KEYS 参考答案 | 作业手册

课时作业（一）

1. D 2. A 3. C 4. D 5. 3或4
6. C 7. D 8. C 9. C 10. C
11. D 12. $\frac{3}{4}$或1 13. $[2,10)$
14. $\{-1,-3,1,3\}$ 15. A 16. $t\leqslant-\frac{2}{3}$

课时作业（二）

1. D 2. A 3. B 4. A
5. $\forall x>1,\left(\frac{1}{2}\right)^{x}<\frac{1}{2}$
6. A
7. C ［解析］由 $y=|x|-1$，得 $y\geqslant-1$，若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$m\leqslant y$，则 $m\leqslant-1$，故选 C.
8. B 9. D 10. C
11. D ［解析］因为"$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$4x_0^2+(a-2)x_0+\frac{1}{4}\leqslant0$"是假命题，所以"$\forall x\in\mathbf{R}$，$4x^2+(a-2)x+\frac{1}{4}>0$"是真命题，则 $\Delta=(a-2)^2-4\times4\times\frac{1}{4}=a^2-4a<0$，解得 $0<a<4$，故选 D.
12. $a\leqslant0$
13. 5 ［解析］令 $t=\log_2x$，$\because x\in[2,8]$，$\therefore t\in[1,3]$. $\because f(t)=t+\frac{4}{t}$ 在$[1,2]$上单调递减，在$(2,3]$上单调递增，$\therefore$ 当 $t\in[1,3]$ 时，$f(t)_{\max}=\max\{f(1),f(3)\}=5$. $\because$"$\exists x_0\in[2,8]$，$m\leqslant\log_2x_0+4\log_{x_0}2$"为真命题，$\therefore$"$\exists t\in[1,3]$，$m\leqslant t+\frac{4}{t}$"为真命题，则 $m\leqslant f(t)_{\max}=5$，$\therefore$实数 m 的最大值为 5.
14. $[-14,-4]$ 15. A
16. $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$ ［解析］当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)_{\min}=f(0)=0$. 当 $x\in[1,2]$ 时，$g(x)_{\min}=g(2)=\frac{1}{4}-m$. 对任意 $x_1\in[0,3]$，存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立，等价于 $f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$，可得 $0\geqslant\frac{1}{4}-m$，所以 $m\geqslant\frac{1}{4}$.

课时作业（三）

第1课时

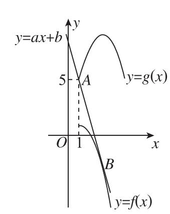
1. ACD 2. A 3. D 4. D
5. $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$
6. ABD 7. C 8. A
9. D 10. C 11. $<$ 12. $[2,27]$
13. ①③ 14. C 15. $c^n>a^n+b^n$

第2课时

1. B 2. C 3. B 4. 4 5. 4 6. BC
7. C ［解析］由基本不等式得 $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)=1+a+\frac{y}{x}+\frac{ax}{y}\geqslant1+a+2\sqrt{a}$ $\left(\text{当且仅当}\frac{y}{x}=\frac{ax}{y}\text{时等号成立}\right)$，要使 $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\right)\geqslant9$ 对任意正实数 x,y 恒成立，只需 $1+a+2\sqrt{a}\geqslant9$，即 $a+2\sqrt{a}-8\geqslant0$，得 $(\sqrt{a}+4)(\sqrt{a}-2)\geqslant0$，故 $\sqrt{a}\leqslant-4$（舍去）或 $\sqrt{a}\geqslant2$，得 $a\geqslant4$，故选 C.
8. D ［解析］$\because x>0,y>0,x+y=1$，$\therefore x+1+y=2$，$\therefore\frac{4}{x+1}+\frac{1}{y}=\frac{x+1+y}{2}\cdot\left(\frac{4}{x+1}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}\left(1+4+\frac{4y}{x+1}+\frac{x+1}{y}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times(5+4)=\frac{9}{2}$ $\left(\text{当且仅当 } x=\frac{1}{3},y=\frac{2}{3}\text{ 时取等号}\right)$，故选 D.
9. C ［解析］由题意，可得总的不满意度为 $n+\frac{9}{n}\geqslant2\sqrt{n\cdot\frac{9}{n}}=6$，当且仅当 $n=\frac{9}{n}$，即 $n=3$ 时等号成立，所以此人应选 3 楼，故选 C.
10. $2\sqrt{2}$ ［解析］$\because\lg a+\lg b=\lg ab=0$，$\therefore ab=1$，且 $a>0,b>0$，$\therefore\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}$，即 $a=\sqrt{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，$\therefore\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.
11. **证明：**(1)根据基本不等式得到 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2=2$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立.
(2)$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{2}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{2}+\frac{b}{a}+\frac{a}{2b}\geqslant\frac{3}{2}+\sqrt{2}=\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4}$，
当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{2b}$ 时等号成立，
故 $\sqrt{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}\geqslant1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.
12. $\sqrt{2}$ ［解析］$\because f(x)=ax^2+x+2b$ 的值域为 $[0,+\infty)$，$\therefore\begin{cases}a>0,\\1^2-4\cdot a\cdot2b=0,\end{cases}$ $\therefore a>0$ 且 $8ab=1$. $\frac{a^2+4b^2}{a-2b}=\frac{(a-2b)^2+4ab}{a-2b}=a-2b+\frac{1}{2(a-2b)}$，$\because a>2b$，$\therefore a-2b>0$，$\therefore a-2b+\frac{1}{2(a-2b)}\geqslant2\sqrt{(a-2b)\cdot\frac{1}{2(a-2b)}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $a-2b=\frac{1}{2(a-2b)}$，即 $a-2b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，$\therefore\frac{a^2+4b^2}{a-2b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.
13. 1 ［解析］由题意得 $\frac{xy}{z}=\frac{xy}{x^2-3xy+4y^2}=\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}-3}\leqslant\frac{1}{2\times2-3}=1$，当且仅当 $x=2y$ 时等号成立，此时 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=\frac{2}{2y}+\frac{1}{y}-\frac{2}{2y^2}=-\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}$，令 $t=\frac{1}{y}>0$，则 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=-(t-1)^2+1\leqslant1$，当且仅当 $t=1$，即 $y=1,x=2,z=2$ 时等号成立，$\therefore$当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}$ 的最大值为 1.

课时作业（四）

1. D 2. D 3. B 4. C
5. -1 6. B 7. A 8. A
9. C ［解析］根据题意，分两种情况讨论：①当 $a^2-4=0$，即 $a=\pm2$ 时，若 $a=2$，则原不等式为 $4x-1\geqslant0$，解得 $x\geqslant\frac{1}{4}$，则不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{4}\right\}$，不是空集，符合题意；若 $a=-2$，则原不等式为 $-1\geqslant0$，无解，不符合题意. ②当 $a^2-4\neq0$，即 $a\neq\pm2$ 时，若 $(a^2-4)x^2+(a+2)x-1\geqslant0$ 的解集是空集，则有 $\begin{cases}a^2-4<0,\\\Delta=(a+2)^2+4(a^2-4)<0,\end{cases}$ 解得 $-2<a<\frac{6}{5}$，则当不等式 $(a^2-4)x^2+(a+2)x-1\geqslant0$ 的解集不为空集时，有 $a<-2$ 或 $\frac{6}{5}\leqslant a<2$ 或 $a>2$. 综上可得，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup\left[\frac{6}{5},+\infty\right)$. 故选 C.
10. D ［解析］令 $f(a)=(2x^2+x)a-3$，则关于 a 的一次函数必单调，则 $\begin{cases}f(3)>0,\\f(1)>0,\end{cases}$ 解得 $x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>1$，即 $A=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(1,+\infty)$. 因为不等式 $mx^2+(m-1)x-m>0$ 对任意的 $x\in[1,3]$ 恒成立，所以 $m>\frac{x}{x^2+x-1}$ 对任意的 $x\in[1,3]$ 恒成立，又 $y=\frac{x}{x^2+x-1}=\frac{1}{x-\frac{1}{x}+1}$ 在$[1,3]$上单调递减，故 $y_{\max}=1$，故 $m>1$，即 $B=(1,+\infty)$. 所以 $B\subseteq A$，故选 D.
11. $\frac{1}{2}$ ［解析］由 $\frac{ax}{x-1}<1$，得 $\frac{ax}{x-1}-1<0$，即 $\frac{(a-1)x+1}{x-1}<0$，从而得 $[(a-1)x+1](x-1)<0$，由题知 $a-1\neq0$，所以 $(a-1)\left(x+\frac{1}{a-1}\right)(x-1)<0$，因为原不等式的解集为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，所以 $a-1<0$，且 $\frac{1}{a-1}=-2$，解得 $a=\frac{1}{2}$.
12. $\left(\frac{a}{7},-\frac{a}{6}\right)$ ［解析］由 $42x^2+ax-a^2<0$，利用因式分解得 $(6x+a)(7x-a)<0$，对应方程 $(6x+a)(7x-a)=0$ 的实数根为 $x_1=-\frac{a}{6}$，$x_2=\frac{a}{7}$，因为 $a<0$，所以 $-\frac{a}{6}>\frac{a}{7}$，所以关于 x 的不等式 $42x^2+ax-a^2<0$ 的解集为 $\left(\frac{a}{7},-\frac{a}{6}\right)$.
13. -5 ［解析］根据题意，设 $-x^2+2x+3\geqslant m$ 的解集为 $[a,b]$，则 $x=a$ 和 $x=b$ 是方程 $-x^2+2x+3=m$，即 $x^2-2x+m-3=0$ 的两根，则 $a+b=2$，$ab=m-3$. 因为不等式 $f(x)\geqslant m$ 的解集的区间长度为 6，所以 $b-a=6$，所以 $(a+b)^2-4ab=4-4(m-3)=36$，解得 $m=-5$.
14. $[3,5]$ ［解析］由题意知征收耕地占用税后每年损失耕地 $\left(20-\frac{5}{2}t\right)$ 万亩，则此项税收为 $\left(20-\frac{5}{2}t\right)\times24\ 000\times t\%$ 万元. 由题意得 $\left(20-\frac{5}{2}t\right)\times24\ 000\times t\%\geqslant9000$，整理得 $t^2-8t+15\leqslant0$，解得 $3\leqslant t\leqslant5$. $\therefore$当耕地占用税率为 3%～5% 时，既可减少耕地损失又可保证此项税收一年不少于 9000 万元，$\therefore t$ 的取值范围是$[3,5]$.
15. C ［解析］因为 $(x-b)^2>(ax)^2$，所以 $[(a-1)x+b][(a+1)x-b]<0$，因为不等式 $(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个，所以 $a-1>0$，解不等式得 $\frac{-b}{a-1}<x<\frac{b}{a+1}$，因为 $0<b<a+1$，所以 $0<\frac{b}{a+1}<1$，从而 $-3\leqslant\frac{-b}{a-1}<-2$，所以 $b>2(a-1)$，$3(a-1)\geqslant b$，因为 $0<b<a+1$，所以 $a+1>b>2(a-1)$，$3(a-1)\geqslant b>0$，所以 $1<a<3$，故选 C.
16. A ［解析］当 $x\in[1,5]$ 时，$2x\leqslant x^2+ax+b\leqslant6x$ 即 $-x^2+2x\leqslant ax+b\leqslant-x^2+6x$，令 $f(x)=-x^2+2x(1\leqslant x\leqslant5)$，$g(x)=-x^2+6x(1\leqslant x\leqslant5)$，作出 $f(x)$，$g(x)$ 的图像如图所示.
要使 b 最大，则直线 $y=ax+b$ 必过 $A(1,5)$，且与 $y=f(x)$ 的图像相切于点 B，则此时 $b=5-a$，即直线方程为 $y=ax+5-a$，由 $\begin{cases}y=ax+5-a,\\y=-x^2+2x,\end{cases}$ 得 $x^2+(a-2)x+5-a=0$，



