x\neq 0)$
变式题　(1)C　(2)$4x$　(3)1
例 4　(1)B　(2)D　例 5　(1)B　(2)D
例 6　(1)D　(2)$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

应用演练

1. A　2. B　3. D　4. B　5. $\frac{3}{2}$

第 5 讲　函数的单调性与最值

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. $f(x_1)<f(x_2)$　$f(x_1)>f(x_2)$　上升的　下降的
2. 增函数或减函数　区间 D
3. $f(x)\geqslant M$　$f(x_0)=M$

对点演练

1. $a<\frac{1}{2}$　2. $(2,3]$　$[-3,2]$　3. $\frac{3}{2}$
4. $a\leqslant 2$　5. $(-\infty,-3)$　6. $\left(-\infty,\frac{13}{8}\right]$
7. $[-1,1)$　8. (1)$a\leqslant-3$　(2)-3

【课堂考点探究】

例 1　$f(x)$在$(-2,+\infty)$上单调递增,证明略
变式题　(1)BC　(2)A
例 2　(1)D　(2)$[0,2)$　变式题　(1)A　(2)D
例 3　D　例 4　(1)A　(2)$\left(0,\frac{3}{4}\right)\cup(1,+\infty)$
例 5　(1)C　(2)C　例 6　(1)A　(2)$(-\infty,1]$

应用演练

1. C　2. C　3. D　4. D　5. D

第 6 讲　函数的奇偶性与周期性

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. $f(-x)=f(x)$　$f(-x)=-f(x)$　y 轴　原点
2. (1)$f(x+T)=f(x)$　(2)最小的正数　最小正数

对点演练

1. 2　2. 减　减　3. $1-\sqrt{2}$　4. 1　5. 奇
6. $x=a$　$(b,0)$　7. -2　8. $\begin{cases}x-3,x>0,\\0,x=0,\\x+3,x<0\end{cases}$

【课堂考点探究】

例 1　(1)A　(2)C　例 2　(1)C　(2)B
例 3　(1)D　(2)D

应用演练

1. B　2. B　3. A　4. D　5. -1

例 4　(1)D　(2)A　变式题　(1)C　(2)CD
例 5　(1)C　(2)$[-2,-1)$
例 6　(1)C　(2)B　例 7　C

应用演练

1. D　2. D　3. A　4. A　5. A

第 7 讲　二次函数与幂函数

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. $\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$　$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$　$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$　$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$　$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$　$b=0$
2. $\{x|x\geqslant 0\}$　$\{x|x\neq 0\}$　$\{y|y\geqslant 0\}$　$\{y|y\geqslant 0\}$　$\{y|y\neq 0\}$　奇　偶　奇　非奇非偶　奇　$(-\infty,0]$　$(0,+\infty)$　$[0,+\infty)$　$(-\infty,0)$　$(0,+\infty)$　$(1,1)$

对点演练

1. $(-\infty,40]\cup[160,+\infty)$　2. $x^{\frac{1}{2}}$
3. 6　2　4. 6　5. ③　6. $>$
7. $m\leqslant-\frac{1}{6}$　8. $(3,5)$　9. $(-\infty,1)$

【课堂考点探究】

1. C　2. C　3. A

例 1　(1)$f(x)=-4x^2-12x+40$　(2)x^2-4x+3
变式题　$f(x)=-4x^2+4x+7$
例 2　①②③④　例 3　(1)B　(2)$(0,1)$
例 4　-1 或 2　例 5　B

应用演练

1. D　2. B　3. A　4. $\left[\frac{3}{4},1\right]$　5. $-\frac{1}{3}$

第 8 讲　指数与指数函数

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. n 次方根　奇数　偶数　没有意义　根式　根指数　被开方数　a　$\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0)\end{cases}$
2. (1)0　没有意义　(2)a^{r+s}　a^{rs}　a^rb^r
3. $(0,+\infty)$　$(0,1)$　$y>1$　$0<y<1$　$0<y<1$　$y>1$　增函数　减函数

对点演练

1. $\pm 3\sqrt{5}$　2. $(-\infty,2)$　3. $(1,3)$　4. ②
5. $2\sqrt{2}$　6. 2　7. 2 或$\frac{1}{2}$　8. $\{y|y>0$ 且 $y\neq 1\}$

【课堂考点探究】

1. B　2. C　3. $99+\pi$　4. $2\sqrt{5}-3$

例 1　(1)C　(2)A
变式题　(1)B　(2)$\{0\}\cup[1,+\infty)$
例 2　(1)C　(2)A
例 3　(1)B　(2)$\{x|x>4$ 或 $x<0\}$　例 4　(1)C　(2)A

应用演练

1. D　2. A　3. D　4. B　5. D

第 9 讲　对数与对数函数

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. 对数　$x=\log_a N$　对数　0　N　$\log_a M+\log_a N$　$\log_a M-\log_a N$　$n\log_a M$　$\frac{n}{m}\log_a b$
2. 对数　$(0,+\infty)$　$\mathbf{R}$　$(1,0)$　增　减
3. $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$　$y=x$

对点演练

1. 1　2. $(-\infty,2)$　3. 1
4. $(-\infty,-1)$　5. ①②③④⑤　6. 4
7. $c>a>b$　8. 2 或$\frac{1}{2}$

【课堂考点探究】

例 1　(1)D　(2)0　变式题　(1)C　(2)45
例 2　(1)D　(2)A　变式题　(1)A　(2)A
例 3　(1)B　(2)A
例 4　(1)$\left(\frac{1}{4},1\right)$　(2)$\left(1,\frac{9}{7}\right)$
例 5　(1)D　(2)B

应用演练

1. B　2. D　3. $(1,2)$　4. $(1,3]$　5. 4

第 10 讲　函数的图像

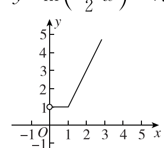
【课前双基巩固】

知识聚焦

2. (1)$f(x)-k$　(2)$-f(x)$　$f(-x)$　$-f(-x)$　$\log_a x$　(4)$|f(x)|$　$f(|x|)$

对点演练

1. $y=0$　2. $x=0$　3. $y=x$　4. ③
5. $y=(2x+3)^2$
6. $y=\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$　7. $-\log_2(x-1)$
8.



