2021

CANPOINT

新高考

2017课程标准版

CANPOINT

全品高考复习方案

主编：肖德好

本册主编：邵立武

编　　者：邵立武　刘东国　孙学会　李子忠
　　　　　庞志全

特约主审：李　刚　侯曙明　翁华木　韩凤亭
　　　　　王明章　张德民　张敬磊

听课手册

数学

RJB

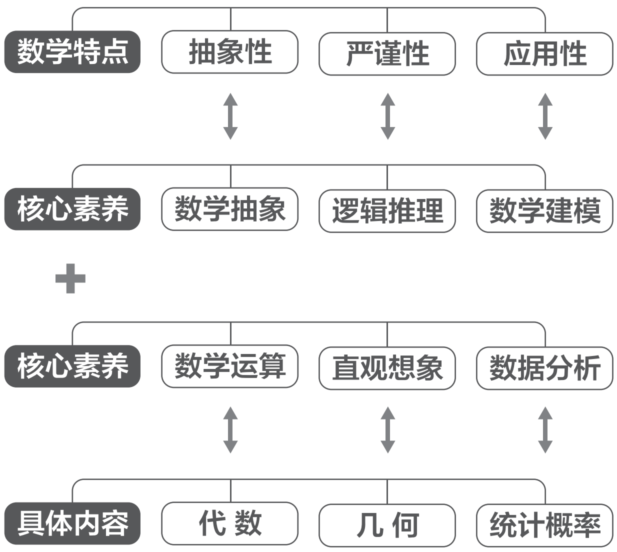
延边教育出版社

新课改 新高考 新一轮

数学 新高考(RJB)

▼ 凝练核心素养

明确课程目标，探寻命题原则



·图书展示·

1. 明确新高考内容要求，重点提升核心素养

【学业要求】(教师用书)

(1)能够在现实情境或数学情境中,概括出数学对象的一般特征,并用集合语言予以表达.初步学会用三种语言(自然语言、图形语言、符号语言)表达数学研究对象,并能进行转换.掌握集合的基本关系与基本运算在数学表达中的作用.

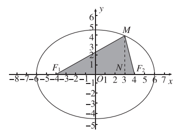
(2)能够从函数的观点认识方程和不等式,感悟函数学知识之间的关联,认识函数的重要性.掌握等式与不等式的性质.

(3)重点提升数学抽象、逻辑推理和数学运算素养.

2. 以核心素养为指导，精心设计选题

例1 [2019·全国卷Ⅲ] 设 F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 的两个焦点,M 为 C 上一点且在第一象限.若$\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形,则 M 的坐标为________.

$(3,\sqrt{15})$ **[解析]** 方法一:(解三角形法)不妨设 F_1 为椭圆 C 的左焦点,由题意知$|MF_1|=|F_1F_2|=8$,则$|MF_2|=12-|MF_1|=4$.如图所示,过 M 作 MN 垂直于 x 轴,垂足为 N,则在 $Rt\triangle MF_1N$ 和 $Rt\triangle MF_2N$ 中,分别有$|MN|^2=|MF_1|^2-|NF_1|^2=64-|NF_1|^2$,$|MN|^2=|MF_2|^2-|NF_2|^2=16-|NF_2|^2$,故$|NF_1|^2-|NF_2|^2=48$,又$|NF_1|+|NF_2|=|F_1F_2|=8$,所以$|NF_1|=7$,$|NF_2|=1$,所以 N 的坐标为$(3,0)$,即点 M 的横坐标为 3,又 M 为 C 上一点且在第一象限,所以 $y_M=\sqrt{15}$,故 M 的坐标为$(3,\sqrt{15})$.



[总结反思] 圆锥曲线问题中常会涉及解三角形,所以会用到勾股定理、正余弦定理、三角形面积公式等.

方法二:(坐标法)不妨设 F_1 为椭圆 C 的左焦点,由题意知 $a=6,b=2\sqrt{5},c=4,F_1(-4,0),F_2(4,0)$.因为 M 在椭圆上且$\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形,M 在第一象限,所以$|MF_1|=|F_1F_2|=2c=8$,设 $M(x,y)(x>0,y>0)$,则
$$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1,\\(x+4)^2+y^2=64,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=3,\\y=\sqrt{15},\end{cases}$$
所以 M 的坐标为$(3,\sqrt{15})$.

[总结反思] 解析法的本质是坐标法,设出相应坐标求解解析问题是基本方法.

方法三:(参数法)

由题意知 $a=6,b=2\sqrt{5},c=4$,不妨设 F_1 为椭圆 C 的左焦点,则 $F_1(-4,0),F_2(4,0)$,因为 M 在椭圆上且$\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形,M 在第一象限,所以$|MF_1|=|F_1F_2|=2c=8$,设 $M(6\cos\theta,2\sqrt{5}\sin\theta)(\cos\theta>0,\sin\theta>0)$,则$|MF_1|=\sqrt{(6\cos\theta+4)^2+(2\sqrt{5}\sin\theta-0)^2}=8$,解得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$,$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 M 的坐标为$(3,\sqrt{15})$.

[总结反思] 在涉及椭圆上点的坐标问题时,使用椭圆的

▼ 追踪命题新趋势

深研课改新趋势，精选新高考地区试题

多选题（相同条件不同结论、不同条件不同结论多方面设置）

[2019·青岛即墨区期中]《数书九章》是中国南宋时期杰出数学家秦九韶的著作,全书共八十一个问题,分为九类,每类九个问题,《数书九章》中记录了秦九韶的许多创造性成就,其中在卷五"三斜求积"中提出了已知三角形三边 a,b,c 求面积的公式,这与古希腊的海伦公式完成等价,其求法是:"以小斜幂,并大斜幂,减中斜幂,余半之,自乘于上,以小斜幂乘大斜幂,减上,余四约之,为实,一为从隅,开平方得积."若把以上这段文字写成公式,即为 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$.现有$\triangle ABC$ 满足 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:\sqrt{7}$,且$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$,请运用上述公式判断下列命题正确的是 (　　)

A. $\triangle ABC$ 的周长为 $10+2\sqrt{7}$

B. $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 成等差数列

C. $\triangle ABC$ 外接圆的直径为$\frac{4\sqrt{21}}{3}$

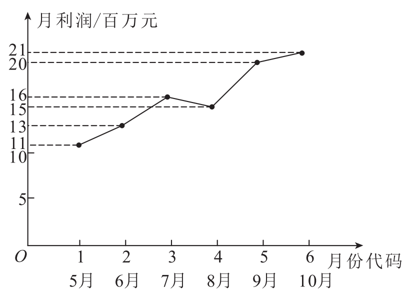
D. $\triangle ABC$ 的中线 CD 的长为 $3\sqrt{2}$

多空题:

直线 l 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F(1,0)$,且与 C 交于 A,B 两点,则 $p=$________,$\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=$________.

开放性解答题:

[2019·西安二模] 某市场研究人员为了了解产业园引进的甲公司前期的经营状况,对该公司 2019 年连续六个月的利润进行了统计,并根据得到的数据绘制了相应的折线图,如图所示.



(1)由折线图可以看出,可用线性回归模型拟合月利润 y(单位:百万元)与月份代码 x 之间的关系,求 y 关于 x 的线性回归方程,并预测该公司 2020 年 3 月份的利润.

(2)甲公司新研制了一款产品,需要采购一批新型材料,现有 A,B 两种型号的新型材料可供选择,按规定每种新型材料最多可使用 4 个月,但新型材料的不稳定性会导致材料损坏的时间不同,现对 A,B 两种型号的新型材料对应的产品各 100 件进行科学模拟测试,得到两种新型材料使用寿命的频数统计如下表:

使用寿命 / 材料类型	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月	总计
A	20	35	35	10	100
B	10	30	40	20	100

经甲公司测算平均每包新型材料每月可以带来 5 万元收入,不考虑除采购成本之外的其他成本,A 材料每包的成本为 10 万元,B 材料每包的成本为 12 万元.假设每包新型材料的使用寿命都是整月数,且以频率作为每包新型材料使用寿命的概率,如果你是甲公司的负责人,以每包新型材料产生利润的期望值为决策依据,你会选择采购哪款新型材料?

CONTENTS 目录

另有《全品基础小练习》《全品高分小练习》，与本书配套使用效果更佳，欢迎选购

·主题一　预备知识·

·主题二　函数·

※ 微课·思维与方法 ※

UNIT 01 第一单元 | 预备知识

第 1 讲　集合

内容要求 1. 集合的概念与表示

(1)了解集合的含义、理解元素与集合的属于关系;

(2)能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合;

(3)在具体情境中,了解全集与空集的含义.

2. 集合的基本关系

理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

3. 集合的基本运算

(1)理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集;

(2)理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集;

(3)能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚集 ⊙

1. 元素与集合

(1)集合元素的性质:________、________、无序性.

(2)集合与元素的关系:①属于,记为________;②不属于,记为________.

(3)集合的表示方法:列举法、________和________.

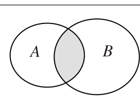
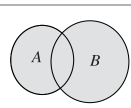
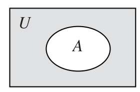
(4)常见数集及记法

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	____	____	____	____	____

2. 集合间的基本关系

		文字语言	符号语言	记法
基本关系	子集	集合 A 中的________都是集合 B 中的元素	$x\in A\Rightarrow x\in B$	$A\subseteq B$ 或 ____
	真子集	集合 A 是集合 B 的子集,但集合 B 中____有一个元素不属于 A	$A\subseteq B$,$\exists x_0\in B$,$x_0\notin A$	A ____ B 或 $B\supsetneqq A$
	相等	集合 A,B 的元素完全____	$A\subseteq B$,$B\subseteq A$	____
空集		____任何元素的集合,空集是任何集合的子集	$\forall x$,$x\notin\varnothing$,$\varnothing\subseteq A$	$\varnothing$

3. 集合的基本运算

运算＼表示	文字语言	符号语言	图形语言	记法
交集	属于 A ____ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____ $x\in B\}$		____
并集	属于 A ________ 属于 B 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in A$,____ $x\in B\}$		____
补集	全集 U 中____属于 A 的元素组成的集合	$\{x\mid x\in U$,x ____ $A\}$		____

4. 集合的运算性质

(1)并集的性质:$A\cup\varnothing=A$;$A\cup A=A$;$A\cup B=$________;$A\cup B=$________$\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(2)交集的性质:$A\cap\varnothing=\varnothing$;$A\cap A=A$;$A\cap B=B\cap A$;$A\cap B=A\Leftrightarrow A$________$B$.

