

小题必刷卷(一)

集合与常用逻辑用语

考查范围:第1讲~第3讲

◎ 题组一 刷真题

角度1 集合及其运算

- [2019·全国卷I] 已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$, $N=\{x|x^2-x-6<0\}$, 则 $M\cap N=$ ()
A. $\{x|-4<x<3\}$ B. $\{x|-4<x<-2\}$
C. $\{x|-2<x<2\}$ D. $\{x|2<x<3\}$
- [2019·北京卷] 已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$, $B=\{x|x>1\}$, 则 $A\cup B=$ ()
A. $(-1,1)$ B. $(1,2)$
C. $(-1,+\infty)$ D. $(1,+\infty)$
- [2017·全国卷III] 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$, $B=\{(x,y)|y=x\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ()
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0
- [2017·全国卷II] 设集合 $A=\{1,2,4\}$, $B=\{x|x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则 $B=$ ()
A. $\{1,-3\}$ B. $\{1,0\}$
C. $\{1,3\}$ D. $\{1,5\}$
- [2019·天津卷] 设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}|1\leq x<3\}$, 则 $(A\cap C)\cup B=$ ()
A. $\{2\}$ B. $\{2,3\}$
C. $\{-1,2,3\}$ D. $\{1,2,3,4\}$
- [2015·重庆卷] 已知集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3\}$, 则 ()
A. $A=B$ B. $A\cap B=\emptyset$
C. $A\subseteq B$ D. $B\subseteq A$

角度2 充要条件

- [2014·全国卷II] 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数存在. 若 $p:f'(x_0)=0$, $q:x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 则 ()
A. p 是 q 的充分必要条件
B. p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件
C. p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件
D. p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件
- [2018·浙江卷] 已知平面 α , 直线 m, n 满足 $m\not\subset\alpha$, $n\subset\alpha$, 则“ $m\parallel n$ ”是“ $m\parallel\alpha$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件
- [2019·天津卷] 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“ $x^2-5x<0$ ”是“ $|x-1|<1$ ”的 ()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
- [2018·北京卷] 设 a, b, c, d 是非零实数, 则“ $ad=bc$ ”是“ a, b, c, d 成等比数列”的 ()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

- [2019·北京卷] 设点 A, B, C 不共线, 则“ \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为锐角”是“ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{BC}|$ ”的 ()
A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

角度3 命题及其关系

- [2017·全国卷I] 设有下面四个命题

p_1 : 若复数 z 满足 $\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;

p_2 : 若复数 z 满足 $z^2\in\mathbf{R}$, 则 $z\in\mathbf{R}$;

p_3 : 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2\in\mathbf{R}$, 则 $z_1=\overline{z_2}$;

p_4 : 若复数 $z\in\mathbf{R}$, 则 $\overline{z}\in\mathbf{R}$.

其中的真命题为 ()

A. p_1, p_3 B. p_1, p_4 C. p_2, p_3 D. p_2, p_4

- [2017·山东卷] 已知命题 $p: \forall x>0, \ln(x+1)>0$; 命题 q : 若 $a>b$, 则 $a^2>b^2$. 下列命题为真命题的是 ()

A. $p\wedge q$

B. $p\wedge\neg q$

C. $\neg p\wedge q$

D. $\neg p\wedge\neg q$

- [2018·北京卷] 能说明“若 $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立, 则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是增函数”为假命题的一个函数是_____.

角度4 含量词的命题

- [2019·全国卷III] 记不等式组 $\begin{cases} x+y\geq 6, \\ 2x-y\geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D . 命题 $p: \exists(x,y)\in D, 2x+y\geq 9$; 命题 $q: \forall(x,y)\in D, 2x+y\leq 12$. 下面给出了四个命题

① $p\vee q$

② $\neg p\vee q$

③ $p\wedge\neg q$

④ $\neg p\wedge\neg q$

这四个命题中, 所有真命题的编号是 ()

A. ①③ B. ①② C. ②③ D. ③④

- [2015·全国卷I] 设命题 $p: \exists n\in\mathbf{N}, n^2>2^n$, 则 $\neg p$ 为 ()