令$\Delta=(a-2)^2-4(5-a)=0$,得$a^2=16$.由图像可知$a<0$,所以$a=-4$,所以$b_{\max}=5-(-4)=9$.故选A.

课时作业(五)

1. B 2. C 3. B 4. A 5. $2x+5$

6. D [解析] 函数$f(x)=\begin{cases}2^x,x\geqslant3,\\ f(x+1),x<3,\end{cases}$因为$\log_2 6<3$,所以$f(\log_2 6)=f(1+\log_2 6)$,又$1+\log_2 6=\log_2 12>3$,所以$f(\log_2 6)=f(1+\log_2 6)=2^{\log_2 12}=12$.

7. C [解析] 因为$2^x>0$,所以$2^x+1>1$,所以$0<y=\frac{1}{2^x+1}<1$.故选C.

8. B [解析] A中,$f(2x)=|2x|=2|x|=2f(x)$,满足$f(2x)=2f(x)$;B中,$f(2x)=2x+1$,$2f(x)=2x+2$,不满足$f(2x)=2f(x)$;C中,$f(2x)=-2x=2f(x)$,满足$f(2x)=2f(x)$;D中,$f(2x)=2x-|2x|=2x-2|x|=2f(x)$,满足$f(2x)=2f(x)$.故选B.

9. A [解析] 当$a>0$时,若$f(a)=3$,则$\log_2 a+a=3$,得$a=2$;当$a\leqslant0$时,若$f(a)=3$,则$4^{a-2}-1=3$,得$a=3$,不满足$a\leqslant0$,舍去.综上,$a=2$,故$f(a-2)=f(0)=4^{0-2}-1=-\frac{15}{16}$.故选A.

10. A [解析] $f(x)\leqslant3\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\ e^{x-1}\leqslant3\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1,\\ x^{\frac{1}{2}}\leqslant3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\ x\leqslant1+\ln 3\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1,\\ x\leqslant9\end{cases}\Rightarrow x<1$或$1\leqslant x\leqslant9\Rightarrow x\leqslant9$.

11. A [解析] 设$f(a)=t$,则$f[f(a)]>2$可化为$f(t)>2$,∴$\begin{cases}-t^2-2t+1>2,\\ t<0\end{cases}$或$\begin{cases}2^t>2,\\ t\geqslant0,\end{cases}$解得$t>1$,即$f(a)>1$.∵$f(a)=\begin{cases}-a^2-2a+1,a<0,\\ 2^a,a\geqslant0,\end{cases}$∴$\begin{cases}-a^2-2a+1>1,\\ a<0\end{cases}$或$\begin{cases}2^a>1,\\ a\geqslant0,\end{cases}$解得$-2<a<0$或$a>0$,∴实数$a$的取值范围是$(-2,0)\cup(0,+\infty)$,故选A.

12. -2 [解析] $f[f(-2)]=f(3)=a=-2$.

13. $f(x)=\frac{4}{3}-x$ [解析] 由题意,$f(x)+2f(2-x)=x$①,用$2-x$代换①式中的x,得$f(2-x)+2f(x)=2-x$②,联立①②,解得$f(x)=\frac{4}{3}-x$.

14. $\frac{1}{3}$ $(0,2)$ [解析] 根据题意,函数$f(x)=\begin{cases}3^x,x\leqslant0,\\ -x+3,x>0,\end{cases}$则$f(-1)=3^{-1}=\frac{1}{3}$.对于不等式$f(x)>1$,分两种情况讨论:当$x\leqslant0$时,$f(x)=3^x$,此时$f(x)\leqslant1$,则$f(x)>1$无解;当$x>0$时,$f(x)=-x+3$,若$f(x)>1$,则$-x+3>1$,解得$x<2$,此时不等式的解集为$(0,2)$.综上可得,所求$x$的取值范围为$(0,2)$.

15. B [解析] 对于①,$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-x=-f(x)$,满足题意;对于②,$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x=f(x)$,不满足题意;对于③,$f\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{1}{x},0<\frac{1}{x}<1,\\ 0,\frac{1}{x}=1,\\ -x,\frac{1}{x}>1,\end{cases}$即$f\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{1}{x},x>1,\\ 0,x=1,\\ -x,0<x<1,\end{cases}$故$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$,满足题意.综上可知,满足"倒负"变换的函数是①③.

16. A [解析] 当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时,$\log_2\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\log_2 2$,即$-1\leqslant f(x)\leqslant1$,则$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上的取值范围为$[-1,1]$;当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时,$1+a\leqslant g(x)\leqslant4+a$,则$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上的取值范围为$[1+a,4+a]$.若存在$x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,使得$f(x_1)=g(x_2)$,则$[1+a,4+a]\cap[-1,1]\neq\varnothing$.若$[1+a,4+a]\cap[-1,1]=\varnothing$,则$1+a>1$或$4+a<-1$,得$a>0$或$a<-5$,所以当$[1+a,4+a]\cap[-1,1]\neq\varnothing$时,$-5\leqslant a\leqslant0$,即实数$a$的取值范围是$[-5,0]$.故选A.

课时作业(六)

1. C 2. A 3. A 4. D 5. $[0,+\infty)$

6. D [解析] 函数$y=\frac{2-x}{x+1}=\frac{3-(x+1)}{x+1}=\frac{3}{x+1}-1$在区间$(-1,+\infty)$上是减函数,当$x=2$时,$y=0$.根据题意可得当$x\in(m,n]$时,$y_{\min}=0$,所以$n=2$,$m$的取值范围是$-1\leqslant m<2$,故选D.

7. B [解析] 不等式$|f(x+1)|<2$即为$-2<f(x+1)<2$,∵$A(0,-2)$,$B(3,2)$是函数$f(x)$图像上的两点,∴$f(0)=-2$,$f(3)=2$,∴$-2<f(x+1)<2$等价于$f(0)<f(x+1)<f(3)$.又∵函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,∴$f(0)<f(x+1)<f(3)$等价于$0<x+1<3$,解得$-1<x<2$,∴不等式$|f(x+1)|<2$的解集为$(-1,2)$.故选B.

8. B [解析] ∵函数$g(x)=2^x(x<2)$和$h(x)=x^2(x\geqslant2)$均是增函数,且$g(2)=h(2)$,∴函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数.∵$f(a+1)\geqslant f(2a-1)$,∴$a+1\geqslant2a-1$,解得$a\leqslant2$.因此,实数a的取值范围是$(-\infty,2]$.

9. D [解析] $b=f\left(\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}\right)=f(\log_5 2)$,因为$0<\log_5 2<\log_3 2<1<2^{0.2}<\pi$,且$f(x)=\tan\frac{x}{2}$在$(0,\pi)$上为增函数,所以$f(\log_5 2)<f(\log_3 2)<f(2^{0.2})$,即$b<a<c$,故选D.

10. D [解析] 当$x\leqslant2$时,$f(x)=2^{|x-2|}=2^{2-x}$单调递减,且$f(2)=1$,当$x>2$时,$f(x)=\log_2(x+a)$单调递增,若$f(x)$的最小值为$f(2)$,则只需$\log_2(x+a)\geqslant1$在$(2,+\infty)$上恒成立,即$2+a\geqslant2$,∴$a\geqslant0$,故选D.

11. D [解析] 由题可知$a<1$,$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2-2ax+a}{x}=x+\frac{a}{x}-2a$.当$a<0$时,因为函数$y=x-2a$和函数$y=\frac{a}{x}$在$(1,+\infty)$上都为增函数,所以函数$g(x)=x+\frac{a}{x}-2a$在$(1,+\infty)$上为增函数;当$a=0$时,$g(x)=x$在$(1,+\infty)$上为增函数;当$0<a<1$时,由对勾函数的单调性知,函数$g(x)=x+\frac{a}{x}-2a$在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增,因为$(1,+\infty)\subseteq(\sqrt{a},+\infty)$,所以函数$g(x)=x+\frac{a}{x}-2a$在$(1,+\infty)$上为增函数.综上所述,函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$在区间$(1,+\infty)$上为增函数,故选D.

12. $\frac{8}{5}$ [解析] 函数$y=\frac{5x-1}{4x+2}$,令$4x+2=t$,则$x=\frac{t-2}{4}$,由$-3\leqslant x\leqslant-1$,可得$-10\leqslant t\leqslant-2$,因为函数$y=\frac{5\times\frac{t-2}{4}-1}{t}=\frac{5}{4}-\frac{7}{2t}$在$[-10,-2]$上单调递增,所以$y_{\min}=\frac{5}{4}+\frac{7}{20}=\frac{8}{5}$.