(3)补集的性质:$A\cup(\complement_U A)=U$;$A\cap(\complement_U A)=$________;$\complement_U(\complement_U A)=$________;$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)$________$(\complement_U B)$;$\complement_U(A\cap B)=$________$\cup$________.

常用结论

(1)非常规性表示常用数集:如 $\{x\mid x=2(n-1),n\in\mathbf{Z}\}$ 为偶数集,$\{x\mid x=4n\pm1,n\in\mathbf{Z}\}$ 为奇数集等.

(2)①一个集合的真子集必是其子集,一个集合的子集不一定是其真子集;

②任何一个集合是它本身的子集;

③对于集合 A,B,C,若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$(真子集也满足);

④若 $A\subseteq B$,则有 $A=\varnothing$ 和 $A\neq\varnothing$ 两种可能.

(3)集合子集的个数:集合 A 中有 n 个元素,则集合 A 有 2^n 个子集、2^n-1 个真子集、2^n-1 个非空子集、2^n-2 个非空真子集.集合元素个数:$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$(常用在实际问题中).

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 已知集合 $A=\{0,1,x^2-5x\}$,若 $-4\in A$,则实数 x 的值为________.

2. [教材改编] 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{x\mid x\geq1\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$__________.

3. [教材改编] 已知集合 $A=\{a,b\}$,若 $A\cup B=\{a,b,c\}$,则满足条件的集合 B 有________个.
4. [教材改编] 已知集合 $A=\{-1,1\}$,$B=\{a,a^2+2\}$.若 $A\cap B=\{1\}$,则实数 a 的值为________.

题组二 常错题

◆ **索引**:忽视集合元素的性质致错;对集合的表示方法理解不到位致错;忘记空集的情况导致出错;忽视集合运算中端点取值致错.

5. 已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$,$B=\{1,m\}$,若 $B\subseteq A$,则 $m=$________.
6. 已知 $x\in\mathbf{N}$,$y\in\mathbf{N}$,$M=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 2\}$,$N=\{(x,y)\mid x-y\geqslant 0\}$,则 $M\cap N$ 中元素的个数是________.
7. 已知集合 $A=\{1,-2\}$,$B=\{x\mid ax=1\}$,若 $A\cap B=B$,则由实数 a 的所有可能的取值组成的集合为________.
8. 设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid 1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\subsetneqq B$,则 a 的取值范围为________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

探究点一 集合的含义与表示

例1 (1)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-1}{x}>0\right\}$,若集合 $C=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$,则 $C=$ ( )

A. $\{0,1\}$ B. $\{-1,1\}$
C. $\{0\}$ D. $\varnothing$

(2)[2019·天津红桥区一模] 已知集合 $U=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$,则集合 U 中的元素个数为________.(用数字填写)

[总结反思] 解决集合含义问题的关键有三点:一是确定构成集合的元素是什么;二是看这些元素的限制条件是什么;三是根据元素的特征(满足的条件)构造关系式解决相应问题.特别提醒:含字母的集合问题,在求出字母的值后,需要验证集合的元素是否满足互异性.

变式题 (1)已知集合 $A=\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$,则下列表示正确的是 ( )

A. $-1\notin A$ B. $-11\in A$
C. $3k^2-1\in A$ D. $-34\notin A$

(2)[2019·南通期末] 已知集合 $A=\{x\mid (x+1)(x+a^2-a-2)\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$,若 $0\in A$,则 a 的取值范围是________.

探究点二 集合间的基本关系

例2 (1)集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}+1,n\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{y\,\middle|\,y=m+\frac{1}{2},m\in\mathbf{Z}\right\}$,则两集合 M,N 之间的关系为 ( )

A. $M\cap N=\varnothing$ B. $M=N$
C. $M\subseteq N$ D. $N\subseteq M$

(2)[2019·重庆北碚区期末] 已知集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x\mid 2m-1<x<m+1\}$,且 $B\subseteq A$,则实数 m 的取值范围是________.

[总结反思] (1)一般利用数轴法、Venn 图法以及结构法判断两集合间的关系,如果集合中含有参数,需要对式子进行变形,有时需要进一步对参数分类讨论.
(2)确定非空集合 A 的子集的个数,需先确定集合 A 中的元素的个数.特别提醒:不能忽略任何非空集合是它自身的子集.
(3)根据集合间的关系求参数值(或取值范围)的关键是将条件转化为元素满足的式子或区间端点间的关系.

变式题 (1)[2019·重庆西南大学附中月考] 设集合 $U=\{-1,0,1,2\}$,$A=\{y\mid y=\sqrt{x^2+1},x\in U\}$,则集合 A 的真子集的个数为 ( )

A. 2 B. 3
C. 7 D. 8

(2)已知集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a=0,a\in\mathbf{R}\}$,若 $A=B$,则 $a=$ ( )

A. 1 B. 2
C. -1 D. -2

探究点三 集合的基本运算

角度1 集合的运算

例3 (1)[2019·山东四校联考] 已知集合 $A=\{x\mid \log_2 x<1\}$,集合 $B=\{y\mid y=\sqrt{2-x}\}$,则 $A\cup B=$ ( )

A. $(-\infty,2)$ B. $(-\infty,2]$
C. $(0,2)$ D. $[0,+\infty)$

(2)[2019·山东栖霞模拟] 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid 2^x>4\}$,$B=\{x\mid (x-1)(x-3)<0\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=$ ( )

A. $(1,2)$ B. $(1,2]$
C. $(1,3)$ D. $(-\infty,2]$

[总结反思] 对于已知集合的运算,可根据集合的交集、并集和补集的定义直接求解,必要时可结合数轴以及 Venn 图求解.

角度2　利用集合运算求参数

例4　(1)[2019·晋城二模] 若集合 $A=\{x|x\geqslant 3-2a\}$，$B=\{x|(x-a+1)(x-a)\geqslant 0\}$，$A\cup B=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围为　　(　　)

A. $[2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2]$

C. $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

(2)[2019·莆田八中期中] 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-(2m-3)x+m(m-3)\leqslant 0\}$，若 $A\cap B=[2,4]$，则实数 $m=$________.

[总结反思] 根据集合运算求参数，要把集合语言转换为方程或不等式，然后解方程或不等式，再利用数形结合法求解.

角度3　集合语言的运用

例5　(1)[2019·保定一模] 设 P 和 Q 是两个集合，定义集合 $P-Q=\{x|x\in P$，且 $x\notin Q\}$，如果 $P=\{x|1<2^x<4\}$，$Q=\{y|y=2+\sin x,x\in\mathbf{R}\}$，那么 $P-Q=$　　(　　)

A. $\{x|0<x\leqslant 1\}$

B. $\{x|0\leqslant x<2\}$

C. $\{x|1\leqslant x<2\}$

D. $\{x|0<x<1\}$

(2)[2019·北京延庆区一模] 已知集合 $M=\{x\in\mathbf{N}|1\leqslant x\leqslant 15\}$，集合 A_1,A_2,A_3 满足：①每个集合都恰有5个元素；② $A_1\cup A_2\cup A_3=M$. 集合 A_i 中元素的最大值与最小值之和称为集合 A_i 的特征数，记为 $X_i(i=1,2,3)$，则 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值与最小值的和为________.

[总结反思] 解决集合新定义问题的关键是：

(1)准确转化：解决新定义问题时，一定要读懂新定义的本质含义，紧扣题目所给定义，结合题目的要求进行恰当转化，切忌同已有概念或定义相混淆.

(2)方法选取：对于新定义问题，可恰当选用特例法、筛选法、一般逻辑推理等方法，并结合集合的相关性质求解.

请完成课时作业(一)

第2讲　常用逻辑用语

内容要求　1. 必要条件、充分条件、充要条件

通过对典型数学命题的梳理，理解必要条件、充分条件、充要条件的意义，理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.

2. 全称量词与存在量词

通过已知的数学实例，理解全称量词与存在量词的意义.

3. 全称量词命题与存在量词命题的否定

(1) 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定.

(2) 能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 充分条件、必要条件与充要条件

(1)若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的________条件.

(2)若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的________条件.

(3)若既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，记作 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的________条件.

2. 全称量词与存在量词

(1)短语“对所有的”“对任意一个”在逻辑中通常叫作________，用符号“________”表示.

(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作________，用符号“________”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定：

全称命题 $p:\forall x\in M,p(x)$，它的否定是____________.

存在性命题 $q:\exists x_0\in M,q(x_0)$，它的否定是____________.

常用结论

1. 充要条件的两个结论：

(1)若 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 r 的充分不必要条件，则 p 是 r 的充分不必要条件；

(2)若 p 是 q 的充分不必要条件，则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

2. 充分、必要条件与集合的关系

使 p 成立的对象构成的集合为 A，使 q 成立的对象构成的集合为 B	
p 是 q 的充分条件	$A\subseteq B$
p 是 q 的必要条件	$B\subseteq A$
p 是 q 的充分不必要条件	$A\subsetneqq B$
p 是 q 的必要不充分条件	$B\subsetneqq A$
p 是 q 的充要条件	$A=B$

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编]“点 $P(x,y)$ 在第一象限”是“$x+y>1$”的________条件.
2. [教材改编] 命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$, $\log_2 x_0+2<0$”的否定是________________.
3. [教材改编] 命题“表面积相等的三棱锥体积也相等”的否定是________________.

题组二 常错题

◆ **索引**:全称命题或存在性命题的否定出错;真、假命题的推理考虑不全面;对充分必要条件判断错误.