A. $\forall n\in\mathbf{N}, n^2>2^n$

B. $\exists n\in\mathbf{N}, n^2\leq 2^n$

C. $\forall n\in\mathbf{N}, n^2\leq 2^n$

D. $\exists n\in\mathbf{N}, n^2=2^n$

- [2013·全国卷I] 已知命题 $p: \forall x\in\mathbf{R}, 2^x<3^x$; 命题 $q: \exists x\in\mathbf{R}, x^3=1-x^2$, 则下列命题中为真命题的是 ()

A. $p\wedge q$

B. $\neg p\wedge q$

C. $p\wedge\neg q$

D. $\neg p\wedge\neg q$

- [2018·北京卷] 设集合 $A=\{(x,y)|x-y\geq 1, ax+y>4, x-ay\leq 2\}$, 则 ()

A. 对任意实数 $a, (2,1)\in A$

B. 对任意实数 $a, (2,1)\notin A$

C. 当且仅当 $a<0$ 时, $(2,1)\notin A$

D. 当且仅当 $a\leq \frac{3}{2}$ 时, $(2,1)\notin A$

◎ 题组二 刷模拟

19. [2019·天津红桥区二模] 已知集合 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $\{0, 2\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$
 C. $\{0, 1\}$ D. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
20. [2019·湖北部分重点中学联考] 命题“ $\forall x > 1, x^2 - x > 0$ ”的否定是 ()
 A. $\exists x_0 \leq 1, x_0^2 - x_0 \leq 0$ B. $\forall x > 1, x^2 - x \leq 0$
 C. $\exists x_0 > 1, x_0^2 - x_0 \leq 0$ D. $\forall x \leq 1, x^2 - x > 0$
21. [2019·枣庄模拟] 已知集合 $A = \{x | y = (1-x)^{-\frac{1}{2}}\}$, $B = \{y | y = 2 - 2^x, x \in \mathbf{R}\}$, 则 ()
 A. $A \cap B = \emptyset$ B. $A \cup B = \mathbf{R}$ C. $A \subseteq B$ D. $B \subseteq A$
22. [2019·河南八市重点高中联考] 设集合 $A = \{y | y = 2^x - 1\}$, $B = \{x | x \geq 1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$ ()
 A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, 1)$
 C. $(-1, 1)$ D. $[1, +\infty)$
23. [2019·杭州期末] 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a \geq |b|$ ”是“ $a > b$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
24. [2020·洛阳第一高级中学月考] 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 则 $M \cap N =$ ()
 A. $x = 3, y = -1$ B. $(3, -1)$
 C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$
25. [2019·北京昌平区二模] 设 a, b 是非零向量, 则“存在实数 λ , 使得 $a = \lambda b$ ”是“ $|a + b| = |a| + |b|$ ”的 ()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
26. [2019·湖南师范大学附属中学三模] 已知集合 $A = \{1, 2\}$, 集合 $B = \{0, 2\}$, 设集合 $C = \{z | z = xy, x \in A, y \in B\}$, 则下列结论中正确的是 ()
 A. $A \cap C = \emptyset$ B. $A \cup C = C$
 C. $B \cap C = B$ D. $A \cup B = C$
27. [2019·安徽江南十校二联] 已知集合 $A = \{x | y = \ln(x+1) - \ln(x-1)\}$, $B = \left\{x \left| y = \ln \frac{x+1}{x-1} \right.\right\}$, 则“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
28. [2019·辽宁朝阳四模] 已知集合 $A = \{-1, 2\}$, $B = \{x | ax = 1\}$, 若 $B \subseteq A$, 则由实数 a 的所有可能的取值组成的集合为 ()
 A. $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$
 C. $\left\{0, 1, \frac{1}{2}\right\}$ D. $\left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}$
29. [2019·黄冈模拟] 已知命题 p : 若 $x < y$, 则 $a^2 x \leq a^2 y$, 命题 q : 若 $|a| = |b|$, 则 $a \parallel b$. 在命题① $p \vee q$, ② $p \wedge q$, ③ $p \wedge \neg q$, ④ $\neg p \wedge q$ 中, 为真命题的是 ()
 A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④
30. [2019·太原实验中学二模] 已知 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2x_0 + m \leq 0$, q : 幂函数 $f(x) = x^{\frac{-1}{m-2}+1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数. 若“ $p \vee q$ ”为真命题, “ $p \wedge q$ ”为假命题, 则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 1] \cup (2, 3)$ B. $(-\infty, 1) \cup (2, 3)$ C. $(-\infty, 3)$ D. $(-\infty, 1] \cup [2, 3)$
31. (多选题) [2019·北京房山区一模] 已知曲线 $F(x, y) = 0$ 关于 x 轴、 y 轴和直线 $y = x$ 均对称, 设集合 $S = \{(x, y) | F(x, y) = 0, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$. 下列命题中为真命题的是 ()
 A. 若 $(1, 2) \in S$, 则 $(-2, -1) \in S$
 B. 若 $(0, 2) \in S$, 则 S 中至少有 4 个元素
 C. S 中元素的个数一定为偶数
 D. 若 $\{(x, y) | y^2 = 4x, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\} \subseteq S$, 则 $\{(x, y) | x^2 = -4y, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\} \subseteq S$
32. [2019·河南豫南名校一联] 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | (x-3)(x-6) \leq 0\}$, $B = \{3, 6, m\}$, 若 $A \cup B = A$, 则实数 m 的值为_____.
33. [2019·潮州二模] 已知 $a \in \mathbf{R}$, $p: \forall x \in [1, 2], x^2 - a \geq 0$, $q: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 2ax_0 + 2 - a = 0$. 若命题“ $p \wedge q$ ”为真命题, 则实数 a 的取值范围是_____.