【课堂考点探究】

例 1　略　变式题　略　例 2　(1)A　(2)C　例 3　B

应用演练

1. A　2. D　3. C　4. A

例 4　C　例 5　C
例 6　C　例 7　$(0,1)\cup(1,\sqrt{2})$

应用演练

1. A　2. A　3. $[1,2)$　4. $(1,2]$

第 11 讲　函数与方程

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. (1)$f(x)=0$　(2)x 轴　零点　(3)$f(a)\cdot f(b)<0$　(a,b)　$f(c)=0$　c
2. $(x_1,0)$,$(x_2,0)$　$(x_1,0)$　2　1　0

对点演练

1. 1　2. 0　3. 0,1　4. $(-\infty,4)$
5. 0　6. 0,3　7. $(-8,1]$　8. $(0,4)$

【课堂考点探究】

例 1　(1)C　(2)99　变式题　B

例 2 (1)B (2)C 变式题 (1)C (2)B
例 3 (1)A (2)C
变式题 (1)AC (2)$[-3,-1)\cup[3,+\infty)$

增分微课(一) 多维度探究数形结合思想在函数中的应用

例 1 (1)C (2)D 变式题 (1)D (2)A
例 2 (1)B (2)4
变式题 (1)$\{-1\}$
(2)$\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right)$
例 3 (1)A (2)$(-\infty,-3]$
变式题 (1)A (2)$(-\infty,-2)$
题组训练
1. D 2. D 3. B 4. D 5. A 6. B
7. $-\frac{14}{3}<m<-2$ 8. $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

第 12 讲 函数模型及其应用

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. 递增 递增 递增
对点演练
1. $y_3>y_1>y_2$ 2. $[10,30]$ 3. $S=\frac{800}{x}+\frac{x}{8}$
4. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 5. $[0,26]$ 6. 8 ℃
7. e^6-1 8. $s=\begin{cases}60t(0\leqslant t\leqslant 2.5),\\150(2.5<t\leqslant 3.5),\\325-50t(3.5<t\leqslant 6.5)\end{cases}$
【课堂考点探究】
例 1 A 变式题 A
例 2 (1)$y=-3x^2+940x+20\ 000(1\leqslant x\leqslant 110$ 且 x 为整数)
(2)存放 50 天后出售
(3)将这批香菇存放 100 天后出售可获得最大利润,最大利润为 30 000 元
变式题 (1)$80-x$ $x-10$ $2\times20\times(80-x)$ $2\times20\times(x-10)$
(2)$y=-20x+8300,10\leqslant x\leqslant 80$,当甲仓库运往 A 果园 80 吨有机化肥时,总运费最少,最少的总运费是 6700 元
例 3 (1)$a=-1,b=1$ (2)285 个单位
变式题 26.56 13
例 4 (1)$y=\begin{cases}3x,0\leqslant x\leqslant 15,\\4.5x-22.5,15<x\leqslant 25,\\6x-60,x>25\end{cases}$ (2)20 吨
变式题 (1)$a=1000$ (2)60 吨

第 13 讲 变化率与导数、导数的运算

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. (1)平均 斜率 平均 (2)$x=x_0$ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 斜率 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 瞬时 速度
2. nx^{n-1} $\cos x$ $-\sin x$ $a^x\ln a$ $\frac{1}{x\ln a}$ $f'(x)\pm g'(x)$ $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ $\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$ $y'_u\cdot u'_x$
对点演练
1. 24 2. 1321 元/吨 3. $\frac{1}{x+1}$ 4. 2 5. 3 4
6. $2\cos 2x$ 7. -8 8. $3(2x+3)^2$ $6(2x+3)^2$
【课堂考点探究】
例 1 (1)D (2)$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{x}$
变式题 (1)D (2)-1
例 2 A 变式题 $3x-y-1=0$
例 3 2 变式题 B
例 4 (1)D (2)D 变式题 A

第 14 讲 导数与函数的单调性

【课前双基巩固】
知识聚焦
递增 递减 $\geqslant0$ $\leqslant0$ 充分
对点演练
1. $(0,+\infty)$ 2. $>$ 3. $(-\infty,0)$
4. $(-\infty,2]$ 5. $[1,+\infty)$ 6. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$
7. $(-\infty,1)$ 8. $a>0$ $a=0$ $a<0$
【课堂考点探究】
例 1 当 $a\geqslant0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增;当$-\frac{1}{2}<a<0$时,$f(x)$在$(\ln(-2a),0)$上单调递减,在$(-\infty,\ln(-2a))$,$(0,+\infty)$上单调递增;当$a=-\frac{1}{2}$时,$f(x)$在 **R** 上单调递增;当$a<-\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(0,\ln(-2a))$上单调递减,在$(-\infty,0)$,$(\ln(-2a),+\infty)$上单调递增.
变式题 (1)$y=(e-1)x+1$ (2)略

例 2 解:(1)当 $a=2$ 时,函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\left(2+\frac{1}{2}\right)x+\ln x=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\ln x$,
则 $f'(x)=x-\frac{5}{2}+\frac{1}{x}$,则 $f'(1)=1-\frac{5}{2}+1=-\frac{1}{2}$,$f(1)=\frac{1}{2}\times1^2-\frac{5}{2}\times1+\ln 1=-2$,
曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处切线的方程为 $y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)$,即 $x+2y+3=0$.
(2)由函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+\ln x$,
得 $f'(x)=x-\left(a+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{x}=\frac{(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x}(x>0)$,
令 $f'(x)=0$,得 $x=a$ 或 $x=\frac{1}{a}$,
当 $0<a<1$ 时,有 $a<\frac{1}{a}$,令 $f'(x)>0$,得 $x<a$ 或 $x>\frac{1}{a}$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为$(0,a)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(a,\frac{1}{a}\right)$.
当 $a>1$ 时,有 $\frac{1}{a}<a$,令 $f'(x)>0$,得 $x>a$ 或 $x<\frac{1}{a}$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(a,+\infty)$,单调递减区间为$\left(\frac{1}{a},a\right)$.
变式题 (1)A (2)C
例 3 解:(1)由题可得 $f'(x)=-2e^x+(3-2x)e^x-a=(1-2x)e^x-a$,因为函数 $f(x)$ 在$[-2,1]$上是单调函数,所以当 $x\in[-2,1]$时,$f'(x)\leqslant0$ 恒成立或 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立,即当 $x\in[-2,1]$时,$(1-2x)e^x-a\leqslant0$ 恒成立或 $(1-2x)e^x-a\geqslant0$ 恒成立,所以当 $x\in[-2,1]$时,$a\geqslant[(1-2x)e^x]_{max}$或$a\leqslant[(1-2x)e^x]_{min}$.
令 $g(x)=(1-2x)e^x$,$-2\leqslant x\leqslant1$,则 $g'(x)=(-1-2x)e^x$,令 $g'(x)>0$,可得 $-2\leqslant x<-\frac{1}{2}$,令 $g'(x)<0$,可得 $-\frac{1}{2}<x\leqslant1$,所以函数 $g(x)$ 在$\left[-2,-\frac{1}{2}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{2},1\right]$上单调递减,所以 $g(x)_{max}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{e}}$.又 $g(-2)=\frac{5}{e^2}$,$g(1)=-e$,所以 $g(-2)>g(1)$,所以 $g(x)_{min}=g(1)=-e$,所以 $a\geqslant\frac{2}{\sqrt{e}}$ 或 $a\leqslant-e$,
故实数 a 的取值范围为$(-\infty,-e]\cup\left[\frac{2}{\sqrt{e}},+\infty\right)$.
变式题 (1)$\left[\frac{17}{8},+\infty\right)$ (2)$\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$
例 4 (1)C (2)A 变式题 (1)D (2)A