4. 命题“所有奇数的立方都是奇数”的否定是________________.
5. 条件 p:$x>a$,条件 q:$x\geqslant 2$.
   ①若 p 是 q 的充分不必要条件,则 a 的取值范围是________;
   ②若 p 是 q 的必要不充分条件,则 a 的取值范围是________.
6. 已知 p 是 r 的充分不必要条件,s 是 r 的必要条件,q 是 s 的必要条件,那么 p 是 q 的________条件.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

▶ 探究点一 充分、必要条件的判定

1. [2019·丽水期末]“$0<k<1$”是“方程$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{k}=1$表示双曲线”的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
2. [2019·六安期末]“$\alpha\neq\beta$”是“$\cos\alpha\neq\cos\beta$”的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
3. [2019·天津河西区一模] 设 $x\in\mathbf{R}$,则“$x^{-1}<\frac{1}{2}$”是“$|x+1|<1$”的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件
4. [2019·温州模拟] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_n=\frac{3}{2^n}+a$,则“$a=-3$”是“数列$\{a_n\}$是等比数列”的 ( )
   A. 充分不必要条件
   B. 必要不充分条件
   C. 充要条件
   D. 既不充分也不必要条件

[总结反思] 充分条件、必要条件的判定方法有定义法、集合法和等价转化法.三种不同的方法适用于不同的类型:定义法适用于定义、定理的判断问题;集合法多适用于命题中涉及参数的取值范围的判断问题;等价转化法适用于条件和结论中带有否定性词语的命题的判断问题.

▶ 探究点二 充分、必要条件的应用

例 1 (1)[2019·临川一中、南昌二中等九校联考] 已知 p:$A=\left\{x\left|\frac{x-2}{1-x}\leqslant 0\right.\right\}$,$q$:$B=\{x|x-a<0\}$,若 p 是 q 的必要不充分条件,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(2,+\infty)$ B. $[2,+\infty)$
C. $(-\infty,1)$ D. $(-\infty,1]$

(2)[2019·全国卷Ⅱ] 设 α,β 为两个平面,则 $\alpha/\!/\beta$ 的充要条件是 ( )

A. α 内有无数条直线与 β 平行
B. α 内有两条相交直线与 β 平行
C. α,β 平行于同一条直线
D. α,β 垂直于同一平面

[总结反思] 充分条件、必要条件的应用一般表现在参数问题的求解上,解题时通常把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系,然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解.解题过程中要注意检验区间的端点值.

变式题 (1)[2019·南昌七校期末] 已知 p:$x\leqslant 1$,且 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,则 q 可以是 ( )

A. $x>1$
B. $x>0$
C. $x\leqslant 2$
D. $-1<x<0$

(2)(多选题)[2019·武汉武昌区期末] 已知 p:$\forall x\in[-1,1]$,$x^2-ax-2<0$,则 p 为真的一个充分不必要条件为 ( )

A. $-\frac{1}{2}<a<1$
B. $-1<a<1$
C. $-1<a<2$
D. $0\leqslant a<1$

探究点三　全称量词与存在量词

例 2 (1)命题“存在实数 x_0,使得 $\ln x_0<x_0^2-1$”的否定是 (　　)

A. 对任意的实数 x,都有 $\ln x<x^2-1$

B. 对任意的实数 x,都有 $\ln x\geqslant x^2-1$

C. 不存在实数 x_0,使得 $\ln x_0\geqslant x_0^2-1$

D. 存在实数 x_0,使得 $\ln x_0\geqslant x_0^2-1$

(2)[2019·衡水二中期中] 已知命题 p_1:$\exists a\in\mathbf{R}$,使函数 $y=2^x+a\cdot 2^{-x}$在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数;

p_2:$\forall x\in\mathbf{R}$,函数 $y=\sin x+\cos x+\sqrt{2}$的值恒为正数;

p_3:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^4<x^5$;

p_4:$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2-x_0+1<0$.

其中真命题的个数为 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

(3)[2019·豫南五校联考] 若“$\forall x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$,$m\leqslant\tan x+2$”为真命题,则实数 m 的最大值为________.

[总结反思](1)全称命题与存在性命题的否定:

①改写量词:确定命题所含量词的类型,省去量词的要结合命题的含义加上量词,再对量词进行改写.

②否定结论:对原命题的结论进行否定.

(2)全称命题与存在性命题真假的判断方法:

命题名称	真假	判断方法一	判断方法二
全称命题	真	所有对象使命题真	否定为假
	假	存在一个对象使命题假	否定为真
存在性命题	真	存在一个对象使命题真	否定为假

变式题 (1)[2019·河南八市重点高中二联] 已知集合 A 是奇函数集,B 是偶函数集,若命题 p:$\forall f(x)\in A$,$|f(x)|\in B$,则 $\neg p$ 为 (　　)

A. $\forall f(x)\in A$,$|f(x)|\notin B$

B. $\forall f(x)\notin A$,$|f(x)|\notin B$

C. $\exists f(x)\in A$,$|f(x)|\notin B$

D. $\exists f(x)\notin A$,$|f(x)|\notin B$

(2)关于命题“当 $m\in[1,2]$时,方程 $x^2+2x+m=0$ 没有实数解”,下列说法正确的是 (　　)

A. 是全称命题,假命题

B. 是全称命题,真命题

C. 是存在性命题,假命题

D. 是存在性命题,真命题

(3)[2019·福清校级期中] 若存在 $x>0$,使得 $3^x(x-a)<2$ 成立,则 a 的取值范围为 (　　)

A. $(-3,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

请完成课时作业(二)

第 3 讲　相等关系与不等关系

内容要求 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

第 1 课时　等式与不等式的性质

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 两个实数比较大小的方法

(1)作差法$\begin{cases}a-b>0\Leftrightarrow a\ ______\ b,\\ a-b=0\Leftrightarrow a\ ______\ b,\\ a-b<0\Leftrightarrow a\ ______\ b.\end{cases}$

(2)作商法

$$\begin{cases}\frac{a}{b}>1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\ \_\_\_\_\_\_\ b(a\in\mathbf{R},b>0),\\ \frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a\ \_\_\_\_\_\_\ b(a,b\neq 0),\\ \frac{a}{b}<1(a\in\mathbf{R},b>0)\Leftrightarrow a\ \_\_\_\_\_\_\ b(a\in\mathbf{R},b>0).\end{cases}$$

2. 等式的性质

(1)对称性:$a=b\Leftrightarrow b=a$(双向性).

(2)传递性:$a=b,b=c\Rightarrow a=c$(单向性).

(3)可加性:$a=b\Leftrightarrow a+c=b+c$(双向性);

$a=b,c=d\Rightarrow a+c=b+d$(单向性).

(4)可乘性:$a=b\Rightarrow ac=bc$(单向性);

$a=b,c=d\Rightarrow ac=bd$(单向性).

3. 不等式的性质

(1)对称性:$a>b\Leftrightarrow$________(双向性).

(2)传递性:$a>b,b>c\Rightarrow a>c$(单向性).

(3)可加性:$a>b\Leftrightarrow a+c$ ________ $b+c$(双向性);

$a>b,c>d\Rightarrow$________(单向性).

(4)可乘性:$a>b,c>0\Rightarrow ac$ ________ bc;

$a>b,c<0\Rightarrow ac$ ________ bc;

$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac$ ________ bd(单向性).

(5)乘方法则:$a>b>0\Rightarrow a^n$ ________ $b^n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 1)$(单向性).

(6)开方法则:$a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$(单向性).

常用结论

1. 大减小,小减大,大的更大,小的更小,即 $a<x<b,c<y<d\Rightarrow a-d<x-y<b-c$.
2. 已知 a,b,m 都是正数,且 $a>b$,则
(1)$\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}(b-m>0)$,即真分数越加越大,越减越小;
(2)$\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}<\frac{a-m}{b-m}(b-m>0)$,即假分数越加越小,越减越大.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 已知 $1<a<2<b<4$,则 a^2+b 的取值范围为________.
2. [教材改编] 若 $f(x)=2x^2-2x,g(x)=x^2-2$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是________.
3. [教材改编] 已知下列四个条件:①$ac^2>bc^2$;②$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$;③$a^2>b^2$;④$2018-a<2018-b$.其中可以得到 $a>b$ 的条件的个数为________.

题组二 常错题

◆**索引**:求取值范围时乱用不等式的加法法则致错;乘法运算时不注意符号的影响致错;运用差值比较法时对差的变形不彻底或变形方向不明确致错.

4. 已知 $-1<a<2,-3<b<5$,则 $2a-b$ 的取值范围是________.
5. 已知实数 $a\in(-3,1),b\in\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$,则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是________.
6. 已知实数 $a_1\in(0,1),a_2\in(0,1)$,记 $M=a_1a_2,N=a_1+a_2-1$,则 M,N 的大小关系是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

▶ 探究点一 比较两个数(式)的大小

例1 (1)已知 $a>b>c>1$,设 $M=a-\sqrt{c},N=a-\sqrt{b},P=2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$,则 M,N,P 的大小关系为 ( )

A. $P>N>M$ B. $N>M>P$
C. $M>N>P$ D. $P>M>N$

(2)[2019·益阳二模] 已知 $2^a=6^b=10$,则 $ab,a+b$ 的大小关系是________.

[总结反思] (1)判断两个式子大小关系的常用方法:作差法、作商法;不等式性质法;单调性法;中间量法;特殊值法;数形结合法等.
(2)作差法的一般步骤是:作差,变形,定号,得出结论.

变式题 (1)设 $\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^b<\left(\frac{1}{3}\right)^a<1$,则 ( )

A. $a^a<a^b<b^a$ B. $a^a<b^a<a^b$
C. $a^b<a^a<b^a$ D. $a^b<b^a<a^a$

(2)已知 $a>0$ 且 $a\neq1,P=\log_a(a^3+1),Q=\log_a(a^2+1)$,则 P 与 Q 的大小关系为________.