13. $-\frac{1}{3}$ [解析] 不等式$|f(x_1)|\leqslant g(x_2)$可化为$-g(x_2)\leqslant f(x_1)\leqslant g(x_2)$,若对任意$x_1\in[0,3]$,总存在$x_2\in[2,3]$,使得$|f(x_1)|\leqslant g(x_2)$成立,则$\begin{cases}[-g(x_2)]_{\min}\leqslant f(x_1)_{\min},\\ f(x_1)_{\max}\leqslant g(x_2)_{\max},\end{cases}$当$x\in[2,3]$时,$g(x)=\frac{2}{x-1}$的最大值为$g(2)=\frac{2}{2-1}=2$,当$x\in[0,3]$时,$f(x)=x^2-2x+3a$的最大值为$f(3)=3^2-2\times3+3a=3+3a$,最小值为$f(1)=1^2-2\times1+3a=-1+3a$.所以$\begin{cases}-2\leqslant3a-1,\\ 3+3a\leqslant2,\end{cases}$解得$a=-\frac{1}{3}$.

14. 解:(1)证明:令$x=y=0$,得$f(0)=-1$.
在$\mathbf{R}$上任取$x_1>x_2$,则$x_1-x_2>0$,所以$f(x_1-x_2)>-1$.
又$f(x_1)=f[(x_1-x_2)+x_2]=f(x_1-x_2)+f(x_2)+1>f(x_2)$,
所以函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数.
(2)由$f(1)=1$,得$f(2)=3$,$f(3)=5$.
由$f(x^2+2x)+f(1-x)>4$得$f(x^2+x+1)>f(3)$,因为函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数,所以$x^2+x+1>3$,
解得$x<-2$或$x>1$,
故原不等式的解集为$\{x|x<-2$或$x>1\}$.

15. 解:(1)当$a=1$时,$f(x)=\frac{1}{2^x}$为$\mathbf{R}$上的减函数,$g(x)=x^2+2x-3$的单调递减区间为$(-\infty,-1]$,
所以根据复合函数的单调性,可知函数$f[g(x)]=\frac{1}{2^{x^2+2x-3}}$的单调递增区间为$(-\infty,-1]$.
因为$g(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4\in[-4,+\infty)$,所以$f[g(x)]$的值域为$(0,16]$.
(2)令$t=f(x)=\frac{1}{2^x}\in(0,4]$,则依题意可化为求$g(t)=at^2+2t-3$在$(0,4]$上的最大值$h(a)$.
当$a=0$时,$g(t)=2t-3$,在$(0,4]$上$g(t)$单调递增,所以$h(a)=g(4)=5$;
当$a>0$时,$-\frac{1}{a}<0$,所以在$(0,4]$上$g(t)$单调递增,所以$h(a)=g(4)=16a+5$;
当$-\frac{1}{4}\leqslant a<0$时,$-\frac{1}{a}\geqslant4$,所以在$(0,4]$上$g(t)$单调递增,所以$h(a)=g(4)=16a+5$;
当$a<-\frac{1}{4}$时,$0<-\frac{1}{a}<4$,此时,$g(t)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right]$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{a},4\right]$上单调递减,所以$h(a)=g\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}-3$.
综上所述,$h(a)=\begin{cases}16a+5,a\geqslant-\frac{1}{4},\\ -\frac{1}{a}-3,a<-\frac{1}{4}.\end{cases}$

16. C [解析] 由题知,$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的函数,对任意两个不相等的正实数x_1,x_2,都有$\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$,即$\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}<0$,即$\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}$与$x_1-x_2$异号,∴函数$y=\frac{f(x)}{x}$是$(0,+\infty)$上的减函数.∵$1<2^{0.2}<2$,$0<0.2^2<1$,$\log_2 5>2$,∴$0.2^2<2^{0.2}<\log_2 5$,∴$c<a<b$.故选C.

17. 2 [解析] 由题意,当$x\in[1,2)$时,$x+1\in[2,3)$,由$f(x+1)=\frac{1}{f(x)+1}$,且当$x\in[2,3]$时,$f(x)=\frac{5}{12}x-\frac{1}{2}$,得$\frac{1}{f(x)+1}=f(x+1)=\frac{5}{12}(x+1)-\frac{1}{2}$,$x\in[1,2)$,即$f(x)=\frac{12}{5x-1}-1$,$x\in[1,2)$.当$x\in[1,2)$时,$f(x)=\frac{12}{5x-1}-1$为减函数,此时,$f(x)_{\max}=f(1)=\frac{12}{5-1}-1=2$;又当$x\in[2,3]$时,$f(x)=\frac{5}{12}x-\frac{1}{2}$为增函数,此时,$f(x)_{\max}=f(3)=\frac{5}{12}\times3-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.故在区间$[1,3]$上,$f(x)_{\max}=2$,又对定义域上的任意$x$,都有$f(x)\leqslant t$成立,所以$t\geqslant2$,即$t$的最小值是2.

课时作业(七)

1. B 2. A 3. ABC 4. C 5. -2

6. B [解析] 由$y=f(x)$的图像关于原点对称,可得$y=|f(x)|$是偶函数,反之不成立,例如$f(x)=x^2$,满足$y=|f(x)|$是偶函数,但$y=f(x)$的图像不关于原点对称.因此,"$y=|f(x)|$是偶函数"是"$y=f(x)$的图像关于原点对称"的必要不充分条件.故选B.

7. C [解析] 依题意,函数$f(x)$为偶函数.由于$m(x)=\sin x$为奇函数,故$g(x)=\ln(ax+\sqrt{1+4x^2})$也为奇函数,所以$g(-x)+g(x)=\ln(-ax+\sqrt{1+4x^2})+\ln(ax+\sqrt{1+4x^2})=0$

恒成立,即 $\ln(1+4x^2-a^2x^2)=0$ 恒成立,解得 $a=\pm2$.故选 C.

8. C [解析] ∵$f(x)$为偶函数,∴$f(-\log_2 3)=f(\log_2 3)$.∵$0<\log_3 2<1<\log_2 3$,$f(x)$在$[0,+\infty)$内单调递减,∴$f(\log_2 3)<f(\log_3 2)<f(0)$,即 $f(-\log_2 3)<f(\log_3 2)<f(0)$.故选 C.

9. B [解析] 因为 $f(x+2)$是定义在 **R** 上的偶函数,所以 $f(-x+2)=f(x+2)$,即 $f(x)=f(4-x)$,又 $f(x)$为偶函数,所以 $f(x)=f(-x)=f(4+x)$,所以函数 $f(x)$是周期为 4 的周期函数,所以 $f\left(-\frac{2019}{2}\right)=f\left(\frac{2019}{2}\right)=f\left(4\times252+\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=2\sqrt{2}$.故选 B.

10. C [解析] 由题可得 $f(2x-1)\geqslant f(1)$,∵函数 $f(x)$为偶函数,∴$f(|2x-1|)\geqslant f(1)$,又函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,∴$|2x-1|\leqslant1$,解得 $0\leqslant x\leqslant1$.故选 C.

11. A [解析] ∵$f(x)+f(-x)=0$,∴函数 $f(x)$是奇函数.∵$f(x+4)+f(-x)=0$,∴$f(x)=f(x+4)$,∴$f(x)$是以 4 为周期的周期函数,∴$f(2019)=f(-1)=-f(1)=1$.故选 A.

12. A [解析] 因为 $y=f(x+1)$是偶函数,所以 $f(-x+1)=f(x+1)$,所以函数 $f(x)$图像的对称轴为直线 $x=1$,又因为函数 $y=f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减,所以 $y=f(x)$在$(-\infty,1]$上单调递增.当 $x\in[-1,0]$时,$-2\leqslant x-1\leqslant-1$,因为不等式 $f(m+2)\geqslant f(x-1)$对任意的$x\in[-1,0]$恒成立,所以 $f(m+2)\geqslant f(-1)$,又$f(-1)=f(3)$,所以$-1\leqslant m+2\leqslant3$,解得$-3\leqslant m\leqslant1$.故选 A.

13. $\begin{cases}x^{\frac13}+2^x-1,x<0,\\ x^{\frac13}-2^{-x}+1,x\geqslant0\end{cases}$ [解析] ∵$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,∴$f(0)=0$.∵当$x>0$时,$-x<0$,$f(-x)=(-x)^{\frac13}+2^{-x}-1=-f(x)$,∴当 $x>0$ 时,$f(x)=x^{\frac13}-2^{-x}+1$.∴$f(x)=\{x^{\frac13}+2^x-1,x<0,x^{\frac13}-2^{-x}+1,x\geqslant0$.

14. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$ [解析] 由题可得函数 $f(x)$为奇函数,不等式 $f(x)>f(-x)$等价于 $f(x)>-f(x)$,即 $f(x)>0$.当 $x\geqslant0$ 时,由 $f(x)=x^2-2x>0$,得 $x>2$;当 $x<0$ 时,由 $f(x)=-x^2-2x>0$,得$-2<x<0$.综上所述,$-2<x<0$ 或 $x>2$,所以不等式 $f(x)>f(-x)$的解集为$(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

15. 解:(1)将 $f(x)=-f(4-x)$中的 x 用$-x$ 替换,得 $f(-x)=-f(x+4)$,又 $f(x+2)=f(-x)$,
所以 $f(x+4)=-f(x+2)$,将 x 用 $x-2$ 替换,得 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(-x)=-f(x)$,$f(x+4)=f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数,且是周期为 4 的周期函数.
当 $x\in[-2,0]$时,$f(x)=-f(-x)=x^2+2x$,所以当 $x\in[2,4]$时,$f(x)=(x-4)^2+2(x-4)=x^2-6x+8$.
(2)由(1)知 $f(x)$是周期为 4 的周期函数,且 $f(0)=0,f(1)=1,f(2)=0,f(3)=-1$,
所以 $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(2019)=505[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)]=0$.