第 15 讲 导数与函数的极值、最值

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. (1)$f'(x)<0$ $f'(x)>0$
(2)$f'(x)>0$ $f'(x)<0$
2. (2)$f(a)$ $f(b)$ $f(a)$ $f(b)$
对点演练
1. -3 2. 16 3. $\ln x<x<e^x$
4. $\frac{2}{27}a^3$ 5. -7 6. 0 不存在
7. 1,4 不存在 8. $[1,+\infty)$ $[-1,+\infty)$
【课堂考点探究】
例 1 C 例 2 D 例 3 B
应用演练
1. A 2. B 3. B 4. A 5. 1
例 4 解:(1)易知函数 $y=f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$,
当 $a=-1$ 时,$f(x)=\ln x-x$,$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=1$.当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$.所以,函数 $y=f(x)$ 在区间$(0,1)$上单调递增,在区间$(1,+\infty)$上单调递减.此时,函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,亦为最大值.
因此,$f(x)_{max}=f(1)=-1$.
(2)因为 $f(x)=ax+\ln x$,所以 $f'(x)=a+\frac{1}{x}=\frac{ax+1}{x}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=-\frac{1}{a}>0$.
①当 $0<-\frac{1}{a}<e$,即 $a<-\frac{1}{e}$ 时,
若 $0<x<-\frac{1}{a}$,则 $f'(x)>0$;若 $-\frac{1}{a}<x\leqslant e$,则 $f'(x)<0$.此时,函数 $y=f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{a}$ 处取得极大值,亦为最大值,即 $f(x)_{max}=-1+\ln\left(-\frac{1}{a}\right)=-1-\ln(-a)=-3$,
解得 $a=-e^2$,符合题意.
②当 $-\frac{1}{a}\geqslant e$,即 $-\frac{1}{e}\leqslant a<0$ 时,对任意的 $x\in(0,e]$,$f'(x)\geqslant0$,此时,函数 $y=f(x)$ 在$(0,e]$上单调递增,则 $f(x)_{max}=f(e)=ae+1=-3$,得 $a=-\frac{4}{e}$,不符合题意.综上所述,$a=-e^2$.
变式题 (1)2 (2)$(-\infty,4]$
例 5 解:(1)由 $2AB+2\pi x=100$ 得 $AB=50-\pi x$,由 $AB>0$ 得,$x\in\left(0,\frac{50}{\pi}\right)$.
所以防蚊液的体积 $y=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi x^3+\pi x^2(50-\pi x)=\left(\frac{2}{3}\pi-\pi^2\right)x^3+50\pi x^2$,$x\in\left(0,\frac{50}{\pi}\right)$.
(2)求导得 $y'=2\pi x^2-3\pi^2x^2+100\pi x$,
令 $y'>0$ 得 $0<x<\frac{100}{3\pi-2}$;令 $y'<0$ 得 $\frac{100}{3\pi-2}<x<\frac{50}{\pi}$,所以 y 在$\left(0,\frac{100}{3\pi-2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{100}{3\pi-2},\frac{50}{\pi}\right)$上单调递减,
所以当 $x=\frac{100}{3\pi-2}$ 时,y 有最大值,此时 $AD=2x=\frac{200}{3\pi-2}$,$AB=\frac{50\pi-100}{3\pi-2}$.
故当 AD 为 $\frac{200}{3\pi-2}$ mm,AB 为 $\frac{50\pi-100}{3\pi-2}$ mm 时,防蚊液的体积有最大值.
变式题 C

破解难点优质课(一) 导数与不等式

例 1 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=x\ln x+x^2+2(x\in(0,+\infty))$.
$\therefore f'(x)=\ln x+2x+1$,$\therefore f'(1)=3$,
又$\because f(1)=3$,$\therefore$所求切线方程为 $y-3=3(x-1)$,即 $3x-y=0$.
(2)证明:$\because f'(x)=a\ln x+2x+a$,
$\therefore$要证对任意 $x\in[1,+\infty)$,$f'(x)<x^2+(a+2)x+1$ 恒成立,即证 $a\ln x+2x+a<x^2+(a+2)x+1$ 恒成立,即证 $a\ln x-x^2-ax+a-1<0$ 恒成立.设 $h(x)=a\ln x-x^2-ax+a-1(x\geqslant1)$,则 $h'(x)=\frac{a}{x}-2x-a(x\geqslant1)$.
当 $a>0$ 时,易知 $h'(x)$ 在$[1,+\infty)$上为减函数,$\therefore h'(x)\leqslant h'(1)=-2<0$,
$\therefore h(x)$在$[1,+\infty)$上为减函数,
$\therefore h(x)\leqslant h(1)=-2<0$,
$\therefore a\ln x-x^2-ax+a-1<0$ 恒成立.
即对任意 $x\in[1,+\infty)$,$f'(x)<x^2+(a+2)x+1$ 恒成立.
变式题 解:(1)由题意知,$f'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{1}{x^2}(x>0)$,
由 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点,得 $f'(1)=1-a-1=0$,解得 $a=0$,
则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,令 $f'(x)<0$,得 $x\in(0,1)$,所以 $f(x)$ 的单调递减区间为$(0,1)$.
(2)证明:在(1)的条件下,要证 $f(x)\leqslant xe^x-x+\frac{1}{x}-1$,即证 $xe^x-\ln x-x-1\geqslant0$.
令 $g(x)=xe^x-\ln x-x-1$,
则 $g'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1$,
令 $h(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1$,
则 $h'(x)=(x+2)e^x+\frac{1}{x^2}>0(x>0)$,
故函数 $h(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,
又 $h\left(\frac{1}{2}\right)<0$,$h(e)>0$,所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},e\right)$,使得 $h(x_0)=0$,即 $(x_0+1)e^{x_0}-\frac{1}{x_0}-1=0$,
即 $(x_0+1)\left(e^{x_0}-\frac{1}{x_0}\right)=0$,即 $x_0e^{x_0}=1$,则 $g(x)$ 在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增,故 $g(x)_{min}=g(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln\frac{1}{e^{x_0}}-x_0-1=0$,即 $g(x)\geqslant0$.故 $f(x)\leqslant xe^x-x+\frac{1}{x}-1$.