小题必刷卷(二)

函数概念与函数的性质

考查范围:第4讲~第6讲

◎ 题组一 刷真题

角度1 分段函数

1. [2015·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1, \\ 2^{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(-2) + f(\log_2 12) =$ ()

A. 3 B. 6
C. 9 D. 12

2. [2017·山东卷] 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1, \\ 2(x-1), & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(a) = f(a+1)$, 则 $f\left(\frac{1}{a}\right) =$ ()

A. 2
B. 4
C. 6
D. 8

3. [2019·天津卷] 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 则 a 的取值范围为 ()

A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$
C. $[0, e]$ D. $[1, e]$

4. [2014·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x < 1, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则使得 $f(x) \leq 2$ 成立的 x 的取值范围是 _____.

5. [2017·全国卷Ⅲ] 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ 的 x 的取值范围是 _____.

6. [2018·江苏卷] 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x) (x \in \mathbf{R})$, 且在区间 $(-2, 2]$ 上, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ \left|x + \frac{1}{2}\right|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$ 则 $f(f(15))$ 的值为 _____.

角度2 函数的性质

7. [2016·全国卷Ⅱ] 下列函数中, 其定义域和值域分别与函数 $y = 10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 ()

A. $y = x$
B. $y = \lg x$
C. $y = 2^x$
D. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

8. [2017·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x) = \ln x + \ln(2-x)$, 则 ()

A. $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增
B. $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递减
C. $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称
D. $y = f(x)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称

9. [2018·全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$. 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) =$ ()

A. -50 B. 0
C. 2 D. 50

10. [2019·全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = -e^{ax}$. 若 $f(\ln 2) = 8$, 则 $a =$ _____.

11. [2016·天津卷] 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(2^{1-a-1}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是 _____.

12. [2014·全国卷Ⅱ] 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, $f(2) = 0$, 若 $f(x-1) > 0$, 则 x 的取值范围是 _____.

13. [2014·全国卷Ⅱ] 偶函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, $f(3) = 3$, 则 $f(-1) =$ _____.

14. [2019·江苏卷] 函数 $y = \sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是 _____.

15. [2017·山东卷] 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且 $f(x+4) = f(x-2)$. 若当 $x \in [-3, 0]$ 时, $f(x) = 6^{-x}$, 则 $f(919) =$ _____.

16. [2016·四川卷] 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的周期为 2 的奇函数, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = 4^x$, 则 $f\left(-\frac{5}{2}\right) + f(1) =$ _____.