16. 解:(1)因为 $f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数,
所以 $f(0)=0$,即$\frac{b-1}{a+2}=0$,解得 $b=1$,
所以 $f(x)=\frac{1-2^x}{a+2^{x+1}}$,
又 $f(1)=-f(-1)$,所以$\frac{1-2}{a+4}=-\frac{1-\frac12}{a+1}$,
解得 $a=2$.
(2)由(1)知 $f(x)=\frac{1-2^x}{2+2^{x+1}}=-\frac12+\frac{1}{2^x+1}$,
易知 $f(x)$在 **R** 上为减函数.
因为 $f(x)$是奇函数,
所以不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 等价于 $f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)=f(k-2t^2)$,
又因为 $f(x)$为减函数,所以 $t^2-2t>k-2t^2$.
由题意知,对任意 $t\in$ **R**,$3t^2-2t-k>0$ 恒成立,
所以 $\Delta=4+12k<0$,解得 $k<-\frac13$.

17. 0 [解析] 根据题意,$f(x+1)$为偶函数,则函数 $f(x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称,则有 $f(-x)=f(2+x)$.由函数 $f(x+2)$为奇函数,得函数 $f(x)$的图像关于点(2,0)对称,则有$-f(-x)=f(4+x)$,所以 $f(x+4)=-f(x+2)$,设 $t=x+2$,则 $f(t+2)=-f(t)$,所以$f(t+4)=-f(t+2)=f(t)$,所以函数 $f(x)$是周期为 4 的周期函数.又由函数 $f(x)$的图像关于点(2,0)对称,可得 $f(1)+f(3)=0$ 且 $f(2)=0$,由 $f(2)=-f(0)=0$,可得 $f(0)=0$,所以 $f(4)=0$.故$\sum_{i=1}^{2019}f(i)=f(1)+f(2)+\cdots+f(2019)=[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+\cdots+[f(2013)+f(2014)+f(2015)]+[f(2017)+f(2018)+f(2019)]=f(1)+f(2)+f(3)=0$.

18. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ [解析] ∵$f(x)$为奇函数,∴$f(-x)=-f(x)$.设 $x<0$,则$-x>0$,$f(-x)=3(-x)^2=3x^2$,∴当 $x<0$ 时,$f(x)=-3x^2$,故 $f(x)=\begin{cases}3x^2(x\geqslant0),\\-3x^2(x<0),\end{cases}$ 从而 $4f(x)=\{12x^2(x\geqslant0),-12x^2(x<0)$,又 $f(2x)=\begin{cases}3\cdot(2x)^2(x\geqslant0),\\-3\cdot(2x)^2(x<0),\end{cases}$ ∴$4f(x)=f(2x)$,故不等式 $f(x+m^2)\geqslant4f(x)$可转化为 $f(x+m^2)\geqslant f(2x)$.又 $f(x)$为 **R** 上的增函数,∴$x+m^2\geqslant2x$,即 $m^2\geqslant x$ 对任意的 $x\in[m,m+2]$恒成立,∴$m^2\geqslant m+2$,解得 $m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant2$.

课时作业(八)

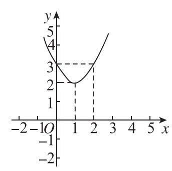
1. C 2. A 3. B 4. C 5. -2

6. B [解析] 设 $f(x)=x^\alpha$,∵$f(x)$的图像过点$(2,\sqrt2)$,∴$f(2)=2^\alpha=\sqrt2$,则 $\alpha=\frac12$,∴$f(x)=\sqrt x$,∴$y=\sqrt x+1-x=-\left(\sqrt x-\frac12\right)^2+\frac54$,
∴所求最大值为$\frac54$.故选 B.

7. C [解析] 由 $x-x^2\geqslant0$ 得 $0\leqslant x\leqslant1$,所以 $y=\begin{cases}x^2-x+1(0\leqslant x\leqslant1),\\-x^2+x+1(x<0\text{ 或 }x>1),\end{cases}$ 由此可得函数图像为 C.

8. B [解析] ∵幂函数 $f(x)=x^m$ 的图像过点(2,4),∴$4=2^m$,解得 $m=2$,∴$a=2^{\frac14}>1$,$0<b=\log_3 2<1$,$c=\cos 2<\cos\frac{\pi}{2}=0$,∴$c<b<a$.故选 B.

9. C [解析] 作出函数 $y=x^2-2x+3$ 的图像,如图所示,由图可知,当 $x=1$ 时,y 最小,最小值是 2,当 $x=0$ 或 $x=2$ 时,$y=3$,因为函数 $y=x^2-2x+3$ 在闭区间$[0,m]$上的最大值为 3,最小值为 2,所以实数 m 的取值范围是$[1,2]$.故选 C.



10. A [解析] ∵函数 $f(x)=-2x^2+bx+c$ 在 $x=1$ 时有最大值 1,
∴$\begin{cases}\frac b4=1,\\-2+b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=4,\\c=-1,\end{cases}$ ∴$f(x)=-2x^2+4x-1$.∵$f(x)\leqslant1$,∴$\left[\frac1n,\frac1m\right]\subseteq(-\infty,1]\Rightarrow\frac1m\leqslant1\Rightarrow m\geqslant1$,∴$f(x)$在$[m,n]$上单调递减,∴$\{f(m)=\frac1m,f(n)=\frac1n$,
∴m,n 分别为方程 $f(x)=\frac1x$ 的两个不同的根.由 $f(x)=\frac1x$,得$-2x^2+4x-1=\frac1x$,即 $2x^3-4x^2+x+1=0$,即$(x-1)(2x^2-2x-1)=0$,解得$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=\frac{1-\sqrt3}{2},\\x_3=\frac{1+\sqrt3}{2},\end{cases}$ 又∵$1\leqslant m<n$,
∴$\begin{cases}m=1,\\n=\frac{1+\sqrt3}{2},\end{cases}$ ∴$m+n=\frac{3+\sqrt3}{2}$.

11. B [解析] 由于函数 $f(x)$为 **R** 上的偶函数,因此只需考虑函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性即可.由于函数 $f(x)$在区间$[3,+\infty)$和$[-2,-1]$上均为增函数,所以,函数 $f(x)$在区间$[1,2]$上为减函数,在区间$[3,+\infty)$上为增函数,所以 $2\leqslant-\frac a2\leqslant3$,解得$-6\leqslant a\leqslant-4$,因此,实数 a 的取值范围是$[-6,-4]$.故选 B.

12. D [解析] 设 $x<0$,则$-x>0$,有 $f(-x)=(-x-1)^2=(x+1)^2$,又∵$f(-x)=f(x)$,∴当$x<0$ 时,$f(x)=(x+1)^2$,∴函数 $f(x)$在$\left[-2,\frac12\right]$上的最大值为 1,最小值为 0.依题意,当 $x\in\left[-2,\frac12\right]$时,$n\leqslant f(x)\leqslant m$ 恒成立,∴$n\leqslant0,m\geqslant1$,即 $m-n\geqslant1$,故 $m-n$ 的最小值为 1.

13. $(-\infty,1]$ [解析] 因为 $f(x)=x^2-2x+3$,所以 $f(x-a)=(x-a)^2-2(x-a)+3=x^2-(2a+2)x+a^2+2a+3$,其图像的对称轴方程为 $x=-\frac{-(2a+2)}{2}=a+1$.因为函数 $y=f(x-a)$在$(2,+\infty)$上是增函数,所以 $a+1\leqslant2$,得 $a\leqslant1$,即 a 的取值范围为$(-\infty,1]$.

14. 解:(1)因为函数 $f(x)$为偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,得 $a=1$,所以 $f(x)=x^2+4$,因为$-1\leqslant x\leqslant2$,所以 $4\leqslant f(x)\leqslant8$,故所求值域为$[4,8]$.
(2)若 $f(x)$在区间$(-\infty,2]$上是减函数,则 $a-1\geqslant2$,即 $a\geqslant3$.
因为 $1<a-1<a$,所以当 $x\in[1,a-1]$时,函数 $f(x)$单调递减,当 $x\in(a-1,a]$时,函数 $f(x)$单调递增,故当 $x\in[1,a]$时,$f(x)_{\max}=\max\{f(1),f(a)\}$.$f(1)=7-2a$,$f(a)=-a^2+2a+4$,
$f(1)-f(a)=(7-2a)-(-a^2+2a+4)=a^2-4a+3=(a-2)^2-1$,
因为 $a\geqslant3$,所以 $f(1)-f(a)\geqslant0$,
所以 $f(1)\geqslant f(a)$,故 $f(x)$在$[1,a]$上的最大值为 $7-2a$.

15. 解:(1)根据 $f(2)=9$,可得 $4a+c=17$.
又由函数 $f(x)$的值域为$[0,+\infty)$,知 $a>0$ 且 $\Delta=16-4ac=0$,即 $ac=4$,
∴$\begin{cases}a=\frac14,\\c=16\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\c=1.\end{cases}$
又 $f(c)<a$,∴$ac^2-4c+c<a$,
∴$a=4,c=1$,∴$f(x)=4x^2-4x+1$.
(2)由(1)可得 $f(x)$的图像的对称轴方程为 $x=\frac12$,则当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)$的最大值为 $f(-1)=9$.
若对任意 $x\in[1,2]$,存在 $x_0\in[-1,1]$,使得 $g(x)<f(x_0)$,
则 $g(x)=\frac{4x^2-4x+1+kx-3}{x}<9$ 对任意$x\in[1,2]$恒成立,
即 $4x^2+(k-13)x-2<0$ 对任意 $x\in[1,2]$恒成立.
设 $h(x)=4x^2+(k-13)x-2$,
则$\begin{cases}h(1)<0,\\h(2)<0,\end{cases}$即$\begin{cases}k<11,\\k<6,\end{cases}$
解得 $k<6$,∴k 的取值范围是$(-\infty,6)$.