例2 解:(1)由 $x-1>0$,得 $x>1$,
所以 $f(x)$的定义域为$(1,+\infty)$.
$f'(x)=\frac{a}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)-2}{(x-1)^2}=\frac{ax-(a+2)}{(x-1)^2}$,由 $f'(x)>0$ 得 $x>1+\frac{2}{a}$,由 $f'(x)<0$ 得 $1<x<1+\frac{2}{a}$,所以 $f(x)$的单调递减区间为$\left(1,1+\frac{2}{a}\right)$,单调递增区间为$\left(1+\frac{2}{a},+\infty\right)$.
(2)证明:令 $g(x)=\ln x-x+1$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$,所以当$0<x<1$时,$g'(x)>0$;当 $x>1$时,$g'(x)<0$.所以 $g(x)\leqslant g(1)=0$,所以 $\ln x\leqslant x-1$.所以当 $x>2$ 时,有 $\ln(x-1)<x-2$成立,又因为$a>0$,所以要证 $f(x)<e^x+(a-1)x-2a$,
只需证 $a(x-2)+\frac{2}{x-1}<e^x+(a-1)x-2a$,
即 $e^x-x-\frac{2}{x-1}>0$ 对于任意的 $x>2$ 恒成立.
令 $h(x)=e^x-x-\frac{2}{x-1}$,$x>2$,则 $h'(x)=e^x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$.因为 $x>2$,所以 $h'(x)>0$ 恒成立,所以 $h(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增,所以 $h(x)>h(2)=e^2-4>0$,所以当 $x>2$ 时,$f(x)<e^x+(a-1)x-2a$.

例3 解:(1)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,$f'(x)=e^{x-2}-a$.
当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$,则函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增;
当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$ 得 $x=2+\ln a$,
当 $x<2+\ln a$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>2+\ln a$ 时,$f'(x)>0$,
∴$f(x)$在$(-\infty,2+\ln a)$上单调递减,在$(2+\ln a,+\infty)$上单调递增.
综上所述,当 $a\leqslant0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增;当 $a>0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,2+\ln a)$上单调递减,在$(2+\ln a,+\infty)$上单调递增.
(2)证明:要证 $f(x)>\ln x$,即证 $e^{x-2}-ax>\ln x$,即证$\frac{e^{x-2}}{x}-a>\frac{\ln x}{x}(x>0)$,设 $g(x)=\frac{e^{x-2}}{x}-a(x>0)$,则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^{x-2}}{x^2}$,当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$g'(x)>0$,∴$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,∴$x=1$ 是 $g(x)$的极小值点,也是最小值点,∴$g(x)_{\min}=g(1)=e^{-1}-a=\frac{1}{e}-a$.令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$,当 $0<x<e$ 时,$h'(x)>0$,当 $x>e$ 时,$h'(x)<0$,∴$h(x)$在$(0,e)$上单调递增,在$(e,+\infty)$上单调递减,∴$x=e$ 是 $h(x)$的极大值点,也是最大值点,∴$h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$.∴当 $a\leqslant0$ 时,$g(x)\geqslant\frac{1}{e}-a\geqslant\frac{1}{e}\geqslant h(x)$,∵前后取等号的条件不一致,∴$\frac{e^{x-2}}{x}-a>\frac{\ln x}{x}$.
综上所述,当 $a\leqslant0$ 时,$f(x)>\ln x$.

例4 解:(1)由题意,函数 $f(x)=\ln\frac{1}{2x}-ax^2+x=-\ln 2x-ax^2+x$,
则 $f'(x)=-\frac{1}{x}-2ax+1=\frac{-2ax^2+x-1}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.
(ⅰ)若 $a=0$,则 $f'(x)=\frac{x-1}{x}$,
当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增.
所以当 $x=1$ 时,函数 $f(x)$取得极小值,即 $x=1$ 是 $f(x)$的一个极小值点.
(ⅱ)若 $a>0$,当 $a\geqslant\frac{1}{8}$时,$\Delta=1-8a\leqslant0$,
此时 $f'(x)\leqslant0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数,所以 $f(x)$无极值点;
当 $0<a<\frac{1}{8}$时,$\Delta=1-8a>0$,令 $f'(x)=0$,
解得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a}$,$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a}$,
当 $x\in(0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$时,$f'(x)<0$,当 $x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)>0$,
∴$f(x)$在 x_1 处取得极小值,在 x_2 处取得极大值,所以 $f(x)$有两个极值点.
综上可知,当 $a=0$ 时,$f(x)$仅有一个极值点;
当 $a\geqslant\frac{1}{8}$时,$f(x)$无极值点;
当 $0<a<\frac{1}{8}$时,$f(x)$有两个极值点.
(2)证明:由(1)知,当且仅当 $a\in\left(0,\frac{1}{8}\right)$时,$f(x)$有极小值点 x_1 和极大值点 x_2,且 x_1,x_2 是方程 $2ax^2-x+1=0$ 的两根,∴$x_1+x_2=\frac{1}{2a}$,$x_1x_2=\frac{1}{2a}$,
则 $f(x_1)+f(x_2)=\ln\frac{1}{2x_1}-ax_1^2+x_1+\ln\frac{1}{2x_2}-ax_2^2+x_2$
$=-(\ln 2x_1+\ln 2x_2)-a(x_1^2+x_2^2)+(x_1+x_2)$
$=-\ln\frac{2}{a}-a\left(\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{2a}=\ln\frac{a}{2}-\frac{1}{4a}+1+\frac{1}{2a}=\ln a+\frac{1}{4a}+1-\ln 2$.
设 $g(a)=\ln a+\frac{1}{4a}+1-\ln 2$,$a\in\left(0,\frac{1}{8}\right)$,
则 $g'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{4a^2}=\frac{4a-1}{4a^2}<0$,
当 $a\in\left(0,\frac{1}{8}\right)$时,$g(a)$是减函数,
∴$g(a)>g\left(\frac{1}{8}\right)$,
即 $g(a)>\ln\frac{1}{8}+3-\ln 2=3-4\ln 2$,
∴$f(x_1)+f(x_2)>3-4\ln 2$.