◎ 题组二 刷模拟

17. [2019·承德一中三模] 函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)} + \sqrt{4-x^2}$ 的定义域为 ()

A. $[-2, 0) \cup (0, 2]$ B. $(-1, 0) \cup (0, 2]$ C. $[-2, 2]$ D. $(-1, 2]$

18. [2019·武汉调研] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f[f(2)] =$ ()

A. 2 B. -1
C. 1 D. -2

19. [2020·山东模拟] 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x+1)$ 与 $f(x+2)$ 都为奇函数, 则 ()
- A. $f(x)$ 为奇函数 B. $f(x)$ 为周期函数
C. $f(x+3)$ 为奇函数 D. $f(x+4)$ 为偶函数
20. [2020·合肥一中、安庆一中联考] 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = x^3 - 2x^2$, 则 $f(3) =$ ()
- A. 9 B. -9
C. 45 D. -45
21. [2019·东莞模拟] 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数, $f(3) = 0$, 则不等式 $f(1-2x) > 0$ 的解集为 ()
- A. $(-1, 0)$ B. $(-1, 2)$
C. $(0, 2)$ D. $(2, +\infty)$
22. [2020·大庆铁人中学月考] 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-2b, b+1)$ 上的偶函数, 且在 $(-2b, 0]$ 上为增函数, 则 $f(x-1) \leq f(2x)$ 的解集为 ()
- A. $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$ B. $\left(-1, \frac{1}{3}\right]$
C. $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$
23. [2019·山西运城模拟] 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$, $f(x+2) = f(x-2)$, 当任意的 $x_1, x_2 \in [1, 3] (x_1 \neq x_2)$ 时, $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$, 则 $f(2018), f(2019), f(2020)$ 的大小关系为 ()
- A. $f(2018) > f(2019) > f(2020)$ B. $f(2020) > f(2018) > f(2019)$
C. $f(2020) = f(2018) > f(2019)$ D. $f(2018) > f(2019) = f(2020)$
24. [2020·上海实验学校月考] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) = f(-x)$ 且 $f(x+4) = f(x) + f(2)$ 成立, 当 $x_1, x_2 \in [0, 2]$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, $[f(x_1) - f(x_2)](x_1 - x_2) > 0$ 恒成立, 则下列结论中不正确的是 ()
- A. $f(2) = 0$
B. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-6, -4]$ 上为增函数
C. 直线 $x = -4$ 是函数 $f(x)$ 图像的一条对称轴
D. 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[-6, 6]$ 上有 4 个不同的实根
25. [2019·成都模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & x > -1, \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) < m(x+2)$ 恰有 2 个整数解, 则实数 m 的取值范围为 ()
- A. $\left[-\frac{8}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right]$ B. $\left[-\frac{8}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right]$
C. $\left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right]$ D. $\left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right]$
26. [2019·绵阳三诊] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -1 \leq x < 3, \\ f(x-4), & x \geq 3, \end{cases}$ 则 $f(9) =$ _____.
27. [2019·咸阳三模] 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 对称, 且 $f(3) = 3$, 则 $f(-1) =$ _____.
28. [2019·北京延庆区一模] 若函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq a, \\ \frac{1}{x}, & x > a \end{cases}$ 的值域为 $[-1, 1]$, 则 a 的取值范围是 _____.
29. [2019·黄冈模拟] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & 0 < x < 2, \\ -2x + 8, & x \geq 2, \end{cases}$ 若 $f(m) < 0$, 则实数 m 的取值范围是 _____; 若 $f(a) = f(a+2)$, 则 $f\left(\frac{1}{a}\right) =$ _____.
30. [2019·荆州中学、宜昌一中期末] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0, \\ -3x, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f[f(x)] = 10$, 则 $x =$ _____.
31. [2019·济南一模] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1, \\ x + \frac{4}{x} + a, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.
32. [2019·杭州模拟] 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(x+2) = 0$, 且 $f(1) = -2$, 则 $f(2019) + f(2018)$ 的值为 _____.