▶ 探究点二 不等式的性质

例2 (1)[2019·合肥一中、安庆一中模拟] 若 $a>1,0<c<b<1$,则下列不等式不正确的是 ( )

A. $\log_{2019}a>\log_{2019}b$ B. $\log_ca>\log_ba$
C. $(c-b)a^c>(c-b)a^b$ D. $(a-c)a^c>(a-c)a^b$

(2)[2019·济南外国语学校期中] 已知 a,b,c,d 均为实数,有下列说法:
①若 $ab>0,bc-ad>0$,则 $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$;②若 $ab>0,\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$,则 $bc-ad>0$;③若 $bc-ad>0,\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$,则 $ab>0$.其中正确的说法是________.

[总结反思] 解决此类题目常用的三种方法:
(1)直接利用不等式的性质逐个验证,利用不等式的性质判断不等式是否成立时要特别注意前提条件;
(2)利用特殊值法排除错误答案;
(3)利用函数的单调性,当直接利用不等式的性质不能比较大小时,可以利用指数函数、对数函数、幂函数等函数的单调性来比较.

变式题 (1)如果 $x+y<0$,且 $y>0$,那么下列不等式成立的是 ( )

A. $y^2>x^2>xy$
B. $x^2>y^2>-xy$
C. $x^2<-xy<y^2$
D. $x^2>-xy>y^2$

(2)(多选题)设 a,b 是非零实数,若 $a<b$,则下列不等式一定成立的是 ( )

A. $a^2<b^2$ B. $a^3<b^3$
C. $\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$ D. $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

▶ 探究点三 不等式性质的应用

例3 已知三个正数 a,b,c 满足 $a\leqslant b+c\leqslant 2a,b\leqslant a+c\leqslant 2b$,则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 ( )

A. $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$ B. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$
C. $[2,3]$ D. $[1,2]$

［总结反思］运用不等式的性质解决问题时，常用的方法是正确使用不等式的性质直接推导，并注意不等式性质成立的条件以及等价转化的思想，比如减法可以转化为加法，除法可以转化为乘法等．但应注意两点：一是必须严格运用不等式的性质；二是在多次运用不等式的性质时有可能扩大了变量的取值范围．解决的途径是先建立所求范围的整体与已知范围的整体的等量关系，再通过“一次性”不等关系的运算求解范围．

变式题 (1)已知 a,b 为实数，则“$ab>b^2$”是“$a>b>0$”的　(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

(2)已知 $1\leqslant a+b\leqslant 4,-1\leqslant a-b\leqslant 2$，则 $4a-2b$ 的取值范围是　(　　)

A．$[-4,10]$　　B．$[-3,6]$

C．$[-2,14]$　　D．$[-2,10]$

请 完成课时作业（三）

第2课时　基本不等式及其应用

内容要求　掌握基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,b\geqslant 0)$．结合具体实例，能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题．

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1．基本不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$

(1)基本不等式成立的条件：__________．

(2)等号成立的条件：当且仅当________时取等号．

2．几个重要的不等式

(1)$a^2+b^2\geqslant$______$(a,b\in\mathbf{R})$．

(2)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant$______$(a,b$ 同号$)$．

(3)$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a,b\in\mathbf{R})$．

(4)$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a,b\in\mathbf{R})$．

3．算术平均数与几何平均数

设 $a>0,b>0$，则 a,b 的算术平均数为______，几何平均数为 $\sqrt{ab}$，基本不等式可叙述为：______________________________．

4．利用基本不等式求最值问题

已知 $x>0,y>0$，则

(1)如果积 xy 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 有最小值，是______(简记：积定和最小)．

(2)如果和 $x+y$ 是定值 p，那么当且仅当 $x=y$ 时，xy 有最大值，是______(简记：和定积最大)．

常用结论

1．若 $x\neq 0$，则 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$，当且仅当 $x=\pm 1$ 时，等号成立．

2．若 $ab\neq 0$，则 $\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$，当且仅当 $a=\pm b$ 时，等号成立．

3．若 $ab>0,x\neq 0$，则 $\left|ax+\frac{b}{x}\right|\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 时，等号成立．

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1．［教材改编］当 $x>0$ 时，$x+\frac{1}{x}$ 的最小值为________．

2．［教材改编］已知正实数 x,y 满足 $2x+3y=2$，则 xy 的最大值为________．

3．［教材改编］用一段长为 36 m 的篱笆围成一个矩形菜园，则这个矩形菜园的面积最大为________．

题组二　常错题

◆索引：对于基本不等式的应用，注意字母的正负以及等号成立的条件；等号不成立时，通常考虑利用函数的单调性求解．

4．函数 $f(x)=\frac{2x^2+x+3}{x}(x<0)$ 的最大值为________．

5．当 $x\geqslant 2$ 时，$x+\frac{4}{x+2}$ 的最小值为________．

6．已知 $a,b>0$，若 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$，则 $2a+\frac{b}{3}$ 的最小值是________．

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　直接用基本不等式

例1　［2019·成都模拟］已知 $3^a=5^b=15$，则 a,b 不可能满足的关系是　(　　)

A．$a+b>4$　　B．$ab>4$

C．$(a-1)^2+(b-1)^2>2$　　D．$a^2+b^2<8$

[总结反思] 利用基本不等式比较大小，主要有两个思路：一是直接建立不等关系比较大小；二是观察待比较式子的结构特征，合理选取基本不等式或其变形式，结合不等式的性质比较大小.

变式题 已知 $a>0,b>0$ 且 $a\neq b$，$x=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$，$y=\sqrt{a+b}$，则 x,y 的大小关系是 （ ）

A. $x<y$

B. $x>y$

C. $x=y$

D. 视 a,b 的值而定

探究点二 变形用基本不等式求最值

微课1·方法

微点1 利用配凑法求最值

例2 (1)[2019·开封三模] 若实数 x,y 满足 $2^x+2^y=1$，则 $x+y$ 的最大值是 （ ）

A. -4　　B. -2

C. 2　　D. 4

(2)[2019·塘沽一中、育华中学三模] 若实数 x,y 满足 $x>y>0$，且 $\log_2 x+\log_2 y=1$，则 $\frac{x-y}{x^2+y^2}$ 的最大值为________.

[总结反思] 利用配凑法求最值，主要是配凑成“和为常数”或“积为常数”的形式.

微点2 利用常数代换法求最值

例3 (1)[2019·广东化州一模] 若正数 x,y 满足 $x+3y=5xy$，当 $3x+4y$ 取得最小值时，$x+2y$ 的值为 （ ）

A. $\frac{24}{5}$　　B. 2

C. $\frac{28}{5}$　　D. 5

(2)[2019·龙岩质检] 已知 $x>0,y>0$，且 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$，则 $x+y$ 的最小值为 （ ）

A. 3　　B. 5　　C. 7　　D. 9

[总结反思] 常数代换法主要解决形如“已知 $x+y=t$（t 为常数），求 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 的最值”的问题，通常先将 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ 转化为 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)\cdot\frac{x+y}{t}$，再用基本不等式求最值.

微点3 利用消元法求最值

例4 已知 $a>0,b>0,c>0$，若点 $P(a,b)$ 在直线 $x+y+c=2$ 上，则 $\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}$ 的最小值为________.

[总结反思] 当所求最值的代数式中的变量比较多时，通常考虑利用已知条件消去部分变量后，凑出“和为常数或积为常数”，最后利用基本不等式求最值.

应用演练

1.【微点2】若正数 m,n 满足 $2m+n=1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 （ ）

A. $3+2\sqrt{2}$　　B. $3+\sqrt{2}$

C. $2+2\sqrt{2}$　　D. 3

2.【微点1】[2019·浙江三校联考] 已知 $\log_2(a-2)+\log_2(b-1)\geqslant 1$，则 $2a+b$ 取到最小值时，$ab=$ （ ）

A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 9

3.【微点2】[2019·黑龙江佳木斯模拟] 已知 a,b 为正实数，且 $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1$，则 $a+b$ 的最小值为________.

4.【微点3】[2019·龙岩上杭二中期中] 设正实数 x,y,z 满足 $x^2+3xy+4y^2-z=0$，则 $\frac{z}{xy}$ 的最小值为________.

探究点三 多次用基本不等式求最值

例5 设 $a>b>0$，则 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值是（ ）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

[总结反思] 利用两次或多次基本不等式求最值时，一定要确保各次使用基本不等式时等号能同时成立，否则所求得的值不是最值.

变式题 已知 a,b 为正实数且 $ab=1$，若不等式 $(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)>M$ 对任意正实数 x,y 恒成立，则实数 M 的取值范围是 （ ）

A. $[4,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(-\infty,4]$　　D. $(-\infty,4)$

探究点四 基本不等式的实际应用

例6 如图1-3-1，将宽和长分别为 $x,y(x<y)$ 的两个矩形部分重叠放在一起后形成的正十字形的面积为 $\sqrt{5}$.（注：正十字形指的是原来的两个矩形的顶点都在同一个圆上，且两矩形的长边所在的直线互相垂直的图形）

(1)求 y 关于 x 的函数解析式；

(2)当 x,y 取何值时，该正十字形的外接圆的面积最小，并求出其最小值.

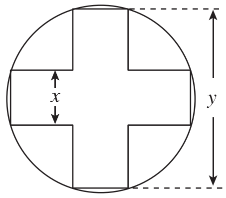


图 1-3-1

[总结反思] 利用基本不等式解决实际应用题的基本思路：

(1)设变量时一般把要求的变量定义为函数；

(2)根据实际问题抽象出函数的解析式后，再利用基本不等式求得函数的最值；

(3)求最值时注意定义域的限制.

变式题 小王于年初用 50 万元购买一辆大货车，第一年因缴纳各种费用需支出 6 万元，从第二年起，每年都比上一年增加支出 2 万元，假定该车每年的运输收入均为 25 万元.小王在该车运输累计收入超过总支出后，考虑将大货车作为二手车出售，若该车在第 x 年年底出售，其销售价格为$(25-x)$万元(国家规定大货车的报废年限为 10 年).

(1)大货车运输到第几年年底，该车运输累计收入超过总支出?

(2)在第几年年底将大货车出售，能使小王获得的年平均利润最大?(利润＝累计收入＋销售收入－总支出)

请 完成课时作业(三)

第 4 讲　用函数的观点看一元二次方程和一元二次不等式

内容要求 1. 从函数观点看一元二次方程

会结合一元二次函数的图像，判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数，了解函数的零点与方程根的关系.