变式题 证明:(1)当 $m=2$ 时,$f(x)=x-\frac{1}{2}\sin x-\ln x+1$,
则 $f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{x}$.
当 $x\in(0,\pi)$时,$f'(x)$为增函数,且 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{\pi}=\frac{3}{4}-\frac{3}{\pi}<0$,$f'(\pi)=\frac{3}{2}-\frac{1}{\pi}>0$,∴$f'(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点;
当 $x\in[\pi,+\infty)$时,$f'(x)=1-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{x}\geqslant1-\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}>0$,
∴$f'(x)$在$[\pi,+\infty)$上没有零点.
综上知,$f'(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一零点.
(2)不妨设 $0<x_1<x_2$,由 $f(x_1)=f(x_2)$得
$x_1-\frac{1}{2}\sin x_1-\frac{m}{2}\ln x_1+1=x_2-\frac{1}{2}\sin x_2-\frac{m}{2}\ln x_2+1$,
∴$\frac{m}{2}(\ln x_2-\ln x_1)=x_2-x_1-\frac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1)$.
设 $g(x)=x-\sin x(x>0)$,
则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant0$,
故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数,
∴$x_2-\sin x_2>x_1-\sin x_1$,
从而 $x_2-x_1>\sin x_2-\sin x_1$,
∴$\frac{m}{2}(\ln x_2-\ln x_1)=x_2-x_1-\frac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1)>\frac{1}{2}(x_2-x_1)$,∴$m>\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$.
下面证明:$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$.
令 $t=\frac{x_2}{x_1}$,则 $t>1$,即证明$\frac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$,只需证明 $\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}<0$.(*)
设 $h(t)=\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}(t>1)$,
则 $h'(t)=-\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$,
∴$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减.
当 $t>1$ 时,$h(t)<h(1)=0$,从而(*)得证,
即$\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$.
∴$m>\sqrt{x_1x_2}$,即 $x_1x_2<m^2$.

例5 解:(1)由 $f(x)=x(\ln x+a)+b$ 得 $f'(x)=\ln x+a+1$,
由切线方程可知 $f(1)=2-1=1$,
$f'(1)=a+1=2$,又 $f(1)=a+b$,
∴$a=1$,$b=0$.
(2)由(1)知 $f(x)=x(\ln x+1)$,
则当 $x\in(1,+\infty)$时,$f(x)\geqslant m(x-1)$恒成立等价于当 $x\in(1,+\infty)$时,$m\leqslant\frac{x(\ln x+1)}{x-1}$恒成立.
令 $g(x)=\frac{x(\ln x+1)}{x-1}$,$x>1$,
则 $g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$.令 $h(x)=x-\ln x-2$,
则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,
当 $x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)>0$,则 $h(x)$单调递增.
∵$h(3)=1-\ln 3<0$,$h(4)=2-2\ln 2>0$,
∴存在 $x_0\in(3,4)$,使得 $h(x_0)=0$.
当 $x\in(1,x_0)$时,$g'(x)<0$,当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$g'(x)>0$,
∴$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0(\ln x_0+1)}{x_0-1}$.
又 $h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$,
∴$\ln x_0=x_0-2$,
∴$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0(x_0-2+1)}{x_0-1}=x_0\in(3,4)$,
∴$m\leqslant g(x)_{\min}=x_0$,即正整数 m 的最大值为 3.

变式题 解:(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,
$f'(x)=a-\frac{2a+1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{ax^2-(2a+1)x+2}{x^2}=\frac{(ax-1)(x-2)}{x^2}$.
当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,可得 $x=\frac{1}{a}>0$ 或 $x=2$.
①当$\frac{1}{a}=2$,即 $a=\frac{1}{2}$ 时,对任意的 $x>0$,$f'(x)\geqslant0$,
此时,函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间.
②当 $0<\frac{1}{a}<2$,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,
令 $f'(x)>0$,得 $0<x<\frac{1}{a}$或 $x>2$;
令 $f'(x)<0$,得$\frac{1}{a}<x<2$.
此时,函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$和$(2,+\infty)$,单调递减区间为$\left(\frac{1}{a},2\right)$.
③当$\frac{1}{a}>2$,即 $0<a<\frac{1}{2}$时,
令 $f'(x)>0$,得 $0<x<2$ 或 $x>\frac{1}{a}$;
令 $f'(x)<0$,得 $2<x<\frac{1}{a}$.
此时,函数 $f(x)$的单调递增区间为$(0,2)$和$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(2,\frac{1}{a}\right)$.
(2)由 $f(x)\geqslant g(x)$,可得 $ax-\ln x\geqslant0$,即 $a\geqslant\frac{\ln x}{x}$,其中 $x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$.
构造函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$,
则 $a\geqslant h(x)_{\min}$,$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,令 $h'(x)=0$,得 $x=e\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$.当$\frac{1}{e}\leqslant x<e$ 时,$h'(x)>0$;当 $e<x\leqslant e^2$ 时,$h'(x)<0$.
∴函数 $h(x)$在 $x=\frac{1}{e}$或 $x=e^2$ 处取得最小值.
∵$h\left(\frac{1}{e}\right)=-e$,$h(e^2)=\frac{2}{e^2}$,
∴$h\left(\frac{1}{e}\right)<h(e)$,
∴$h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-e$,∴$a\geqslant-e$.
因此,实数 a 的取值范围是$[-e,+\infty)$.

例6 解:(1)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.
当 $a=-2$ 时,$f(x)=x^2-2\ln x$,$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$,
当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

由上表可知,函数 $f(x)$的单调递减区间是$(0,1)$,单调递增区间是$(1,+\infty)$,
极小值是 $f(1)=1$,无极大值.
(2)由 $g(x)=x^2+a\ln x+\frac{2}{x}$,得 $g'(x)=2x+\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}$,又函数 $g(x)=x^2+a\ln x+\frac{2}{x}$ 在$[1,2]$上是减函数,则 $g'(x)\leqslant0$ 在$[1,2]$上恒成立,
即不等式 $2x-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}\leqslant0$ 在$[1,2]$上恒成立,
即 $a\leqslant\frac{2}{x}-2x^2$ 在$[1,2]$上恒成立.
又 $\varphi(x)=\frac{2}{x}-2x^2$ 在$[1,2]$上为减函数,
所以 $\varphi(x)$的最小值为 $\varphi(2)=-7$,
所以 $a\leqslant-7$.

变式题 解:(1)因为 $f'(x)=a-2\cos x+\cos x-x\sin x=a-\cos x-x\sin x$,
当 $x=\pi$ 时,$f(\pi)=a\pi-\pi$,$f'(\pi)=a+1$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f'(\pi))$ 处的切线方程为 $y-(a\pi-\pi)=(a+1)(x-\pi)$,
令 $x=0$ 得 $y=-2\pi$.
所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\pi,f'(\pi))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -2π.

(2)因为 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数,
所以 $f'(x)\geqslant0$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立,
则 $a-\cos x-x\sin x\geqslant0$,即 $a\geqslant\cos x+x\sin x$.
令 $g(x)=\cos x+x\sin x,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,
则 $g'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x\geqslant0$,
所以 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,
所以 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$,
故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$.