16. -3 $\left[\frac14,1\right]$ [解析] 当 $a=0$ 时,$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1,-3\leqslant x\leqslant0,\\-x^2+2x,0<x\leqslant3.\end{cases}$ 当$-3\leqslant x\leqslant0$ 时,$f(x)=(x+1)^2-2$,当 $x=-1$ 时,$f(x)$取得最小值-2;当 $0<x\leqslant3$ 时,$f(x)=-(x-1)^2+1$,当 $x=3$ 时,$f(x)$取得最小值-3.所以,当 $a=0$ 时,$f(x)$的最小值为-3.当$-3\leqslant x\leqslant0$ 时,$f(x)\leqslant|x|$恒成立,即 $x^2+2x+a-1\leqslant-x$恒成立,即 $a\leqslant-x^2-3x+1$ 恒成立,令 $g(x)=-x^2-3x+1=-\left(x+\frac32\right)^2+\frac{13}{4}$,当$-3\leqslant x\leqslant0$ 时,$g(x)$有最小值 $g(0)=g(-3)=1$,所以 $a\leqslant1$;当 $0<x\leqslant3$ 时,$f(x)\leqslant|x|$恒成立,即$-x^2+2x-a\leqslant x$ 恒成立,即 $a\geqslant-x^2+x$ 恒成立,令 $h(x)=-x^2+x=-\left(x-\frac12\right)^2+\frac14$,当 $0<x\leqslant3$ 时,$h(x)$有最大值 $h\left(\frac12\right)=\frac14$,所以 $a\geqslant\frac14$.综上,实数 a 的取值范围是$\left[\frac14,1\right]$.

17. $\left(-\infty,\frac15\right)\cup(1,+\infty)$ [解析] 由 $f(-3-$

$x)=f(1+x)$,可知函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-1$ 对称.在 $(-\infty,-1)$ 内任取两个不相等的实数 x_1,x_2,$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$ 恒成立,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,由对称性可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.不妨设 $f(x)=(x+1)^2$,则由 $f(2a-1)<f(3a-2)$ 可得 $4a^2<(3a-1)^2$,整理得 $5a^2-6a+1>0$,即 $(a-1)(5a-1)>0$,解得 $a<\frac{1}{5}$ 或 $a>1$,所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup(1,+\infty)$.

课时作业(九)

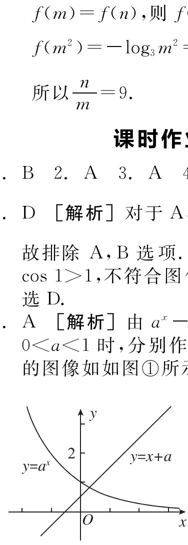
1. C 2. C 3. A 4. 4
5. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$
6. A [解析]函数 $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的定义域为 **R**,且 $f(-x)=3^{-x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=-3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x=-\left[3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x\right]=-f(x)$,即函数 $f(x)$ 是奇函数,又 $y=3^x$,$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 **R** 上都是增函数,所以函数 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数.故选A.
7. B [解析]因为指数函数 $y=\left(\frac{3}{7}\right)^x$ 在 **R** 上是减函数,$\frac{5}{7}>\frac{3}{7}$,所以 $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{5}{7}}<\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{7}}$,即 $b<c$.又因为幂函数 $y=x^{\frac{3}{7}}$ 在 **R** 上是增函数,$\frac{5}{7}>\frac{3}{7}$,所以 $\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{3}{7}}>\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{7}}$,即 $c<a$,所以 $b<c<a$.故选B.
8. C [解析] $f(x)$ 的定义域为 **R**,$f(x)=\frac{2^x+3}{1+2^{x+1}}=\frac{\frac{1}{2}(2^{x+1}+1)+\frac{5}{2}}{1+2^{x+1}}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1+2^{x+1}}$,因为 $2^{x+1}>0$,所以 $0<\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1+2^{x+1}}<\frac{5}{2}$,所以 $f(x)$ 的值域为 $\left(\frac{1}{2},3\right)$,所以 $y=[f(x)]$ 的值域为 $\{0,1,2\}$,故选C.
9. A [解析]由 $f(x)=e^{|x|-x^2}$,可得 $f(0)=1$,排除选项C,D;由指数函数的图像及性质可得函数 $f(x)>0$ 恒成立,排除选项B.故选A.
10. D [解析]因为 $0<a<1$,所以 $0<1-a<1$,所以 $y=(1-a)^x$ 是减函数,又因为 $0<b<1$,所以 $\frac{1}{b}>b$,$b>\frac{b}{2}$,所以 $(1-a)^{\frac{1}{b}}<(1-a)^b$,$(1-a)^b<(1-a)^{\frac{b}{2}}$,所以A,B两项均错;又 $1<1+a<1+b$,所以 $(1+a)^a<(1+b)^a$,所以C项错;因为 $0<1-b<1-a<1$,所以 $(1-a)^a>(1-a)^b>(1-b)^b$,所以D项正确.故选D.
11. D [解析]令 $t=2^x$,则 $y=t^2-3t+3=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.当 $x\in[2,4]$ 时,$t\in[4,16]$,此时 $y\in[7,211]$,不满足题意;当 $x\in(-\infty,0]$ 时,$t\in(0,1]$,此时 $y\in[1,3)$,不满足题意;当 $x\in(0,1]\cup[2,4]$ 时,$t\in(1,2]\cup[4,16]$,此时 $y\in\left[\frac{3}{4},1\right]\cup[7,211]$,不满足题意;当 $x\in(-\infty,0]\cup[1,2]$ 时,$t\in(0,1]\cup[2,4]$,此时 $y\in[1,7]$,满足题意.故选D.
12. 解:(1)当 $a=2$ 时,$f(x)=2^x-2\cdot4^x$,由 $f(x)\geqslant0$,得 $2^x\geqslant2^{2x+1}$,即 $x\geqslant2x+1$,得 $x\leqslant-1$,故实数 x 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.
(2)由题可知 $f(x)>-1$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立,
即 $a-a^2>-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立.
因为函数 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty,1]$ 上均为减函数,
所以 $y=-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$ 在 $(-\infty,1]$ 上为增函数,且函数在 $(-\infty,1]$ 上的最大值为 $-\left[\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^1\right]=-\frac{3}{4}$.
因此 $a-a^2>-\frac{3}{4}$,解得 $-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$,又 a 为整数,所以 a 的值是0或1.
13. (1)e (2)$t<-1$ [解析](1)当 $t=1$ 时,$f(x)=e^{|x-1|}$,$f(0)=e$,$g(0)=e$,所以 $h(0)=e$.(2)当 $x<0$ 时,$g(x)=-x+e>e$,所以有 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}>e$ 恒成立;当 $x\geqslant0$ 时,$g(x)\leqslant e$,所以只要 $f(x)>e$ 即可,即函数 $f(x)=e^{|x-t|}>e$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立,即 $|x-t|>1$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立,所以当 $x\geqslant0$ 时,$x-t>1$ 恒成立或 $x-t<-1$ 恒成立(不符,舍去),即 $x>t+1$ 恒成立,所以 $t+1<0$,得 $t<-1$.
14. $(-\infty,-\sqrt{2}]$ [解析]由已知得 $g(x)+h(x)=2^x$,①所以 $g(-x)+h(-x)=2^{-x}$,又因为 $g(x)$ 为奇函数,$h(x)$ 为偶函数,所以 $-g(x)+h(x)=2^{-x}$,②联立①②解得 $h(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$,$g(x)=\frac{1}{2}(2^x-2^{-x})$.$2a\cdot g(x)+h(2x)=0$ 在 $(0,2]$ 上有解,即 $a(2^x-2^{-x})+\frac{1}{2}(2^{2x}+2^{-2x})=0$ 在 $(0,2]$ 上有解.令 $t=2^x-2^{-x}$,当 $x\in(0,2]$ 时,$t\in\left(0,\frac{15}{4}\right]$,$2^{2x}+2^{-2x}=t^2+2$.
所以 $a=-\frac{t^2+2}{2t}=-\frac{1}{2}\left(t+\frac{2}{t}\right)$ 在 $t\in\left(0,\frac{15}{4}\right]$ 时有解.
易知 $y=-\frac{1}{2}\left(t+\frac{2}{t}\right)$ 在 $\left(0,\frac{15}{4}\right]$ 上的取值范围为 $(-\infty,-\sqrt{2}]$,所以 $a\leqslant-\sqrt{2}$.

课时作业(十)