2. 从函数观点看一元二次不等式

(1)经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程，了解一元二次不等式的现实意义.能借助一元二次函数求解一元二次不等式，并能用集合表示一元二次不等式的解集.

(2)借助一元二次函数的图像，了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

课前双基巩固

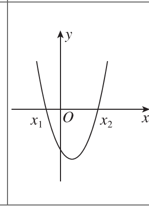
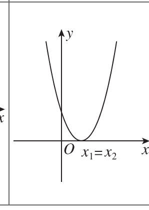
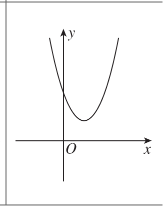
/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 一元二次不等式

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 的不等式叫作一元二次不等式.

2. 三个“二次”间的关系

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			

(续表)

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两个相异实根 x_1,$x_2(x_1<x_2)$	有两个相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	________	______	______
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	________	______	______

常用结论

1. (1)"$ax^2+bx+c>0(a\neq0,x\in\mathbf{R})$恒成立"的充要条件是"$a>0$ 且 $b^2-4ac<0$".
(2)"$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$恒成立"的充要条件是"$a<0$ 且 $b^2-4ac<0$".
2. (1)对于不等式 $ax^2+bx+c>0$,求解时不要忘记讨论 $a=0$ 时的情形.
(2)注意区分 $\Delta<0$ 时,$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$的解集为 $\mathbf{R}$ 还是 $\varnothing$.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 不等式 $x^2-2x-8\geqslant0$ 的解集为________.
2. [教材改编] 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|2x-3\geqslant0\}$,集合 $B=\{x\in\mathbf{R}|x^2-3x+2<0\}$,则 $A\cap B=$________.
3. [教材改编] 已知一元二次方程 $3x^2+2ax+(a+6)=0$ 有两个不相等的实数根,则实数 a 的取值范围是________.

题组二 常错题

◆ **索引**:变形必须等价;注意二次项的系数符号;参数的讨论不要忽视二次项的系数.

4. 不等式 $x(x+5)<3(x+5)$的解集为________.
5. 不等式$(x+1)(3-2x)\geqslant0$ 的解集为________.
6. 若不等式 $mx^2+2mx-4<2x^2+4x$ 对任意 x 都成立,则实数 m 的取值范围是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

探究点一 一元二次不等式的解法

1. 设 $a>1$,则关于 x 的不等式$(1-a)(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$ 的解集是 ( )

A. $(-\infty,a)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$

B. $(a,+\infty)$

C. $\left(a,\frac{1}{a}\right)$

D. $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup(a,+\infty)$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-6x+5\leqslant0\}$,$B=\{x|y=\log_2(x-2)\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $(1,2)$ B. $[1,2)$
C. $(2,5]$ D. $[2,5]$

3. [2019·西安中学期末] 不等式$ax^2+bx+c>0$ 的解集为$(-4,1)$,则不等式 $b(x^2+1)-a(x+3)+c>0$ 的解集为 ( )

A. $\left(-\frac{4}{3},1\right)$

B. $\left(-1,\frac{4}{3}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

D. $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

4. 关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的解集中恰有两个整数,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-2,-1]\cup[3,4)$ B. $[-2,-1]\cup[3,4]$
C. $[-2,-1)\cup(3,4]$ D. $(-2,-1)\cup(3,4)$

[总结反思] 解一元二次不等式的一般步骤:①化为标准形式(二次项系数大于0);②确定判别式Δ的符号(若$\Delta\geqslant0$,则求出该不等式对应的一元二次方程的根,若$\Delta<0$,则对应的一元二次方程无根);③结合二次函数的图像得出不等式的解集.

探究点二 一元二次不等式恒成立的类型

微课2·思维

微点1 形如 $f(x)\geqslant0(x\in\mathbf{R})$

例1 若关于 x 的一元二次不等式 $ax^2+2ax+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ B. $(0,1)$
C. $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$ D. $[0,1]$

[总结反思] (1)若不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$恒成立,则满足$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

(2)若不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq0)$恒成立,则满足$\begin{cases}a<0,\\ \Delta=b^2-4ac<0.\end{cases}$

(3)若不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立,则要考虑 $a=0$ 时是否满足.

微点 2 形如 $f(x)\geqslant 0(x\in[a,b])$

例 2 已知 $f(x)=-2x^2+bx+c$,不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,3)$.若对任意的 $x\in[-1,0]$,$f(x)+m\geqslant 4$ 恒成立,则 m 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,2]$ B. $(-\infty,4]$

C. $[2,+\infty)$ D. $[4,+\infty)$

[总结反思]一元二次不等式在指定范围内恒成立,其本质是这个不等式的解集包含着指定的区间.恒大于0就是相应的二次函数图像在给定的区间上全部在 x 轴上方;恒小于0就是相应的二次函数图像在给定的区间上全部在 x 轴下方.

微点 3 形如 $f(x)\geqslant 0$(参数 $m\in[a,b]$)

例 3 [2019·厦门六中期中] 已知集合 $A=\{t\mid t^2-4\leqslant 0\}$,对于满足集合 A 的所有实数 t,使不等式 $x^2+tx-t>2x-1$ 恒成立的 x 的取值范围为 ( )

A. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

B. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$

D. $(3,+\infty)$

[总结反思]利用变换主元法解决一元二次不等式在给出参数取值范围情况下恒成立问题时,一定要搞清谁是变换后的主元,谁是变换后的参数,一般地,知道谁的范围,谁就是变换后的主元,求谁的范围,谁就是变换后的参数.

应用演练

1. 【微点 1】若不等式 $mx^2+(m-1)x+m>0$ 对实数 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $m<-1$ 或 $m>\frac{1}{3}$

B. $m>1$

C. $m>\frac{1}{3}$

D. $-1<m<\frac{1}{3}$

2. 【微点 2】当 $x\in(1,2)$ 时,不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立,则 m 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,4]$

B. $(-\infty,-5)$

C. $(-\infty,-5]$

D. $(-5,-4)$

3. 【微点 3】若对于 $m\in[-2,2]$,不等式 $mx^2-mx-1<-m+5$ 恒成立,则实数 x 的取值范围是________.

探究点三 一元二次不等式的应用

例 4 某地区上年度电价为 0.8 元/kW·h,年用电量为 a kW·h.本年度计划将电价降到 0.55 元/kW·h 至 0.75 元/kW·h 之间,而用户期望电价为 0.4 元/kW·h.经测算,下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比(比例系数为 k).该地区电力的成本价为 0.3 元/kW·h.

(1)写出本年度电价下调后,电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式.

(2)设 $k=0.2a$,当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年度至少增长 20%?

注:收益=实际用电量×(实际电价-成本价).

[总结反思]对于不等式应用问题,一般可按四步进行:一要理解题意,把握问题中的关键量;二是引进数学符号,用不等关系构造不等式;三是解不等式;四是回答实际问题.

变式题 要使火车安全行驶,按规定,铁路转弯处的圆弧半径不允许小于 600 m(如图 1-4-1),如果某段铁路的两端点 A,B 相距 156 m,弧 AB 所对的圆心角小于 180°,则 CD 的取值范围是________.(结果保留一位小数)

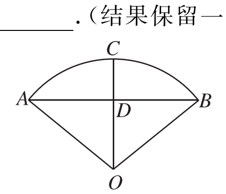


图 1-4-1

请 完成课时作业(四)

UNIT 02 第二单元 | 函数

第 5 讲　函数的概念及其表示

内容要求 1. 用集合语言和对应关系刻画函数,建立完整的函数概念,体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用.了解构成函数的要素,能求简单函数的定义域.
2. 在实际情境中,会根据不同的需要选择恰当的方法(如图像法、列表法、解析法)表示函数,理解函数图像的作用.
3. 了解简单的分段函数,并能简单应用.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数的概念

设集合 A 是一个________的数集,对 A 中的________,按照确定的法则 f,都有________的数 y 与它对应,则这种对应关系叫作集合 A 的一个函数,记作________.

2. 函数的三要素

函数由________、________和对应关系三个要素构成.在函数 $y=f(x)$,$x\in A$ 中,x 叫作自变量,x 的取值范围 A 叫作函数的________.与 x 的值相对应的 y 值叫作函数值,函数值的集合 $\{f(x)|x\in A\}$ 叫作函数的________.

3. 函数的表示法

函数的常用表示方法:________、________、________.

4. 分段函数

若函数在其定义域内,对于定义域内的不同取值区间,有着不同的________,这样的函数通常叫作分段函数.分段函数虽由几个部分组成,但它表示的是一个函数.

常用结论

1. 常见函数的定义域
(1)分式函数中分母不等于 0.
(2)偶次根式函数的被开方式大于或等于 0.
(3)一次函数、二次函数的定义域为 $\mathbf{R}$.
(4)零次幂的底数不能为 0.
(5)$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$.
(6)$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的定义域为 $\{x|x>0\}$.
(7)$y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.
2. 抽象函数的定义域
(1)若 $f(x)$ 的定义域为 $[m,n]$,则在 $f[g(x)]$ 中,$m\leqslant g(x)\leqslant n$,从而解得 x 的范围,即为 $f[g(x)]$ 的定义域.
(2)若 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[m,n]$,则由 $m\leqslant x\leqslant n$ 确定 $g(x)$ 的范围,即为 $f(x)$ 的定义域.
3. 基本初等函数的值域
(1)$y=kx+b(k\neq0)$ 的值域是 $\mathbf{R}$.
(2)$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的值域:当 $a>0$ 时,值域为 $\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$;当 $a<0$ 时,值域为 $\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$.
(3)$y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 的值域是 $\{y|y\neq0\}$.
(4)$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的值域是 $(0,+\infty)$.
(5)$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的值域是 $\mathbf{R}$.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 以下属于函数的有________.(填序号)
①$y=\pm\sqrt{x}$;②$y^2=x-1$;③$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$;④$y=x^2-2(x\in\mathbf{N})$.

2. [教材改编] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\geqslant0,\\x^2,x<0,\end{cases}$ 则 $f(-2)=$________,$f[f(-2)]=$________.