例 7 解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,
当 $a=-1$ 时,$f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x}$,
令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=-1$(舍去),
当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,
当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,
则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点,
所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=\frac{1}{2}$.
(2)证明:函数 $f(x)$ 的图像在函数 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图像的下方,
即 $f(x)<g(x)$ 恒成立,
设 $F(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x-\frac{2}{3}x^3$,
则 $F'(x)=x+\frac{1}{x}-2x^2=\frac{-2x^3+x^2+1}{x}=\frac{-(x-1)(2x^2+x+1)}{x}$,
当 $x>1$ 时,$F'(x)<0$,
故 $F(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减,
又 $F(1)=-\frac{1}{6}<0$,
∴在区间 $[1,+\infty)$ 上,$F(x)<0$ 恒成立,
即 $f(x)<g(x)$ 恒成立.
因此,当 $a=1$ 时,在区间 $[1,+\infty)$ 上,函数 $f(x)$ 的图像在函数 $g(x)$ 图像的下方.

变式题 解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=x-2\ln x-1(x>0)$,
∴$f'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$.
由 $f'(x)>0$,得 $x>2$;
由 $f'(x)<0$,得 $0<x<2$.
∴函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,2)$,单调递增区间为 $(2,+\infty)$.
(2)∵$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且当 $x\to0$ 时,$f(x)\to+\infty$,
∴"函数 $y=f(x),x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的图像与 x 轴无交点"等价于"对任意的 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$f(x)>0$ 恒成立",
即当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时,$a>2-\frac{2\ln x}{x-1}$ 恒成立.
令 $l(x)=2-\frac{2\ln x}{x-1},x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,
则 $l'(x)=\frac{2\ln x+\frac{2}{x}-2}{(x-1)^2}$.
令 $m(x)=2\ln x+\frac{2}{x}-2,x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,
则 $m'(x)=\frac{-2(1-x)}{x^2}<0$,
∴函数 $m(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上为减函数,
∴$m(x)>m\left(\frac{1}{2}\right)=2-2\ln 2>0$,
∴$l'(x)>0$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上恒成立,
∴$l(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上为增函数,
∴$l(x)<l\left(\frac{1}{2}\right)=2-4\ln 2$,∴$a\geqslant2-4\ln 2$.
故实数 a 的最小值为 $2-4\ln 2$.

破解难点优质课(二) 导数与方程

例 1 解:(1)证明:令 $g(x)=\ln x-x+1(x>0)$,
则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,
当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 单调递增;
当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 单调递减.
∴当 $x=1$ 时,函数 $g(x)$ 取得极大值即最大值,
∴$g(x)\leqslant g(1)=0$,即 $\ln x\leqslant x-1$.
(2)根据题意,$f'(x)=\frac{1}{x}-2x+a=\frac{-2x^2+ax+1}{x},x>0$.
令 $-2x^2+ax+1=0$,解得 $x=\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}$(负值舍去).
设 $x_0=\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}$,
在 $(0,x_0)$ 上,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增;
在 $(x_0,+\infty)$ 上,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减,∴$f(x)_{\max}=f(x_0)$.
当 $a=1$ 时,$x_0=1$,$f(x)_{\max}=f(1)=0$,
此时函数 $f(x)$ 只有一个零点 1.
当 $a>1$ 时,$x_0=\frac{a+\sqrt{a^2+8}}{4}>1$,$f(1)=a-1>0$,
$f\left(\frac{1}{2a}\right)=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2}<\frac{1}{2a}-1-\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-\frac{1}{4}<0$,
$f(2a)=\ln 2a-2a^2<2a-1-2a^2=-2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}<0$.
∴函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2a},1\right)$ 和区间 $(1,2a)$ 上各有一个零点.
综上可得,当 $a=1$ 时,函数 $f(x)$ 只有一个零点,当 $a>1$ 时,函数 $f(x)$ 有两个零点.

变式题 解:(1)若 $a=0$,则 $f(x)=2x^2+1+\ln x$,
$f'(x)=4x+\frac{1}{x}$,
故 $f'(1)=5$,即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 5,
又 $f(1)=3$,所以所求切线方程为 $y-3=5(x-1)$,即 $5x-y-2=0$.
(2)证明:由 $f(x)=2x^2-ax+1+\ln x$ 得 $f'(x)=\frac{1}{x}+4x-a=\frac{4x^2-ax+1}{x}$,
设 $h(x)=4x^2-ax+1$,$\Delta=a^2-16$,
当 $3<a\leqslant4$ 时,$\Delta\leqslant0$,则 $h(x)\geqslant0$,
即 $f'(x)\geqslant0$,
故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
又 $f(1)=3-a<0$,$f(\mathrm{e})=2\mathrm{e}^2-a\mathrm{e}+2=\mathrm{e}(2\mathrm{e}-a)+2>0$,
所以 $f(x)$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 时有唯一零点.

例 2 解:(1)$f(x)=\mathrm{e}^x(ax+1)$,
则 $f'(x)=\mathrm{e}^x(ax+1)+\mathrm{e}^x\cdot a=\mathrm{e}^x(ax+1+a)$,
由题知 $\begin{cases}f'(1)=\mathrm{e}\cdot(2a+1)=b,\\ f(1)=\mathrm{e}\cdot(a+1)=b-\mathrm{e},\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=3\mathrm{e},\end{cases}$ ∴$a=1,b=3\mathrm{e}$.
(2)方法一:$g(x)=f(x)-3\mathrm{e}^x-m=\mathrm{e}^x(x-2)-m$,
函数 $g(x)=\mathrm{e}^x(x-2)-m$ 有两个零点,相当于函数 $u(x)=\mathrm{e}^x\cdot(x-2)$ 的图像与直线 $y=m$ 有两个交点.$u'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(x-2)+\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(x-1)$,
当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$u'(x)<0$,
∴$u(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,
当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$u'(x)>0$,
∴$u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,
∴当 $x=1$ 时,$u(x)$ 取得极小值 $u(1)=-\mathrm{e}$.
又当 $x\to+\infty$ 时,$u(x)\to+\infty$,当 $x<2$ 时,$u(x)<0$,∴$-\mathrm{e}<m<0$.
方法二:$g(x)=f(x)-3\mathrm{e}^x-m=\mathrm{e}^x(x-2)-m$,
$g'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(x-2)+\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(x-1)$,
当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$g'(x)<0$,
∴$g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,
当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,
∴$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,
∴$x=1$ 时,$g(x)$ 取得极小值 $g(1)=-\mathrm{e}-m$,
又当 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to-m$,$x\to+\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$,∴$\begin{cases}g(1)<0,\\ -m>0,\end{cases}$ ∴$-\mathrm{e}<m<0$.