小题必刷卷(三)

函数

考查范围: 第7讲~第12讲

◎ 题组一 刷真题

角度1 指数对数的运算

- [2018·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) + 1$, $f(a) = 4$, 则 $f(-a) =$ _____.
- [2015·浙江卷] 若 $a = \log_4 3$, 则 $2^a + 2^{-a} =$ _____.

角度2 基本初等函数的性质

- [2019·全国卷Ⅰ] 已知 $a = \log_2 0.2$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.2^{0.3}$, 则 ()
 A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
 C. $c < a < b$ D. $b < c < a$
- [2017·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 ()
 A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, 1)$
 C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$
- [2018·全国卷Ⅲ] 下列函数中, 其图像与函数 $y = \ln x$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称的是 ()
 A. $y = \ln(1-x)$ B. $y = \ln(2-x)$
 C. $y = \ln(1+x)$ D. $y = \ln(2+x)$
- [2019·天津卷] 已知 $a = \log_5 2$, $b = \log_{0.5} 0.2$, $c = 0.5^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
 C. $b < c < a$ D. $c < a < b$
- [2017·北京卷] 已知函数 $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ ()
 A. 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 上是增函数
 B. 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 上是增函数
 C. 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 上是减函数
 D. 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 上是减函数
- [2017·浙江卷] 若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值是 M , 最小值是 m , 则 $M - m$ ()
 A. 与 a 有关, 且与 b 有关
 B. 与 a 有关, 但与 b 无关
 C. 与 a 无关, 且与 b 无关
 D. 与 a 无关, 但与 b 有关
- [2015·全国卷Ⅰ] 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a+x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

角度3 函数的图像及应用

- [2019·浙江卷] 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y = \log_a \left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像可能是 ()

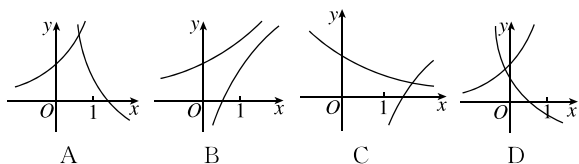


图 X3-1

- [2019·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为 ()

$\pi]$ 的图像大致为

()

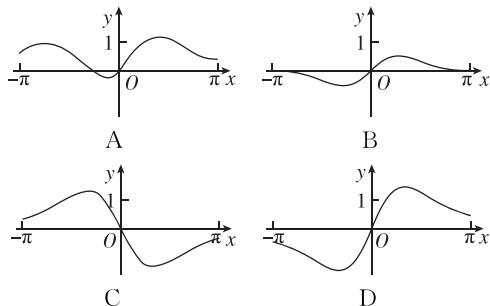


图 X3-2

- [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 的图像大致为 ()

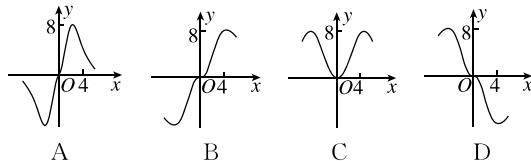


图 X3-3

- [2017·山东卷] 已知当 $x \in [0, 1]$ 时, 函数 $y = (mx-1)^2$ 的图像与 $y = \sqrt{x} + m$ 的图像有且只有一个交点, 则正实数 m 的取值范围是 ()
 A. $(0, 1] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ B. $(0, 1] \cup [3, +\infty)$
 C. $(0, \sqrt{2}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(0, \sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$

角度4 函数与方程、函数的零点

- [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = f(x) + x + a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 ()
 A. $[-1, 0)$ B. $[0, +\infty)$
 C. $[-1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
- [2018·浙江卷] 已知 $\lambda \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq \lambda, \\ x^2-4x+3, & x < \lambda. \end{cases}$ 当 $\lambda = 2$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是 _____. 若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则 λ 的取值范围是 _____.
- [2018·天津卷] 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a, & x \leq 0, \\ -x^2 + 2ax - 2a, & x > 0. \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围是 _____.
- [2019·江苏卷] 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的两个周期函数, $f(x)$ 的周期为 4, $g(x)$ 的周期为 2, 且 $f(x)$ 是奇函数. 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $g(x) = \begin{cases} k(x+2), & 0 < x \leq 1, \\ -\frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 其中 $k > 0$. 若在区间 $(0, 9]$ 上, 关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 k 的取值范围是 _____.