3. [教材改编] 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{8-x}}{x+3}$ 的定义域是________.

4. [教材改编] 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{a,b,c\}$,f:$A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,那么该函数的值域 C 的不同情况有________种.

题组二　常错题

◆ **索引**:求函数定义域时非等价化简解析式致错;分段函数解不等式时忘记范围;换元法求解析式,反解忽视范围;对函数值域理解不透彻致错.

5. 函数 $y=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}$ 的定义域是________.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leqslant0,\\-x+3,x>0,\end{cases}$ 则使得 $f(x)\geqslant2$ 的自变量 x 的取值范围为________.

7. 已知 $f(\sqrt{x})=x-1$，则当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=$________.

8. 若一系列函数的解析式相同、值域相同，但其定义域不同，则称这些函数为“同族函数”，则函数解析式为 $y=x^2$，值域为 $\{1,4\}$ 的“同族函数”共有______个.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　函数的定义域

角度 1　求给定解析式的函数的定义域

例 1　(1)函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为（　　）

A. $[0,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $[0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

(2)已知函数 $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{2x-1}}+\log_2(4-x^2)$，则 $f(x)$ 的定义域为______.

[总结反思] (1)求函数定义域即求使解析式有意义的自变量 x 的取值集合；(2)若函数是由几个基本初等函数的和、差、积、商的形式构成的，定义域一般是各个基本初等函数定义域的交集；(3)具体求解时一般是列出自变量满足的不等式(组)，得出不等式(组)的解集即可；(4)注意不要轻易对解析式化简变形，否则易出现定义域错误.

角度 2　求抽象函数的定义域

例 2　(1)若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2020]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{x-1}$ 的定义域是（　　）

A. $[0,1)\cup(1,2020]$　　B. $[-1,1)\cup(1,2020]$

C. $[0,1)\cup(1,2019]$　　D. $[-1,1)\cup(1,2019]$

(2)[2019·黄冈调研] 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $(-2,0)$，则 $f(2x-1)$ 的定义域为（　　）

A. $(-1,0)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

C. $(0,1)$　　D. $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

[总结反思] (1)无论抽象函数的形式如何，已知定义域还是求定义域，均是指其中的 x 的取值集合；(2)若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，则复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域由不等式 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 求出.(3)若复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 $[a,b]$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域.

变式题　(1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$，则函数 $g(x)=f(2x)+\sqrt{1-\lg x}$ 的定义域为（　　）

A. $\{x|0<x<4\}$　　B. $\{x|-4<x<10\}$

C. $\{x|0<x<1\}$　　D. $\{x|-1<x<1\}$

(2)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$，函数 $g(x)=f(x-1)+f(3-2x)$，则函数 $g(x)$ 的定义域为______.

探究点二　函数的解析式

例 3　(1)已知函数 $f(\sqrt{x}+1)=x-4$，则 $f(x)=$________.

(2)已知 $f(x)$ 为二次函数且 $f(0)=3$，$f(x+2)-f(x)=4x+2$，则 $f(x)=$________.

(3)已知函数 $f(x)$ 对一切不为 0 的实数 x 均满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{2020}{x}\right)=\dfrac{2020}{x}+2$，则 $f(x)=$__________.

[总结反思] 求函数解析式的常用方法：

(1)换元法：已知复合函数 $f[g(x)]$ 的解析式，可用换元法，此时要注意新元的取值范围.

(2)待定系数法：已知函数的类型(如一次函数、二次函数)，可用待定系数法.

(3)配凑法：由已知条件 $f[g(x)]=F(x)$，可将 $F(x)$ 改写成关于 $g(x)$ 的表达式，然后以 x 替代 $g(x)$，便得 $f(x)$ 的解析式.

(4)解方程组法：已知 $f(x)$ 与 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 或 $f(-x)$ 之间的关系式，可根据已知条件再构造出另外一个等式，两等式组成方程组，通过解方程组求出 $f(x)$.

变式题　(1)已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{1-x}$，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A. $f(x)=\dfrac{1-x}{x}(x\neq 0$ 且 $x\neq 1)$

B. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}(x\neq 0$ 且 $x\neq 1)$

C. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}(x\neq 0$ 且 $x\neq 1)$

D. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 0$ 且 $x\neq 1)$

(2)已知 $f(x)$ 满足 $3f(x)+2f(-x)=4x$，则 $f(x)=$______.

(3)若一次函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)]=x+4$，则 $f(-1)=$______.

探究点三　以分段函数为背景的问题

微课3·思维

微点 1　分段函数的求值问题

例 4　(1)已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(3^x+1), & x\geqslant 0,\\ |x|-2, & x<0,\end{cases}$ 则 $f[f(-3)]=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)[2019·南昌一模] 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2^x(x\leqslant 0),\\ f(x-3)(x>0),\end{cases}$ 则 $f(5)$ 的值为 ( )

A. -7　　B. -1

C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

[总结反思] 求分段函数的函数值时务必要确定自变量所在的区间及其对应关系. 对于复合函数的求值问题，应由里到外依次求值.

微点 2 分段函数与方程

例 5 (1)[2019·安阳二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a,x<0,\\ 3^x,x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $f[f(-1)]=9$，则实数 $a=$ ( )

A. 2　　B. 4

C. $\frac{13}{3}$　　D. 4 或 $\frac{13}{3}$

(2)[2019·安庆二模] 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1},-1<x<0,\\ 2x,x\geqslant 0,\end{cases}$ 若实数 a 满足 $f(a)=f(a-1)$，则 $f\left(\frac{1}{a}\right)=$ ( )

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

[总结反思] (1)若分段函数中含有参数，则直接根据条件选择相应区间上的解析式代入求参；(2)若是求自变量的值，则需要结合分段区间的范围对自变量进行分类讨论，再求值.

微点 3 分段函数与不等式问题

例 6 (1)[2019·郑州一中质量测评] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x\geqslant 1,\\ \frac{1}{1-x},x<1,\end{cases}$ 则不等式 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 ( )

A. $(-\infty,2]$

B. $(-\infty,0]\cup(1,2]$

C. $[0,2]$

D. $(-\infty,0]\cup[1,2]$

(2)[2019·江淮十校联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3\left(x<\frac{1}{2}\right),\\ \frac{1}{x}\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right),\end{cases}$ 则不等式 $x^2\cdot f(x)+x-2\leqslant 0$ 的解集是________.

[总结反思] 涉及与分段函数有关的不等式问题，主要表现为解不等式，当自变量取值不确定时，往往要分类讨论求解；当自变量取值确定，但分段函数中含有参数时，只需依据自变量的情况，直接代入相应解析式求解.

应用演练

1. 【微点 1】[2019·四川名校联盟一模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^x,x\leqslant 3,\\ x^2,x>3,\end{cases}$ 则 $f[f(-2)]$ 的值为 ( )

A. 81　　B. 27

C. 9　　D. $\frac{1}{9}$

2. 【微点 2】[2019·呼和浩特调研] 设 $f(x)=\begin{cases}3^{-x}+a(x\leqslant 2),\\ f(x-1)(x>2),\end{cases}$ 若 $f(3)=-\frac{8}{9}$，则实数 $a=$ ( )

A. 1　　B. -1

C. $\frac{1}{9}$　　D. 0

3. 【微点 3】[2019·东莞一模] 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x},x\leqslant 1,\\ 1-\log_2 x,x>1,\end{cases}$ 则满足 $f(x)\leqslant 2$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[-1,2]$

B. $[0,2]$

C. $[1,+\infty)$

D. $[0,+\infty)$

4. 【微点 3】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1,x\leqslant 1,\\ \ln x+1,x>1,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f(x+1)>1$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $(-1,+\infty)$

B. $\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$

C. $(0,+\infty)$

D. $(1,+\infty)$

5. 【微点 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x<0,\\ a\sqrt{x},x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $f(-1)+f(1)=2$，则 $a=$________.

请完成课时作业（五）

第 6 讲　函数的单调性与最值

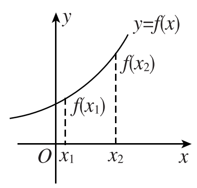
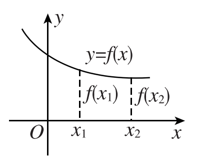
内容要求　借助函数图像,会用符号语言表达函数的单调性、最大值、最小值,理解它们的作用和实际意义.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 单调函数的定义

	增函数	减函数
定义	一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I,如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2	
	当 $x_1<x_2$ 时,都有______,那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数	当 $x_1<x_2$ 时,都有______,那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数
图像描述	 自左向右看图像是________	 自左向右看图像是________

2. 单调区间的定义

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是__________,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,______叫作函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

3. 函数的最值

前提	设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果存在实数 M 满足	
条件	(1)对于任意 $x\in I$,都有 $f(x)\leqslant M$; (2)存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=M$	(1)对于任意 $x\in I$,都有______; (2)存在 $x_0\in I$,使得______
结论	M 为最大值	M 为最小值

常用结论

1. 函数单调性的常用结论:

(1)若 $f(x)$,$g(x)$ 均为区间 A 上的增(减)函数,则 $f(x)+g(x)$ 也是区间 A 上的增(减)函数.

(2)若 $k>0$,则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同;若 $k<0$,则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相反.

(3)函数 $y=f(x)(f(x)>0)$ 在公共定义域内与 $y=-f(x)$,$y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的单调性相反.

(4)函数 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$ 在公共定义域内与 $y=\sqrt{f(x)}$ 的单调性相同.

(5)复合函数单调性的判断方法:若两个简单函数的单调性相同,则这两个函数的复合函数为增函数;若两个简单函数的单调性相反,则这两个函数的复合函数为减函数.简称"同增异减".

2. 单调性定义的等价形式:设 $x_1,x_2\in[a,b]$,$x_1\neq x_2$.

(1)若有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$ 或 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$,则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是增函数;

(2)若有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$ 或 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$,则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是减函数.

3. 函数最值的结论:

(1)闭区间上的连续函数一定存在最大值和最小值,当函数在闭区间上单调时最值一定在端点处取得.