变式题 解:(1)因为 $f(x)=x^3+ax$,
所以 $f'(x)=3x^2+a$.
①当 $a\geqslant0$ 时,因为 $f'(x)=3x^2+a\geqslant0$,
所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.
②当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$,解得 $x<-\frac{\sqrt{-3a}}{3}$ 或 $x>\frac{\sqrt{-3a}}{3}$,
令 $f'(x)<0$,解得 $-\frac{\sqrt{-3a}}{3}<x<\frac{\sqrt{-3a}}{3}$,
则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{-3a}}{3}\right)$,$\left(\frac{\sqrt{-3a}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(-\frac{\sqrt{-3a}}{3},\frac{\sqrt{-3a}}{3}\right)$ 上单调递减.
(2)由题知 $g(x)=x^3+ax-x\ln x$,
$g(x)=f(x)-x\ln x$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上有零点,等价于关于 x 的方程 $g(x)=0$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上有解,
即 $x^3+ax-x\ln x=0$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上有解.
因为 $x^3+ax-x\ln x=0$,所以 $a=-x^2+\ln x$.
令 $h(x)=-x^2+\ln x$,则 $h'(x)=-2x+\frac{1}{x}=-\frac{2x^2-1}{x}$.
令 $h'(x)<0$,得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant2$;
令 $h'(x)>0$,得 $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,
则 $h(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},2\right]$ 上单调递减,在 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递增.
因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ln\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-\ln 2$,$h(2)=-2^2+\ln 2=-4+\ln 2$,
所以 $h\left(\frac{1}{2}\right)-h(2)=\frac{15}{4}-2\ln 2>\frac{15}{4}-2>0$,
则 $h(x)_{\min}=h(2)=-4+\ln 2$,$h(x)_{\max}=h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$,
故实数 a 的取值范围为 $\left[-4+\ln 2,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

例 3 解:(1)由题意,函数 $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$,定义域为 $(0,+\infty)$,则 $f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$,
所以 $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=2\mathrm{e}^4$,$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=-\mathrm{e}^2$,
所以函数 $f(x)$ 的图像在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ 处的切线方程为 $y+\mathrm{e}^2=2\mathrm{e}^4\left(x-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$,即 $y=2\mathrm{e}^4x-3\mathrm{e}^2$.
(2)当 $x>1$ 时,方程 $f(x)=a(x-1)+\frac{1}{x}$,即 $\ln x-a(x^2-x)=0$,
令 $h(x)=\ln x-a(x^2-x)$,有 $h(1)=0$,$h'(x)=\frac{-2ax^2+ax+1}{x}$,
令 $r(x)=-2ax^2+ax+1,x\in(1,+\infty)$,
因为 $a>0$,所以 $r(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.
①当 $r(1)=1-a\leqslant0$,即 $a\geqslant1$ 时,$r(x)<0$,即 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $h(x)<h(1)=0$,方程 $f(x)=a(x-1)+\frac{1}{x}$ 无实数根.
②当 $r(1)>0$,即 $0<a<1$ 时,存在 $x_0\in(1,+\infty)$,使得当 $x\in(1,x_0)$ 时,$r(x)>0$,$h(x)$ 单调递增;当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$r(x)<0$,$h(x)$ 单调递减.因此 $h(x)_{\max}=h(x_0)>h(1)=0$,
取 $x=1+\frac{1}{a}$,则 $h\left(1+\frac{1}{a}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)-a\left(1+\frac{1}{a}\right)^2+a\left(1+\frac{1}{a}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)-\left(1+\frac{1}{a}\right)$.
令 $t=1+\frac{1}{a}(t>2)$,则 $h(t)=\ln t-t$,
则 $h'(t)=\frac{1}{t}-1,t>2$,
所以 $h'(t)<0$,即 $h(t)$ 在 $t>2$ 时单调递减,
所以 $h(t)<h(2)=\ln 2-2<0$.
故存在 $x_1\in\left(x_0,1+\frac{1}{a}\right)$,$h(x_1)=0$.
综上,a 的取值范围为 $0<a<1$.

变式题 解:(1)由题意,$f'(x)=\frac{1}{x+a}-2x-1$,
∵当 $x=0$ 时,$f(x)$ 取得极值,∴$f'(0)=0$,

故 $\frac{1}{0+a}-2\times0-1=0$，解得 $a=1$.
经检验 $a=1$ 符合题意.
∵ $f(1)=\ln2-2$，$f'(1)=-\frac{5}{2}$，
∴切线方程为 $5x+2y-1-2\ln2=0$.
(2)由(1)知 $f(x)=\ln(x+1)-x^2-x$，由 $f(x)=-\frac{5}{2}x+b$，得 $\ln(x+1)-x^2+\frac{3}{2}x-b=0$.
令 $\varphi(x)=\ln(x+1)-x^2+\frac{3}{2}x-b$，
则 $f(x)=-\frac{5}{2}x+b$ 在$[0,2]$上恰有两个不同的实数根
等价于 $\varphi(x)$ 在$[0,2]$上恰有两个不同的零点.
$\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-2x+\frac{3}{2}=\frac{-(4x+5)(x-1)}{2(x+1)}$，
当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在$(0,1)$上单调递增；
当 $x\in(1,2)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在$(1,2)$上单调递减.
依题意有 $\begin{cases}\varphi(0)=-b\le0,\\ \varphi(1)=\ln(1+1)-1+\frac{3}{2}-b>0,\\ \varphi(2)=\ln(1+2)-4+3-b\le0,\end{cases}$
解得 $\ln3-1\le b<\ln2+\frac{1}{2}$.

第三单元　三角函数、解三角形

第16讲　任意角和弧度制及任意角的三角函数

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. (1)端点　(2)正角　负角　象限角
(3)$\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$
2. (1)半径长　(2)$|\alpha|r$　$\frac{1}{2}|\alpha|r^2$
3. (1)y　x　(2)余弦线　正弦线　正切线　x轴　原点　点$(1,0)$

对点演练
1. $\{\alpha|\alpha=k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$
2. (1)$-\frac{5\pi}{4}$　二　(2)15　3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{3\sqrt5-10}{5}$　5. $\frac{\pi}{4}$或$\frac{3}{4}\pi$
6. 1　7. $\frac{1}{2}$　$\pm\frac{\sqrt3}{2}$　8. $\frac{10}{9}\pi$　$\frac{5}{9}\pi$

【课堂考点探究】
例1　(1)B　(2)C
(3)$\left\{-\frac{5}{3}\pi,-\frac{2}{3}\pi,\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi\right\}$
变式题　(1)B
(2)$\left\{\alpha\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{5}{6}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$
例2　(1)D　(2)A　(3)$\frac{3\pi}{2}$
变式题　(1)A　(2)C
例3　B　例4　(1)C　(2)A　例5　$c>b>a$

第17讲　同角三角函数的基本关系式与诱导公式

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. (1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
(2)$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha,\alpha\ne k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$
2. $-\sin\alpha$　$-\sin\alpha$　$-\cos\alpha$　$-\cos\alpha$　$-\sin\alpha$　$\tan\alpha$　$-\tan\alpha$