◎ 题组二 刷模拟

18. (多选题)[2019·桂林一模] 下列函数中是奇函数且有零点的是 ()
- A. $f(x)=x+|x|$ B. $f(x)=x^{-1}+x$
 C. $f(x)=\frac{1}{x}+\tan x$ D. $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
19. [2019·大连双基测试] 函数 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ ($x\in\mathbf{R}$) 的值域为 ()
- A. $(0,+\infty)$ B. $(0,1)$ C. $(1,+\infty)$ D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$
20. [2019·南昌七校期末] 已知 $f(x)=x^2, g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-m$, 若对任意的 $x_1\in[-1,3]$, 存在 $x_2\in[0,1]$, 使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $\left[-\frac{17}{2},+\infty\right)$ B. $[-8,+\infty)$ C. $[1,+\infty)$ D. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$
21. [2019·石嘴山三中三模] 已知点 $(2,8)$ 在幂函数 $f(x)=x^n$ 的图像上, 设 $a=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right), b=f(\ln \pi), c=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $b<a<c$ B. $a<b<c$ C. $b<c<a$ D. $a<c<b$
22. [2019·晋冀鲁豫中原名校联考] 已知 $3^a=e, b=\log_3 5-\log_3 2, c=2\ln \sqrt{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $a>c>b$ B. $b>c>a$ C. $c>a>b$ D. $c>b>a$
23. [2019·咸阳三模] 函数 $f(x)=\frac{\ln |x|}{e^x}$ 的大致图像是 ()

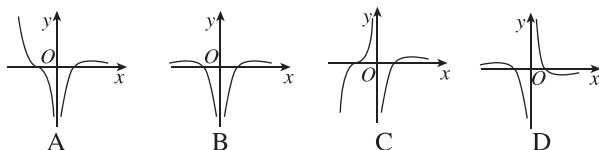


图 X3-4

24. [2019·安徽 1 号卷 A10 联盟 4 月联考] 已知函数 $f(x)=\frac{10(x^2+1)}{x\cdot e^{|x|}}$, 则函数 $f(x)$ 的图像大致为 ()

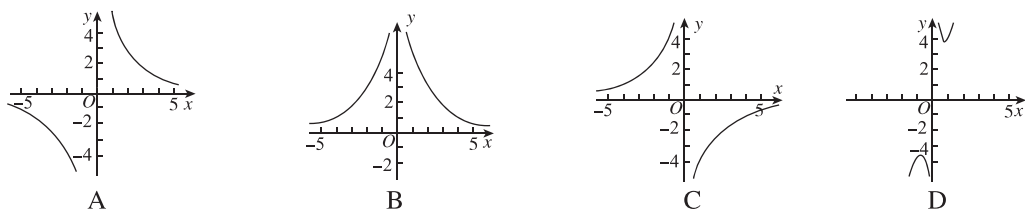


图 X3-5

25. [2019·江西八校联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -|x|+2, & x<1, \\ x^2, & x\geq 1, \end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-mx-m$ 的图像与 x 轴恰有 3 个交点, 则实数 m 的取值范围为 ()
- A. $(0,+\infty)$ B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$ C. $(1,2)$ D. $(1,+\infty)$
26. (多选题)[2019·湖北恩施质检] 设 $a=\log_{0.1} 2, b=\log_{30} 2$, 则 ()
- A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$
 C. $2ab<3(a+b)<4ab$ D. $4ab<2(a+b)<3ab$
27. [2019·深圳一模] 设函数 $f(x)=\begin{cases} |2^x-1|, & x\leq 2, \\ -x+5, & x>2, \end{cases}$ 若互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a)=f(b)=f(c)$, 则 $2^a+2^b+2^c$ 的取值范围是 ()
- A. $(16,32)$ B. $(18,34)$ C. $(17,35)$ D. $(6,7)$
28. [2019·吉林东北师大附中二模] 已知函数 $y=\log_2(ax-1)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是_____.
29. [2019·东北师大附中二模] 若函数 $f(x)=\log_a(x+5)+1$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的图像恒过定点 $P(m,n)$, 则 $m+n=$ _____; 函数 $g(x)=\ln(bx-n)$ 在 $(-2,-1)$ 上单调递减, 则 b 的取值范围是_____.
30. [2019·南昌一模] 若对任意 $t\in[1,2]$, 函数 $f(x)=t^2x^2-(t+1)x+a$ 总有零点, 则实数 a 的取值范围是_____.