(2)开区间上的"单峰"函数一定存在最大值或最小值.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=(2a-1)x-3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,则 a 的取值范围是________.

2. [教材改编] 函数 $f(x)=(x-2)^2+5(x\in[-3,3])$ 的单调递增区间是________;单调递减区间是________.

3. [教材改编] 函数 $f(x)=\dfrac{3}{x+1}(x\in[2,5])$ 的最大值与最小值之和等于________.

4. [教材改编] 函数 $f(x)=|x-a|+1$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数,则实数 a 的取值范围是________.

题组二　常错题

◆ **索引**:求单调区间忘记定义域导致出错;求分段函数的单调性时忘记整体考虑;利用单调性解不等式时忘记在单调区间内求解;混淆"单调区间"与"在区间上单调"两个概念.

5. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-3)$ 的单调递增区间是________.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(a-2)x, x\geqslant 2,\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1, x<2\end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数,则实数 a 的取值范围为________.

7. 函数 $y=f(x)$ 是定义在 $[-2,2]$ 上的减函数,且 $f(a+1)<f(2a)$,则实数 a 的取值范围是________.

8. (1)若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty,4]$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是________.

(2)若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 的单调递减区间为 $(-\infty,4]$,则 a 的值为________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

探究点一 函数单调性的判断与证明

例1 判断函数 $f(x)=a^x+\frac{x-3}{x+2}(a>1)$, $x\in(-2,+\infty)$ 的单调性,并用单调性的定义证明你的结论.

[总结反思] (1)定义法证明函数单调性的一般步骤:①任取 $x_1,x_2\in D$,且 $x_1<x_2$;②作差 $f(x_1)-f(x_2)$;③变形(通常是因式分解和配方);④定号(即判断 $f(x_1)-f(x_2)$ 的正负);⑤下结论(即指出函数 $f(x)$ 在给定的区间 D 上的单调性).

变式题 (1)(多选题)在区间(0,1)上单调递减的函数是 ( )

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$

B. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

C. $y=|x-1|$

D. $y=2^{x+1}$

(2)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,对任意 $x_1<x_2$,都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-1$,则下列说法正确的是 ( )

A. $y=f(x)+x$ 是增函数

B. $y=f(x)+x$ 是减函数

C. $y=f(x)$ 是增函数

D. $y=f(x)$ 是减函数

探究点二 求函数的单调区间

例2 (1)函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{-x^2+x+2}}$ 的单调递增区间是 ( )

A. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ B. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{2},2\right]$

(2)设函数 $f(x)=\begin{cases}1,x>1,\\0,x=1,\\-1,x<1,\end{cases}$ $g(x)=x^2f(x-1)$,则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是________.

[总结反思] (1)求函数单调区间的常见方法:①定义法;②图像法;③导数法.

(2)求复合函数单调区间的一般步骤为:①确定函数的定义域;②求简单函数的单调区间;③求复合函数的单调区间,其依据是"同增异减".

(3)单调区间只能用区间表示,不能用集合或不等式表示,有多个单调区间应分开写,不能用并集符号"∪"连接.

变式题 (1)[2019·哈尔滨三中二模] 函数 $f(x)=\log_2(x^2-3x-4)$ 的单调递减区间为 ( )

A. $(-\infty,-1)$ B. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ D. $(4,+\infty)$

(2)[2019·贵阳二模] 下列关于函数 $f(x)=|x-1|-1$ 的结论,正确的是 ( )

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

C. $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减

探究点三 利用函数单调性解决问题

微课4·方法

微点1 利用函数的单调性比较大小

例3 函数 $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$,若 $a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $b=f(\ln 2)$, $c=f\left(\ln\frac{1}{3}\right)$,则 ( )

A. $c>b>a$ B. $b>a>c$

C. $c>a>b$ D. $b>c>a$

[总结反思] 比较函数值的大小时,若自变量的值不在同一个单调区间内,则要利用其函数性质,转化到同一个单调区间内进行比较,对于选择题、填空题能数形结合的尽量用图像法求解.

微点2　利用函数的单调性解决不等式问题

例4　(1)已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且对任意的x_1,x_2且$x_1\neq x_2$,都有$[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)>0$成立,若$f(x^2+1)>f(m^2-m-1)$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立,则实数$m$的取值范围是　　(　　)

A. $(-1,2)$

B. $[-1,2]$

C. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

(2)函数$f(x)=e^x+x-e$,若实数$a(a>0$且$a\neq1)$满足$f\left(\log_a\frac{3}{4}\right)<1$,则$a$的取值范围为________.

[总结反思] 利用函数单调性解不等式的具体步骤是:(1)将函数不等式转化成$f(x_1)>f(x_2)$的形式;(2)考查函数$f(x)$的单调性;(3)根据函数$f(x)$的单调性去掉法则"f",转化为形如"$x_1>x_2$"或"$x_1<x_2$"的常规不等式,从而得解.

微点3　利用函数的单调性求最值问题

例5　(1)已知$a>0$,设函数$f(x)=\frac{2020^{x+1}+2019}{2020^x+1}+2019x^3(x\in[-a,a])$的最大值为$M$,最小值为$N$,则$M+N$的值为　　(　　)

A. 2019　　B. 2020

C. 4039　　D. 4038

(2)[2019·江西红色七校联考] 已知$f(x)=\begin{cases}|x-a|+1,x>1,\\ a^x+a,x\leqslant1\end{cases}(a>0$且$a\neq1)$,若$f(x)$有最小值,则实数$a$的取值范围是　　(　　)

A. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\left(0,\frac{2}{3}\right]\cup(1,+\infty)$　　D. $\left(\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$

[总结反思] 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调,则必在区间的端点处取得最值;若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上不单调,则最小值为函数$f(x)$在该区间内的极小值和区间端点值中最小的值,最大值为函数$f(x)$在该区间内的极大值和区间端点值中最大的值.

微点4　利用函数的单调性求参数的范围(或值)

例6　(1)若$f(x)=\begin{cases}(3-a)x-4a,x<1,\\ x^2,x\geqslant1\end{cases}$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,则$a$的取值范围是　　(　　)

A. $\left[\frac{2}{5},3\right)$　　B. $\left(\frac{2}{5},3\right]$

C. $(-\infty,3)$　　D. $\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$

(2)已知函数$f(x)=e^{|x-a|}$(a为常数),若$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上是增函数,则a的取值范围是________.

[总结反思] (1)视参数为已知数,依据函数的图像或单调性的定义,确定函数的单调区间,与已知单调区间比较求参数;(2)若分段函数是单调函数,则不仅要保证在各区间上单调性一致,还要确保在整个定义域内是单调的.

应用演练

1. 【微点1】设$a\in\mathbf{R}$,函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是增函数,则　　(　　)

A. $f(a^2+a+2)>f\left(\frac{7}{4}\right)$

B. $f(a^2+a+2)<f\left(\frac{7}{4}\right)$

C. $f(a^2+a+2)\geqslant f\left(\frac{7}{4}\right)$

D. $f(a^2+a+2)\leqslant f\left(\frac{7}{4}\right)$

2. 【微点2】[2020·佛山一中月考] 已知函数$f(x)$是定义域为$[0,+\infty)$的减函数,且$f(2)=-1$,则满足$f(2x-4)>-1$的实数x的取值范围是　　(　　)

A. $(3,+\infty)$

B. $(-\infty,3)$

C. $[2,3)$

D. $[0,3)$

3. 【微点2】[2019·新乡三模] 已知函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减,且当$x\in[-2,1]$时,$f(x)=x^2-2x-4$,则关于x的不等式$f(x)<-1$的解集为　　(　　)

A. $(-\infty,-1)$

B. $(-\infty,3)$

C. $(-1,3)$

D. $(-1,+\infty)$

4. 【微点3】设函数$f(x)=\frac{2x}{x-2}$在区间$[3,4]$上的最大值和最小值分别为M,m,则$\frac{m^2}{M}=$　　(　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{8}{3}$

5. 【微点4】已知函数$f(x)=x^2-6x+8$在$[1,a)$上单调递减,则实数a的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,3]$

B. $[0,3]$

C. $[3,+\infty)$

D. $(1,3]$

请完成课时作业(六)

第 7 讲 函数的奇偶性与周期性

内容要求 1. 结合具体函数,了解奇偶性的概念和几何意义.
2. 结合三角函数,了解周期性的概念和几何意义.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识 多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数的奇偶性

	偶函数	奇函数
定义	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x	
	都有________,那么函数 $f(x)$ 是偶函数	都有________,那么函数 $f(x)$ 是奇函数
图像特征	关于______对称	关于______对称

2. 函数的周期性

(1)周期函数

对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个非零常数 T,使得当 x 取定义域内的任何值时,都有__________,那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数,称 T 为这个函数的周期.

(2)最小正周期

如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个________,那么这个________就叫作 $f(x)$ 的最小正周期.

常用结论

1. 奇(偶)函数定义的等价形式:

(1) $f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

2. 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T,对 $f(x)$ 的定义域内任一自变量的值 x,有如下结论:

(1)若 $f(x+a)=-f(x)$,则 $T=2|a|$;

(2)若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$,则 $T=2|a|$;

(3)若 $f(x+a)=f(x+b)$,则 $T=|a-b|$.

3. 对称性与周期性之间的常用结论:

(1)若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 对称,则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2|b-a|$;

(2)若函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称,则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2|b-a|$;

(3)若函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 和点 $(b,0)$ 对称,则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4|b-a|$.

4. 关于函数图像的对称中心或对称轴的常用结论:

(1)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)=f(a-x)$,则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称;

(2)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)=f(b-x)$,则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称;

(3)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)=-f(b-x)$,则函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ 对称;

(4)若函数 $f(x)$ 满足关系 $f(a+x)+f(b-x)=c$,则函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 对称.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=x^2-1$, $f(x)=x^3$, $f(x)=x^2+\cos x$, $f(x)=\frac{1}{x}+|x|$ 中,偶函数的个数是________.

2. [教材改编] 若奇函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是减函数,则它在 $[-b,-a]$ 上是________函数;若偶函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数,则它在 $[-b,-a]$ 上是________函数.