对点演练
1. $-\frac{12}{13}$　2. $-\frac{23}{16}$　3. $\frac{\sqrt3}{3}$　4. $\frac{1}{4}$
5. $\pm\frac{24}{7}$　6. $-\frac{4}{5}$　7. $\frac{10}{3}$　8. $\{2,-2\}$

【课堂考点探究】
例1　(1)A　(2)B　变式题　(1)D　(2)0
例2　D　例3　(1)C　(2)A　例4　$-\frac{7}{5}$

第18讲　三角函数的图像与性质

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. (1)$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$　$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$
(2)$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$　$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$
2. $[-1,1]$　$[-1,1]$　$\mathbf{R}$　奇函数　偶函数　$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$　$[2k\pi-\pi,2k\pi]$　$(k\pi,0)$　$x=k\pi$

对点演练
1. 3　6π　2. 减　增
3. $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$
4. $\left[-\frac{3}{2},3\right]$　5. $[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$
6. 1　7. $(-1,0)\cup(0,1)$
8. $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

【课堂考点探究】
例1　(1)D　(2)C
变式题　$\left\{x\,\middle|\,2k\pi<x\le2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$
例2　(1)0　(2)$\left[-\frac{1}{2}-\sqrt2,1\right]$　(3)$\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$
变式题　$-\frac{3\sqrt3}{2}$
例3　(1)C　(2)A　例4　(1)B　(2)2
例5　(1)A　(2)C
应用演练
1. D　2. B　3. C　4. $\frac{2}{3}$

第19讲　两角和与差的正弦、余弦和正切公式

【课前双基巩固】
知识聚焦
(1)$\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
(2)$\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
(3)$\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

对点演练
1. $2+\sqrt3$　2. $\frac{1}{2}$　3. $-\frac{7\sqrt2}{10}$　4. $\frac{1}{3}$
5. $\frac{6}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$或$\frac{6}{5}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
6. $-\frac{4}{5}$　7. $\sqrt3$　8. $\frac{\sqrt2}{2}$

【课堂考点探究】
例1　(1)B　(2)C
变式题　(1)A　(2)B
例2　(1)A　(2)$-\frac{1}{2}$
变式题　(1)A　(2)4
例3　(1)C　(2)$-\frac{56}{65}$或$\frac{16}{65}$　(3)3
变式题　(1)D　(2)$\frac{63}{65}$

第20讲　二倍角公式与简单的三角恒等变换

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. (1)$2\sin\alpha\cos\alpha$　(2)$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$　$2\cos^2\alpha-1$　$1-2\sin^2\alpha$　(3)$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
2. (1)$2\sin^2\frac{\alpha}{2}$　$2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
(2)$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$
(3)$\frac{1-\cos2\alpha}{2}$　$\frac{1+\cos2\alpha}{2}$　$\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$
(4)$\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$　$\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
(5)$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$

对点演练
1. $-\sqrt2$　2. π　3. $\sin(\alpha+\gamma)$
4. $\frac{7}{25}$　5. $-\frac{7}{25}$
6. $\frac{3\pi}{4}$　7. $2k\pi-\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$　8. $-\frac{1}{2}$

【课堂考点探究】
例1　(1)B　(2)$2\sqrt2\cos\alpha$　变式题　$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$
例2　B　变式题　0　例3　C　变式题　A
例4　A　变式题　$\frac{\pi}{3}$
例5　(1)$\omega=2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt3}{2}$
(2)$\sin\alpha=\frac{3+4\sqrt3}{10}$

第21讲　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像及三角函数模型的简单应用

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. $\frac{2\pi}{\omega}$　$\frac{\omega}{2\pi}$　$\omega x+\varphi$　φ
2. $\frac{-\varphi}{\omega}$　$\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$　$\frac{\pi-\varphi}{\omega}$　$\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$　$\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$　0　$\frac{\pi}{2}$　π　$\frac{3\pi}{2}$　2π
3. $|\varphi|$　$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$

对点演练
1. 2，$\frac{1}{4\pi}$，$-\frac{\pi}{3}$　2. $y=2\sin x$　3. $\frac{11\pi}{6}$
4. π　$\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$
5. 右　$\frac{\pi}{15}$　6. 2　7. -1或-5　8. $-\frac{\pi}{6}$

【课堂考点探究】
例1　(1)C　(2)A　变式题　D
例2　(1)B　(2)C
变式题　(1)D　(2)$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$
例3　(1)D　(2)D
变式题　(1)$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$
(2)$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，$f(x)_{\min}=f(0)=-\frac{1}{2}$，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$
例4　(1)4 ℃
(2)当 $10<t<18$ 时，实验室需要降温
变式题　(1)$\sqrt7$
(2)$y=\sqrt3\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)(t>0)$，值域为$\left[-\sqrt3,\frac{\sqrt3}{2}\right)$

第22讲　正弦定理和余弦定理

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. $\frac{b}{\sin B}$　$\frac{c}{\sin C}$　$b^2+c^2-2bc\cos A$　$c^2+a^2-2ac\cos B$　$a^2+b^2-2ab\cos C$　$2R\sin B$　$2R\sin C$　$\sin A:\sin B:\sin C$　$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$　$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$
2. 一解　两解　一解　一解

对点演练
1. $\frac{2\pi}{3}$　2. $\frac{5}{9}$　$\frac{9}{2}$　3. 1或2　4. $\frac{\sqrt{15}}{4}$
5. $A=B$　$A>B$　6. 45°　7. $\frac{\sqrt3}{2}$　1　8. 直角

【课堂考点探究】
例1　(1)B　(2)A
变式题　(1)$A=60°$　(2)$\sin C=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$
例2　(1)A　(2)A　变式题　D
例3　(1)B　(2)$\frac{1}{2}$　例4　$\frac{15}{2}$
应用演练
1. $\frac{1}{2}$　2. $(2\sqrt3,4\sqrt3)$　3. $\frac{\sqrt3}{2}$
4. (1)$BP=2$　(2)$\cos\angle ACP=\frac{3}{5}$

第23讲　正弦定理和余弦定理的应用

【课前双基巩固】
知识聚焦
1. 水平视线　上方　下方
2. 正北方向　3. 水平角
4. 水平面　水平长度

对点演练
1. $50\sqrt2$ m　2. $\frac{\sqrt3}{2}a$　3. $\sqrt6-1$
4. $\frac{\sqrt{231}}{5}$　5. 南偏西80°　6. 200°
7. 北偏西15°　8. $\frac{\sqrt2}{2}a$

【课堂考点探究】
例1　可以在2个小时内徒步到达山顶
变式题　$80\sqrt5$
例2　2650 m　变式题　30
例3　1小时，舰艇航行的方位角为70°
变式题　$\frac{\sqrt{21}}{14}$