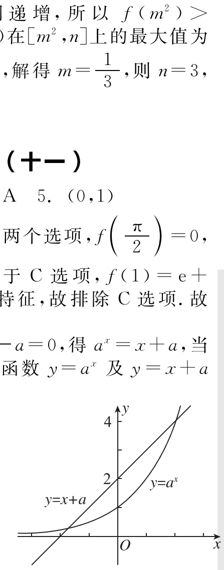
1. A 2. B 3. A 4. D 5. -6
6. A [解析]由题可知,$f(x)=\frac{x\ln|x|}{|x|}=\begin{cases}\ln x,x>0,\\-\ln(-x),x<0\end{cases}$ 是奇函数,故排除B,C;当 $x>1$ 时,$f(x)>0$,故排除D.故选A.
7. D [解析]由 $f(9)+\log_4 3=f(-a^2)$,得 $\log_{16}9+\log_4 3=\log_{\frac{1}{2}}a^2$,∴ $\log_2 3=\log_{\frac{1}{2}}a^2$,即 $\log_2 3=\log_2\frac{1}{a^2}$,∴ $\frac{1}{a^2}=3$,所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选D.
8. D [解析] $a=f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 32}{10}$,$c=f(5)=\frac{\ln 5}{5}=\frac{\ln 25}{10}$,根据对数函数的单调性得到 $a>c$.$a=f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 8}{6}$,$b=f(3)=\frac{\ln 3}{3}=\frac{\ln 9}{6}$,由对数函数的单调性得到 $a<b$,∴ $c<a<b$.故选D.
9. C [解析]令 $t=ax^2+2x+8$,由已知得 t 的最大值是9,所以易得 $a=-1$,所以 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8)$.由 $t>0$,可得 $-2<x<4$,当 $x\in(-2,1)$ 时,函数 $t=-x^2+2x+8$ 单调递增,当 $x\in[1,4)$ 时,函数 $t=-x^2+2x+8$ 单调递减,根据复合函数的单调性得C选项正确.
10. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ [解析] $\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\frac{x-1+2}{x-1}=\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$,∵ $1+\frac{2}{x-1}>0$ 且 $1+\frac{2}{x-1}\neq1$,∴ $\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\neq0$,∴ $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
11. 9 [解析]令 $g(k)=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(k)$,因为 $f(k)=\log_{(k+1)}(k+2)=\frac{\lg(k+2)}{\lg(k+1)}$,所以 $g(k)=\frac{\lg 3}{\lg 2}\times\frac{\lg 4}{\lg 3}\times\cdots\times\frac{\lg(k+2)}{\lg(k+1)}=\log_2(k+2)$.令 $g(k)=m$,要使 $g(k)$ 成为企盼数,则 $k+2=2^m$,$m\in\mathbf{N}^*$,又 $k\in[1,2020]$,∴ $2^m\in[3,2022]$.∵ $2^2=4$,$2^3=8$,…,$2^{10}=1024$,$2^{11}=2048$,∴ $m=2,3,\cdots,10$.因此在区间 $[1,2020]$ 上这样的企盼数共有9个.
12. 解:(1)∵ $f(x)=\log_2(1+a\cdot2^x+4^x)$,
∴ $f(-1)=\log_2\left(1+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)$,
$f(2)=\log_2(1+4a+16)$,
∵ $f(2)=f(-1)+4$,
∴ $\log_2(4a+17)=\log_2\left(\frac{a}{2}+\frac{5}{4}\right)+4$,
解得 $a=-\frac{3}{4}$.
(2)∵ $f(x)\geqslant x-1$ 恒成立,
∴ $\log_2(1+a\cdot2^x+4^x)\geqslant x-1$,
即 $1+a\cdot2^x+4^x\geqslant2^{x-1}$,
分离参数 a 得,$a\geqslant\frac{1}{2}-(2^x+2^{-x})$,
∵ $x\geqslant1$,∴ $2^x+2^{-x}\geqslant\frac{5}{2}$,当 $x=1$ 时,等号成立,∴ $a\geqslant\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$,
即实数 a 的取值范围为 $[-2,+\infty)$.
13. B [解析]函数 $f(x)=\log_m(m^x+t^2)$ $(m>0$ 且 $m\neq1)$ 是"半保值函数",且定义域为 **R**,当 $m>1$ 时,$z=m^x+t^2$ 在 **R** 上单调递增,$y=\log_m z$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,可得 $f(x)$ 为 **R** 上的增函数;同样当 $0<m<1$ 时,$f(x)$ 仍为 **R** 上的增函数,所以 $f(x)$ 在其定义域 **R** 上为增函数.因为函数 $f(x)=\log_m(m^x+t^2)$ $(m>0$ 且 $m\neq1)$ 是"半保值函数",所以 $y=\log_m(m^x+t^2)$ 与 $y=\frac{1}{2}x$ 的图像有两个不同的交点,即方程 $\log_m(m^x+t^2)=\frac{1}{2}x$ 有两个不同的根,方程等价于 $m^x+t^2=m^{\frac{x}{2}}$,即 $m^x-m^{\frac{x}{2}}+t^2=0$,令 $u=m^{\frac{x}{2}}$,$u>0$,则方程 $u^2-u+t^2=0$ 有两个不同的正数根,可得 $1-4t^2>0$,且 $t^2>0$,解得 $t\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$.故选B.
14. 9 [解析]因为 $f(x)=|\log_3 x|=\begin{cases}-\log_3 x,0<x<1,\\\log_3 x,x\geqslant1,\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.由 $0<m<n$ 且 $f(m)=f(n)$,
可得 $\begin{cases}0<m<1,\\n>1,\\\log_3 n=-\log_3 m,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<m<1,\\n>1,\\mn=1,\end{cases}$ 所以 $0<m^2<m<1<n$,则 $f(x)$ 在 $[m^2,1)$ 上单调递减,在 $[1,n]$ 上单调递增,所以 $f(m^2)>f(m)=f(n)$,则 $f(x)$ 在 $[m^2,n]$ 上的最大值为 $f(m^2)=-\log_3 m^2=2$,解得 $m=\frac{1}{3}$,则 $n=3$,所以 $\frac{n}{m}=9$.

课时作业(十一)

1. B 2. A 3. A 4. A 5. $(0,1)$
6. D [解析]对于A,B两个选项,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,故排除A,B选项.对于C选项,$f(1)=e+\cos1>1$,不符合图像特征,故排除C选项.故选D.
7. A [解析]由 $a^x-x-a=0$,得 $a^x=x+a$,当 $0<a<1$ 时,分别作出函数 $y=a^x$ 及 $y=x+a$ 的图像如图①所示,



图①

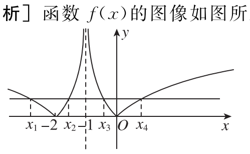


图②

显然,两个函数的图像只有一个交点,故方程 $a^x-x-a=0$ 只有一个解.当 $a>1$ 时,分别作出函数 $y=a^x$ 及 $y=x+a$ 的图像如图②所示,显然,两个函数的图像有两个交点,故 $a^x-x-a=0$ 有两个解.所以实数 a 的取值范围是 $a>1$.故选A.

8. A [解析] 由题意,函数 $f(x)=\ln\frac{x}{4-x}$,可得 $\frac{x}{4-x}>0$,解得 $0<x<4$,令 $t=\frac{x}{4-x}=-1-\frac{4}{x-4}$,故 $t=\frac{x}{4-x}$在(0,4)上为增函数,所以函数 $f(x)=\ln\frac{x}{4-x}$在(0,4)上为增函数,可排除B,C项,又 $f(x)$满足 $f(4-x)=-f(x)$,所以函数 $f(x)=\ln\frac{x}{4-x}$的图像关于点(2,0)对称,故选 A.

9. A [解析] 函数 $f(x)$的图像如图所示,

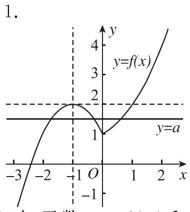


函数 $f(x)=|\ln|1+x||$的图像关于直线 $x=-1$ 对称,即 $x_1+x_4=-2,x_2+x_3=-2$,

$\therefore f\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{2}\right)=f(-2)=0$. 故选 A.

10. 1 6 [解析] 由题意,函数 $f(x)=\frac{ax+2}{x-6}=\frac{a(x-6)+6a+2}{x-6}=a+\frac{6a+2}{x-6}$,将反比例函数 $y=\frac{6a+2}{x}$的图像向右平移 6 个单位,再向上平移 a 个单位,可得函数 $f(x)=a+\frac{6a+2}{x-6}$的图像,所以结合反比例函数 $y=\frac{6a+2}{x}$的性质及函数的图像平移可知,函数 $f(x)$的图像的对称中心为$(6,a)$,又因为$f(x)$的图像的对称中心为$(b,1)$,所以$\begin{cases}b=6,\\a=1.\end{cases}$

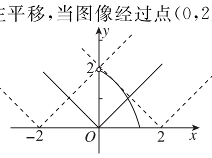
11. (1,2) [解析] 方程 $f(x)-a=0$ 有三个不同的实数解,等价于函数 $y=f(x)$ 和 $y=a$ 的图像有三个交点,画出函数 $y=f(x)$和 $y=a$ 的图像如图所示,



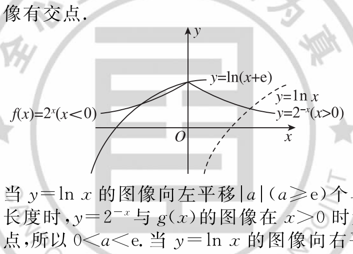
由图像可知当 $a\in(1,2)$时,函数 $y=f(x)$和函数 $y=a$ 的图像有三个交点,故 a 的取值范围是(1,2).

12. $\left(-2,\frac{9}{4}\right]$ [解析] 在同一平面直角坐标系内,画出函数$y=2-x^2(y\geqslant0,x>0)$和函数 $y=|x|$的图像,如图所示,

将 $y=|x|$的图像向左平移,当图像经过点(0,2)时,$a=-2$. 将 $y=|x|$的图像向右平移,当图像与抛物线 $y=2-x^2(y\geqslant0,x>0)$相切时,则$\begin{cases}y=-(x-a),\\y=2-x^2\end{cases}\Rightarrow x^2-x+a-2=0$,由 $\Delta=0$,可得$a=\frac{9}{4}$. 数形结合可得实数 a 的取值范围为$\left(-2,\frac{9}{4}\right]$.

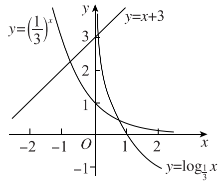


13. B [解析] 在同一平面直角坐标系中,作出函数 $f(x)=2^x(x<0)$与 $g(x)=\ln(x+a)$的图像,将 $f(x)=2^x(x<0)$的图像关于 y 轴对称得 $y=2^{-x}(x>0)$的图像,如图所示,则问题等价于当 $x>0$ 时 $y=2^{-x}$的图像与 $g(x)$的图像有交点,



当 $y=\ln x$ 的图像向左平移$|a|(a\geqslant e)$个单位长度时,$y=2^{-x}$与 $g(x)$的图像在 $x>0$ 时无交点,所以 $0<a<e$. 当 $y=\ln x$ 的图像向右平移$|a|(a<0)$个单位长度时,$y=2^{-x}$与 $g(x)$的图像总存在交点,当 $a=0$ 时,显然满足题意. 综上,$a<e$. 故选 B.

14. D [解析] 方程 $x+3=\log_{\frac{1}{3}}x,\left(\frac{1}{3}\right)^x=\log_{\frac{1}{3}}x,\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+3$ 的根的问题转化为函数 $y=x+3$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 和 $y=x+3$ 的图像的交点横坐标的问题.



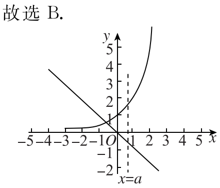
在同一平面直角坐标系中,分别画出函数 $y=x+3,y=\log_{\frac{1}{3}}x,y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像如图所示,则由图可得 $c<a<b$. 故选 D.

课时作业(十二)

1. A 2. C 3. D 4. C 5. 2

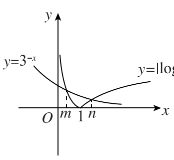
6. B [解析] 由题意可知 x_0 是方程 $2^x+x=8$ 的解,所以 $2^{x_0}+x_0=8$,令 $f(x)=2^x+x-8$,则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 由 $f(2)=-2<0$,$f(3)=3>0$,得 $x_0\in(2,3)$,又 $x_0\in(n,n+1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $n=2$. 故选 B.