小题必刷卷(四)

导数及其应用

考查范围:第13讲~第15讲

◎ 题组一 刷真题

角度1 导数的计算、几何意义与定积分

- [2019·全国卷Ⅲ] 已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$, 则 ()
A. $a=e, b=-1$
B. $a=e, b=1$
C. $a=e^{-1}, b=1$
D. $a=e^{-1}, b=-1$
- [2018·天津卷] 已知函数 $f(x)=e^x\ln x, f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $f'(1)$ 的值为_____.
- [2018·全国卷Ⅱ] 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.
- [2019·全国卷Ⅰ] 曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.
- [2018·全国卷Ⅲ] 曲线 $y=(ax+1)e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 -2 , 则 $a=_____$.
- [2016·全国卷Ⅱ] 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线, 也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线, 则 $b=_____$.
- [2019·江苏卷] 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在曲线 $y=\ln x$ 上, 且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e, -1)$ (e 为自然对数的底数), 则点 A 的坐标是_____.

角度2 利用导数判断函数的图像

- [2018·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为 ()

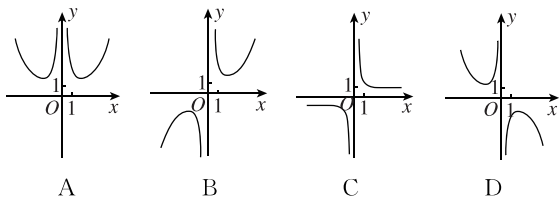


图 X4-1

- [2017·浙江卷] 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图 X4-2 所示, 则函数 $y=f(x)$ 的图像可能是 ()

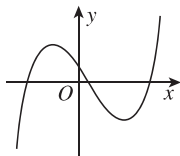


图 X4-2

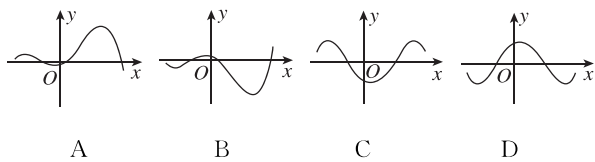


图 X4-3

角度3 导数与函数的单调性

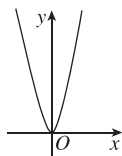
- [2016·全国卷Ⅰ] 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是 ()
A. $[-1, 1]$
B. $[-1, \frac{1}{3}]$
C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$
D. $[-1, -\frac{1}{3}]$
- [2015·全国卷Ⅱ] 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 的导函数, $f(-1)=0$, 当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)<0$, 则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
- [2019·北京卷] 设函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a=_____$; 若 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 则 a 的取值范围是_____.

角度4 导数与函数的极值、最值

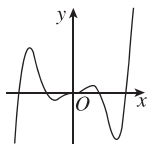
- [2017·全国卷Ⅱ] 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ()
A. -1
B. $-2e^{-3}$
C. $5e^{-3}$
D. 1
- [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是_____.
- [2018·江苏卷] 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1$ ($a \in \mathbf{R}$) 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值的和为_____.