7. D [解析] 函数$y=2^x$ 和函数 $y=-x$ 的图像如图所示,由图可知,若函数 $f(x)$存在零点,则实数 a 的取值范围是$(0,+\infty)$. 故选 D.



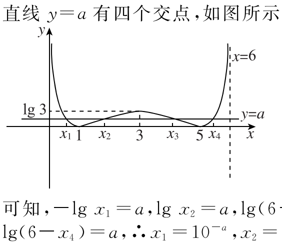
8. B [解析] 当 $x\leqslant1$ 时,$f(x)=x^2e^x$,令 $f(x)=0$,得 $x=0$,所以$f(x)$在$(-\infty,1]$上有一个零点;因为 $g(x)=\ln x$与 $h(x)=-\sqrt{-x^2+2x}$ 在$(1,+\infty)$上都为增函数,所以 $f(x)=\ln x-\sqrt{-x^2+2x}$在$(1,+\infty)$上为增函数,且 $f(1)=-1<0$,$f(2)=\ln 2>0$,所以当 $x>1$ 时,$f(x)=\ln x-\sqrt{-x^2+2x}$有一个零点. 综上所述,函数 $f(x)=\begin{cases}x^2e^x,x\leqslant1,\\\ln x-\sqrt{-x^2+2x},x>1\end{cases}$有两个零点. 故选 B.

9. C [解析] 令$f(x)=0$,得$|\log_a x|=3^{-x}$,由题意知 $y=|\log_a x|$与$y=3^{-x}$的图像有两个交点. 不妨设 $m<n,a>1$,分别作出两个函数的图像如图所示,



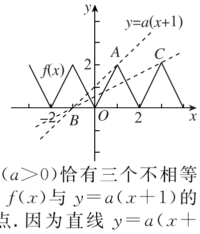
$\therefore-\log_a m>\log_a n$,$\therefore\log_a m+\log_a n<0$,即 $\log_a(mn)<0$,$\therefore mn<1$. 同理,当$0<a<1$时,$mn<1$也成立. 故选 C.

10. B [解析] 由题意可知,$f(x)$有四个零点等价于函数 $g(x)=\begin{cases}|\lg x|,0<x\leqslant3,\\|\lg(6-x)|,3<x<6\end{cases}$的图像与直线 $y=a$ 有四个交点,如图所示,



由图可知,$-\lg x_1=a,\lg x_2=a,\lg(6-x_3)=a,-\lg(6-x_4)=a$,$\therefore x_1=10^{-a},x_2=10^a,6-x_3=10^a,6-x_4=10^{-a}$,即 $x_1=10^{-a},x_2=10^a$,$x_3=6-10^a,x_4=6-10^{-a}$,所以 $x_1x_2=1$,$\sum_{i=1}^{4}x_i=10^a+10^{-a}+6-10^a+6-10^{-a}=12$,故 $x_1x_2+\sum_{i=1}^{4}x_i=13$. 故选 B.

11. A [解析] 由$f(x+2)=f(x)$,可得函数 $f(x)$的周期为 2,又 $f(x)$为偶函数,当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=2x$,所以函数 $f(x)$的图像如图所示,

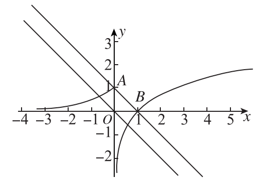


方程 $ax+a-f(x)=0(a>0)$恰有三个不相等的实数根,等价于函数 $f(x)$与 $y=a(x+1)$的图像有三个不同的交点. 因为直线 $y=a(x+1)$过定点 $B(-1,0)$,所以当直线过点 $A(1,2)$时,与函数 $f(x)$的图像有两个交点,此时 $a=1$. 当直线过点$C(3,2)$时,与函数 $f(x)$的图像恰好有四个交点,此时 $a=\frac{1}{2}$. 结合图像,可得实数 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},1\right)$. 故选 A.

12. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ [解析] 因为 $2^x>0$,所以 $f(x)>1+\log_2 a$,又由指数函数的单调性可知,$f(x)=2^x+1+\log_2 a$ 单调递增,所以函数 $f(x)=2^x+1+\log_2 a$ 有零点,只需 $1+\log_2 a<0$,解得 $0<a<\frac{1}{2}$.

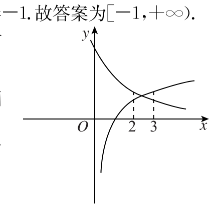
13. 2 [解析] 令 $f(x)=x^2-2x-1-|x-1|=0$,则$(x-1)^2-|x-1|-2=0$. 设 $t=|x-1|\geqslant0$,则 $t^2-t-2=0$,解得 $t=-1$(舍去)或 $t=2$. 所以 $t=|x-1|=2$,解得$x=-1$ 或 $x=3$. 所以函数 $f(x)$有两个零点-1,3,它们的和为$-1+3=2$.

14. $[-1,+\infty)$
[解析] $\because g(x)$存在两个零点,$\therefore y=f(x)$与 $y=-x-k$ 的图像有且仅有两个交点,分别画出$y=f(x)$与 $y=-x-k$ 的图像,如图所示.



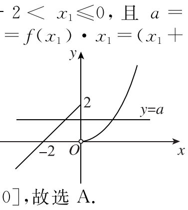
由图易知$-k\leqslant1$,即 $k\geqslant-1$. 故答案为$[-1,+\infty)$.

15. A [解析] 令 $f(x)=0$,得 $\ln x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-a$,在同一平面直角坐标系中分别作出函数 $y=\ln x$ 与 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-a$ 的图像



如图所示. 因为 $y=\ln x$ 为增函数,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-a$为减函数,要使交点的横坐标落在区间(2,3)内,则$\begin{cases}\ln 2<\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}-a,\\\ln 3>\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}-a,\end{cases}$即 $\frac{1}{4}-\ln 3<a<\frac{1}{2}-\ln 2$. 故选 A.

16. A [解析] 函数$f(x)=\begin{cases}2^x-1,x>0,\\x+2,x\leqslant0\end{cases}$的图像如图所示,函数$y=f(x)-a$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则 $-2<x_1\leqslant0$,且 $a=f(x_1)=x_1+2$,所以 $ax_1=f(x_1)\cdot x_1=(x_1+2)\cdot x_1=x_1^2+2x_1=(x_1+1)^2-1$,其中$-2<x_1\leqslant0$. 当 $x_1=0$ 时,ax_1 取得最大值 0,当 $x_1=-1$ 时,ax_1取得最小值-1,所以 ax_1 的取值范围是$[-1,0]$. 故选 A.



课时作业(十三)

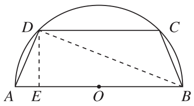
1. C 2. B 3. C 4. D 5. 33 000
6. B 7. C 8. D

9. C [解析] 设该职工的月实际用水为 x 立方米,所缴水费为 y 元,由题意得
$y=\begin{cases}3x,0\leqslant x\leqslant10,\\30+5(x-10),x>10,\end{cases}$
即 $y=\begin{cases}3x,0\leqslant x\leqslant10,\\5x-20,x>10.\end{cases}$
根据题意得该职工这个月的实际用水量超过 10 立方米,所以 $5x-20=55$,解得 $x=15$. 故选 C.

10. D [解析] 由题意可得当 $x=0$ 时,$y=192$,当 $x=22$ 时,$y=48$,代入 $y=e^{kx+b}$ 可得$\begin{cases}e^b=192,\\e^{22k+b}=48,\end{cases}$即$\begin{cases}e^{11k}=\frac{1}{2},\\e^b=192,\end{cases}$则当 $x=33$ 时,$y=e^{33k+b}=\frac{1}{8}\times192=24$. 故选 D.

11. 10 [解析] 如图,作 $DE\perp AB$ 于 E,连

接 BD.



因为 AB 为直径，所以 $\angle ADB=90°$. 在 $Rt\triangle ADB$ 与 $Rt\triangle AED$ 中，$\angle ADB=90°=\angle AED$，$\angle BAD=\angle DAE$，所以 $Rt\triangle ADB\backsim Rt\triangle AED$. 所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AD}$，即 $AE=\frac{AD^2}{AB}$. 设 AD 的长为 x，梯形的周长为 y，又 $AB=4$，所以 $AE=\frac{x^2}{4}$. 所以 $CD=AB-2AE=4-2\times\frac{x^2}{4}=4-\frac{x^2}{2}$，则 $y=AB+BC+CD+AD=4+x+4-\frac{x^2}{2}+x=-\frac{1}{2}x^2+2x+8=-\frac{1}{2}(x-2)^2+10$. 因为 $AD>0$，$AE>0$，$CD>0$，所以 $x>0$，$\frac{x^2}{4}>0$，$4-\frac{x^2}{2}>0$，解得 $0<x<2\sqrt{2}$，所以当 $x=2$ 时，y 有最大值 10，故梯形周长的最大值为 10.

12. 解：(1)由题意知，当 $m=2$ 时，令 $y=2\cdot 2^x+2^{1-x}=2\cdot 2^x+\frac{2}{2^x}=5$，
∵ $0\leqslant x\leqslant 4$，解得 $x=1$，因此，经过 1 min，该物质的温度为 5 ℃.
(2)由题意得 $m\cdot 2^x+2^{1-x}\geqslant 2$ 对一切 $0\leqslant x\leqslant 4$ 恒成立，
由 $m\cdot 2^x+2^{1-x}\geqslant 2$，得 $m\geqslant\frac{2}{2^x}-\frac{2}{2^{2x}}$，令 $t=2^{-x}$，则 $\frac{1}{16}\leqslant t\leqslant 1$，且 $m\geqslant 2t-2t^2$.
构造函数 $f(t)=2t-2t^2=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，
所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$，则 $m\geqslant\frac{1}{2}$.
故实数 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

13. 解：(1)当 $0<x<40$ 时，$W(x)=700x-(10x^2+100x)-250=-10x^2+600x-250$；
当 $x\geqslant 40$ 时，$W(x)=700x-\left(701x+\frac{10\,000}{x}-9450\right)-250=-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)+9200$，
$$\therefore W(x)=\begin{cases}-10x^2+600x-250, & 0<x<40,\\ -\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)+9200, & x\geqslant 40.\end{cases}$$
(2)若 $0<x<40$，则 $W(x)=-10(x-30)^2+8750$，
∴当 $x=30$ 时，则 $W(x)_{max}=8750$.
若 $x\geqslant 40$，则 $W(x)=-\left(x+\frac{10\,000}{x}\right)+9200\leqslant 9200-2\sqrt{10\,000}=9000$，
当且仅当 $x=\frac{10\,000}{x}$，即 $x=100$ 时，$W(x)_{max}=9000$.
∴2020 年产量为 100(千部)时，企业所获利润最大，最大利润是 9000 万元.