◎ 题组二 刷模拟

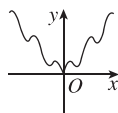
16. [2019·四川一模] 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(x) = 2xf'(e) + \ln x$ (其中 e 为自然对数的底数), 则 $f'(e) =$ ()
 A. 1 B. -1 C. -e D. $-e^{-1}$
17. [2019·上饶重点中学联考] 已知函数 $f(x) = x \ln x + 1$, 则该函数的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 ()
 A. $y = x$ B. $y = x + 1$ C. $y = x - 1$ D. $y = 1$
18. [2019·重庆一中期末] 函数 $f(x) = 2 \ln x - x^2$ 的单调递增区间是 ()
 A. $(0, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1], (0, 1]$ D. $[-1, 0), (0, 1]$
19. [2019·合肥质检] 函数 $f(x) = x^2 + x \sin x$ 的图像大致为 ()



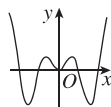
A



B



C



D

图 X4-4

20. [2019·新乡一模] 若函数 $f(x) = ae^x + \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上单调递增, 则 a 的取值范围为 ()
 A. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}, +\infty)$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$
21. [2019·太原一模] 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - f(x) < 0$, 且 $f(2) = 2$, 则 $f(e^x) - e^x > 0$ 的解集是 ()
 A. $(-\infty, \ln 2)$ B. $(\ln 2, +\infty)$
 C. $(0, e^2)$ D. $(e^2, +\infty)$
22. [2019·桃江一中三模] 已知函数 $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - \ln x$ 的极值点为 x_1 , 函数 $g(x) = e^x + x - 2$ 的零点为 x_2 , 函数 $h(x) = \frac{\ln x}{2x}$ 的最大值为 x_3 , 则 ()
 A. $x_1 > x_2 > x_3$ B. $x_2 > x_1 > x_3$ C. $x_3 > x_1 > x_2$ D. $x_3 > x_2 > x_1$
23. [2019·龙岩三模] 若直线 $y = a$ 分别与直线 $y = 2x - 3$, 曲线 $y = e^x - x (x \geq 0)$ 交于点 A, B , 则 $|AB|$ 的最小值为 ()
 A. $6 - 3 \ln 3$ B. $3 - \frac{3}{2} \ln 3$ C. e D. $0.5e$
24. [2019·晋城三模] 已知 $a = \ln \sqrt[3]{3}, b = e^{-1}, c = \frac{3 \ln 2}{8}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$
25. [2019·黄山质检] 已知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上可导, 且对于任意的 x 都有 $\frac{f(-x)}{f(x)} = e^{2x}$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) + f'(x) > 0$, 若 $e^a f(2a+1) \geq f(a+1)$, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $[0, \frac{2}{3}]$ B. $[-\frac{2}{3}, 0]$ C. $[0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0]$
26. [2019·长沙一中一模] 若不等式 $|\ln x + \frac{1}{x} - m| \leq m + e$ 对任意 $x \in [\frac{1}{e}, 1]$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ C. $[-\frac{1}{2}, 1]$ D. $[1, +\infty)$
27. [2019·晋冀鲁豫中原名校联考] 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足 $f'(x) < f(x)$, 且 $y = f(x+2)$ 为偶函数, $f(4) = 2$, 则不等式 $f(x) < 2e^x$ 的解集为 _____.
28. [2019·辽宁期末] 设直线 $y = m$ 与曲线 $C: y = x(x-2)^2$ 的三个交点分别为 $A(a, m), B(b, m), C(c, m)$, 其中 $a < b < c$, 则实数 m 的取值范围是 _____, $a^2 + b^2 + c^2$ 的值为 _____.
29. [2019·长沙一中一模] 已知函数 $f(x) = -x^3 + 1 + a(\frac{1}{e} \leq x \leq e, e \text{ 是自然对数的底数})$ 与 $g(x) = 3 \ln x$ 的图像上存在关于 x 轴对称的点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

◎ 题组一 刷真题

1. [2019·全国卷Ⅱ] 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性, 并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点;

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点, 证明曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线.

2. [2019·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

3. [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 证明: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

◎ 题组二 刷模拟

4. [2019·晋城三模] 已知函数 $f(x) = me^x - x^2$.

(1) 若 $m=1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq x(4 - me^x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

5. [2019·临沂三模] 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e} + a \ln x$, 其中 a 为常数.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a=-1$ 时, 若函数 $g(x) = |f(x)| - \frac{\ln x}{x} + b$ 在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点, 求实数 b 的取值范围.

6. [2019·潍坊三模] 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x - 2x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 且 $f(x_1) - mx_2 \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.