14. 解：(1)若选择函数模型 $Q=0.5^v+a$，则该函数在 $v\in[0,3]$ 时为减函数，
这与试验数据相矛盾，所以不选择该函数模型.
若选择函数模型 $Q=k\log_a v+b$，须 $v>0$，这与试验数据在 $v=0$ 时有意义矛盾，
所以不选择该函数模型.
从而只能选择函数模型 $Q=av^3+bv^2+cv$，由试验数据得，
$\begin{cases}a+b+c=0.7,\\ 8a+4b+2c=1.6,\\ 27a+9b+3c=3.3,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+b+c=0.7,\\ 4a+2b+c=0.8,\\ 9a+3b+c=1.1,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}a=0.1,\\ b=-0.2,\\ c=0.8,\end{cases}$
故所求的函数解析式为 $Q=0.1v^3-0.2v^2+0.8v$ $(0\leqslant v\leqslant 3)$.
(2)设超级快艇在 AB 段的航行费用为 y(万元)，则所需时间为 $\frac{3}{v}$(小时)，其中 $0<v\leqslant 3$，
结合(1)知，$y=\frac{3}{v}(0.1v^3-0.2v^2+0.8v)=0.3[(v-1)^2+7]$，
所以当 $v=1$ 时，$y_{min}=2.1$.
故当该超级快艇以 1 百公里/小时的速度航行时可使 AB 段的航行费用最少，且最少航行费用为 2.1 万元.

课时作业（十四）

1. D 2. A 3. A 4. B
5. $\frac{3}{2}$ 6. D 7. A
8. A [解析] 由题意知，函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，可得 $f(0)=0$，即 $f(0)=-m=0$，解得 $m=0$，即当 $x\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)=x^3-2x$，则 $f'(x)=3x^2-2$，所以 $f'(-2)=3\times(-2)^2-2=10$，由奇函数的导函数为偶函数，可知 $f'(-2)=f'(2)=10$，即曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线斜率为 10. 故选 A.
9. B [解析] 由 $y=2x\ln x$，得 $y'=2\times\ln x+2x\times\frac{1}{x}=2\ln x+2$，所以 $y'|_{x=e}=2+2=4$，且 $y|_{x=e}=2e$，所以切线方程为 $y-2e=4(x-e)$，即 $y=4x-2e$，此切线与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为 $\left(\frac{e}{2},0\right)$，$(0,-2e)$，所以切线与坐标轴围成的三角形面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{e}{2}\times 2e=\frac{e^2}{2}$. 故选 B.
10. C [解析] 设直线与曲线切于点 (x_0,y_0) $(x_0\neq 0)$，则切线的斜率 $k=\frac{y_0-1}{x_0-1}=\frac{x_0^3-1}{x_0-1}=x_0^2+x_0+1$，又∵ $y'=3x^2$，∴ $y'|_{x=x_0}=3x_0^2$，
∴ $2x_0^2-x_0-1=0$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}$，
∴过点 $P(1,1)$ 与曲线 $y=x^3$ 相切的直线方程为 $3x-y-2=0$ 或 $3x-4y+1=0$. 故选 C.
11. C [解析] $y'=1+\frac{1}{x}$，当 $x=1$ 时，切线的斜率 $k=2$，切线方程为 $y=2(x-1)+1=2x-1$，因为它与抛物线相切. 所以 $ax^2+(a+2)x+1=2x-1$ 有唯一解，即 $ax^2+ax+2=0$，故 $\begin{cases}a\neq 0,\\ a^2-8a=0,\end{cases}$ 解得 $a=8$. 故选 C.
12. 3 [解析] ∵ $f(x)=(x^2-a)\ln x$，∴ $f'(x)=2x\ln x+\frac{x^2-a}{x}$，∴ $f'(1)=1-a=-2$，得 $a=3$.
13. 5 [解析] 将点 $P(1,4)$ 代入 $y=ax+\frac{b}{x^2}$，得 $a+b=4$. 函数 $y=ax+\frac{b}{x^2}$ 的导函数为 $y'=a-\frac{2b}{x^3}$，由曲线在点 P 处的切线与直线 $x+y+3=0$ 垂直，得曲线在点 P 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=a-2b=1$，联立 $\begin{cases}a+b=4,\\ a-2b=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=3,\\ b=1,\end{cases}$ 所以 $a+2b=5$.
14. 解：(1)由题意得 $f'(x)=x^2-4x+3$，
则 $f'(x)=(x-2)^2-1\geqslant -1$，
即过曲线 C 上任意一点的切线斜率的取值范围是 $[-1,+\infty)$.
(2)设曲线 C 的其中一条切线的斜率为 k，则由(2)中条件并结合(1)中结论可知 $\begin{cases}k\geqslant -1,\\ -\frac{1}{k}\geqslant -1,\end{cases}$
解得 $-1\leqslant k<0$ 或 $k\geqslant 1$，
所以 $-1\leqslant x^2-4x+3<0$ 或 $x^2-4x+3\geqslant 1$，
解得 $x\in(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.
15. 解：(1)由题意，知 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，
所以 $f'(1)=2$，所以切线方程为 $y+1=2(x-1)$，即 $2x-y-3=0$.
(2)由已知，得 $g(x)=x\ln x$，切点坐标为 (e,e)，
由 $g'(x)=\ln x+1$，得 $g'(e)=2$，
所以 l_2 的方程为 $y-e=2(x-e)$，即 $y=2x-e$①.
所以直线 l_1 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，故 l_1 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2e$②，
联立①②，得直线 l_1 与 l_2 交点的坐标为 $\left(\frac{6}{5}e,\frac{7}{5}e\right)$，
又 l_2 与 x 轴的交点为 $\left(\frac{e}{2},0\right)$，$l_1$ 与 x 轴的交点为 $(4e,0)$，
此封闭图形为三角形，底边 $m=4e-\frac{e}{2}=\frac{7e}{2}$，高 $h=\frac{7}{5}e$，
所以三角形面积 $S=\frac{1}{2}mh=\frac{1}{2}\times\frac{7e}{2}\times\frac{7}{5}e=\frac{49}{20}e^2$.
16. B [解析] 设 $P_1(x_1,f(x_1))$，$P_2(x_2,f(x_2))$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)=-\frac{1}{x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}$，故不妨设 $x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，故 $l_1:y=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)-\ln x_1$，整理得到 $l_1:y=-\frac{1}{x_1}x-\ln x_1+1$，$l_2:y=\frac{1}{x_2}(x-x_2)+\ln x_2$，整理得到 $l_2:y=\frac{1}{x_2}x+\ln x_2-1$，所以 $A(0,1-\ln x_1)$，$B(0,\ln x_2-1)$，所以 $|AB|=|2-\ln(x_1x_2)|$. 因为 $l_1\perp l_2$，所以 $-\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$，即 $x_1x_2=1$，所以 $|AB|=2$. 故选 B.
17. $2\sqrt{e}$ [解析] 设 $P(x_0,y_0)$，$f'(x)=2x+2a$，$g'(x)=\frac{4a^2}{x}$. 由题意知，$f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$，即 $x_0^2+2ax_0=4a^2\ln x_0+b$，①$2x_0+2a=\frac{4a^2}{x_0}$，②由②得 $x_0=a$ 或 $x_0=-2a$(舍)，将 $x_0=a$ 代入①，得 $b=3a^2-4a^2\ln a$，$a\in(0,+\infty)$. 令 $h(a)=3a^2-4a^2\ln a$，$a\in(0,+\infty)$，则 $h'(a)=6a-8a\ln a-4a=2a(1-4\ln a)$，当 $a\in(0,e^{\frac{1}{4}})$ 时，$h'(a)>0$，当 $a\in(e^{\frac{1}{4}},+\infty)$ 时，$h'(a)<0$. ∴$h(a)$的最大值是 $h(e^{\frac{1}{4}})=3\sqrt{e}-4\sqrt{e}\ln e^{\frac{1}{4}}=2\sqrt{e}$，即实数 b 的最大值为 $2\sqrt{e}$.

课时作业（十五）

1. D 2. A 3. C 4. B 5. $[0,+\infty)$
6. C [解析] 由题意，得 $f'(x)=6x^2-6mx+6$，由已知条件知当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，设 $g(x)=6x^2-6mx+6$，则 $g(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立. 当 $\Delta=36(m^2-4)\leqslant 0$，即 $-2\leqslant m\leqslant 2$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立；当 $\Delta=36(m^2-4)>0$，即 $m<-2$ 或 $m>2$ 时，则需 $\begin{cases}\frac{m}{2}<1,\\ g(1)=12-6m\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $m<2$，∴ $m<-2$.
∴综上，得 $m\leqslant 2$，∴实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$.
7. A [解析] 构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. 由题意知当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，∴函数 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ∵ $\pi>e$，∴ $g(\pi)>g(e)$，即 $\frac{f(\pi)}{\pi}>\frac{f(e)}{e}$，即 $ef(\pi)>\pi f(e)$. 故选 A.
8. B [解析] 整理 $f(x)=x[f'(x)-\ln x]$，得 $f'(x)=\frac{f(x)}{x}+\ln x$，因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $\frac{f(x)}{x}+\ln x\geqslant 0$，所以 $\frac{f\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}}+\ln\frac{1}{e}\geqslant 0$，整理得 $f\left(\frac{1}{e}\right)\geqslant\frac{1}{e}$. 故选 B.
9. C [解析] 由题意，$\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)=e^x(-\sin x+\cos x-a)\leqslant 0$ 恒成立，即 $a\geqslant\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 恒成立. 当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，∴ $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，∴ $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(-1,\sqrt{2}\right]$，∴实数 a 的取值范围是