3. [教材改编] 已知 $f(x)$ 为奇函数,当 $x>0$ 时, $f(x)=\sqrt{x}-1$,则 $f(-2)=$________.

4. [教材改编] 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(x)$,当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=\log_4(x^2+4)$,则 $f(2019)=$________.

题组二 常错题

◆ **索引**:判定奇偶性时,不化简解析式导致出错;奇偶性应用不熟练导致出错;找不到周期函数的周期从而求不出结果;利用奇偶性求解析式时忽略定义域导致出错.

5. 函数 $f(x)=\frac{\lg(1-x^2)}{|x+3|-3}$ 是________函数.(填"奇"或"偶"或"非奇非偶")

6. 若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数,则函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线________对称;若函数 $y=g(x+b)$ 是奇函数,则函数 $y=g(x)$ 的图像关于点________成中心对称.

7. 若奇函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称, $f(2.5)=2$,则 $f(-0.5)=$________.

8. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x>0$ 时, $f(x)=x-3$,则函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=$__________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　函数奇偶性及其延伸

微课5 · 思维

微点1　函数奇偶性的判断

例1 (1)函数 $f(x)=|x+1|-|x-1|$ (　　)

A. 是奇函数

B. 是偶函数

C. 既是奇函数也是偶函数

D. 既不是奇函数也不是偶函数

(2)下列函数是奇函数的是 (　　)

A. $y=\cos x+x$

B. $y=x^3\sin x$

C. $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

D. $y=e^x+e^{-x}$

[总结反思] 函数具有奇偶性包括两个必备条件：

(1)定义域关于原点对称，这是函数具有奇偶性的必要不充分条件，所以首先考虑定义域.

(2)判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.在判断奇偶性时，可以转化为判断奇偶性的等价关系式 $f(x)+f(-x)=0$(奇函数)或 $f(x)-f(-x)=0$(偶函数)是否成立.

常见特殊结构的奇偶函数：$f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$($a>0$ 且 $a\neq1$)为奇函数，$f(x)=a^x+a^{-x}$($a>0$ 且 $a\neq1$)为偶函数.

微点2　函数奇偶性的应用

例2 (1)[2019·烟台一模] 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，当 $x<0$ 时，$f(x)=\log_2(-x)+m$，则实数 $m=$ (　　)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

(2)[2019·上饶横峰中学模拟] 设函数 $f(x)=\frac{\sin x+x\cos x}{ax^2}$($a\in\mathbf{R}$，$a\neq0$)，若 $f(-2019)=2$，则 $f(2019)=$ (　　)

A. 2　　B. -2

C. 2019　　D. -2019

[总结反思] 利用函数的奇偶性可以解决以下问题：

(1)求函数值：将待求函数值利用奇偶性转化为求函数已知解析式的区间上的函数值.

(2)求解析式：将待求区间上的自变量转化到已知解析式区间上，再利用奇偶性的定义求出.

(3)求解析式中的参数：利用待定系数法求解，根据 $f(x)\pm f(-x)=0$ 得到关于参数的恒等式，由系数的对等性得方程(组)，进而得出参数的值.

(4)画函数图像：利用函数的奇偶性可画出函数在另一对称区间上的图像.

(5)求特殊值：利用奇函数的最大值与最小值的和为零可求一些特殊结构的函数值.

微点3　奇偶性延伸到其他对称性问题（从平移角度说说对称性问题）

例3 (1)[2019·临沂三模] 已知函数 $f(x)$，$g(x)$的定义域都为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，设 $h(x)=|f(x+1)|+g(x+1)$，则下列结论中正确的是 (　　)

A. $h(x)$的图像关于点$(1,0)$对称

B. $h(x)$的图像关于点$(-1,0)$对称

C. $h(x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称

D. $h(x)$的图像关于直线 $x=-1$ 对称

(2)[2019·重庆西南大学附属中学月考] 已知函数 $f(x+2)$是偶函数，$f(x)$在$(-\infty,2]$上单调递减，$f(0)=0$，则$f(2-3x)>0$的解集是 (　　)

A. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

B. $\left(\frac{2}{3},2\right)$

C. $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

D. $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

[总结反思] 由奇偶性延伸所得对称性问题的常见结论有：

(1)若函数 $y=f(x)$为奇函数(或偶函数)，则函数 $y=f(x+a)$的图像关于点$(-a,0)$对称(或关于直线 $x=-a$ 对称)；

(2)若函数 $y=f(x+a)$为奇函数(或偶函数)，则函数 $y=f(x)$的图像关于点$(a,0)$对称(或关于直线 $x=a$ 对称).

应用演练

1.【微点1】[2019·北京房山区二模] 下列函数中为偶函数的是 (　　)

A. $y=x^3+x$　　B. $y=x^2-4$

C. $y=\sqrt{x}$　　D. $y=|x+1|$

2.【微点2】[2019·江西师范大学附属中学三模] 若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x\geq0,\\-x^2+ax,x<0\end{cases}$为奇函数，则实数 a 的值为 (　　)

A. 2　　B. -2

C. 1　　D. -1

3.【微点 2】已知函数 $f(x)=\lg(\sqrt{9x^2+1}-3x)+\sin x+1$，设 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上的最大值和最小值分别为 M,N，则 $M+N$ 的值为 ( )

A. 2　B. 1

C. 0　D. -1

4.【微点 3】已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,2]$ 上为增函数，且 $f(x+2)$ 是 **R** 上的偶函数，若 $f(a)\leqslant f(3)$，则实数 a 的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,1]$

B. $[3,+\infty)$

C. $[1,3]$

D. $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

5.【微点 3】[2019・内江三模] 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，若 $f(x)$ 的图像向左平移 2 个单位后关于 y 轴对称，且 $f(1)=1$，则 $f(4)+f(5)=$________.

探究点二 函数的周期性及其应用

例 4 (1)已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，且 $f(x)=f(x+2)$ 恒成立，当 $x\in(-2,0]$ 时，$f(x)=x^2$，则当 $x\in(2,4]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式为 ( )

A. $f(x)=x^2-4$　B. $f(x)=x^2+4$

C. $f(x)=(x+4)^2$　D. $f(x)=(x-4)^2$

(2)[2019・西安中学月考] 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-\frac{1}{f(x+2)}$，且当 $x\in(-2,0]$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{4}$，则 $f(\log_2 20)=$ ( )

A. -16　B. $-\frac{1}{16}$

C. $-\frac{3}{4}$　D. -4

[总结反思] (1)注意周期性的常见表达式的应用.

(2)根据函数的周期性，可以由函数局部的解析式(或函数值)得到整个定义域内的解析式(或相应的函数值).

(3)在解决具体问题时，要注意结论"若 T 是函数的周期，则 $kT(k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0)$ 也是函数的周期"的应用.

变式题 (1)[2019・西安中学期末] 定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$. 当 $-3\leqslant x<-1$ 时，$f(x)=-(x+2)^2$，当 $-1\leqslant x<3$ 时，$f(x)=x$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2019)=$ ( )

A. 335　B. 336

C. 338　D. 2016

(2)(多选题)函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是奇函数，则 ( )

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 的周期为 4

D. $f(x+3)$ 是奇函数

探究点三 以函数性质的综合为背景的问题

微课6・思维

微点 1 奇偶性与单调性的结合

例 5 (1)[2019・天津北辰区模拟] 已知函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$a=f(-\log_3 13)$，$b=f\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}\right)$，$c=f(2^{0.6})$，则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$　B. $a>c>b$

C. $b>a>c$　D. $c>a>b$

(2)已知定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数 $f(x)=\frac{2^x-m}{2^x+1}+\sin x$，若 $f(2x+3)<f(2m-1)$，则实数 x 的取值范围是________.

[总结反思] (1)比较函数值的大小问题，可以利用奇偶性把不在同一单调区间上的两个或多个自变量的函数值转化到同一单调区间上，再利用函数的单调性比较大小；

(2)对于抽象函数不等式的求解，应变形为 $f(x_1)>f(x_2)$ 的形式，再结合单调性脱去法则"f"变成常规不等式(如 $x_1<x_2$ 或 $x_1>x_2$)求解.

微点 2 奇偶性与周期性的结合

例 6 (1)[2019・兰州一中三模] 已知函数 $f(x)$ 是 **R** 上的偶函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+3)=-f(x)$，当 $x\in(-3,0)$ 时，$f(x)=2x-5$，则 $f(8)=$ ( )

A. 11　B. 5　C. -9　D. -1

(2)[2019・栖霞模拟] 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x-2)$，当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=$ ( )

A. 2019　B. 0

C. 1　D. -1

[总结反思] 周期性与奇偶性相结合的问题多为求函数值问题，常利用奇偶性及周期性将所求函数值转化为已知函数解析式的区间上的函数值.

微点 3 奇偶性、周期性与单调性的结合

例 7 [2019・泉州质检] 定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x-\cos x$，则下列结论正确的是 ( )

A. $f\left(\frac{2020}{3}\right)<f\left(\frac{2019}{2}\right)<f(2018)$

B. $f(2018)<f\left(\frac{2020}{3}\right)<f\left(\frac{2019}{2}\right)$

C. $f(2018)<f\left(\frac{2019}{2}\right)<f\left(\frac{2020}{3}\right)$

D. $f\left(\frac{2019}{2}\right)<f\left(\frac{2020}{3}\right)<f(2018)$

[总结反思] 解决周期性、奇偶性与单调性相结合的问题,通常先利用周期性转化自变量所在的区间,然后利用奇偶性和单调性求解.

应用演练

1. 【微点 1】下列函数中,既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是　(　　)

A. $y=x^3$　　B. $y=\cos x$

C. $y=e^x$　　D. $y=|x|+1$

2. 【微点 1】[2019·潮州二模] 设函数 $f(x)=e^x+e^{-x}+x^2$,则使 $f(2x)>f(x+1)$成立的 x 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

3. 【微点 2】[2019·上饶重点中学联考] 函数 $f(x)=2^{|\sin 2x|}$是　(　　)

A. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

B. 最小正周期为 π 的奇函数

C. 最小正周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数

D. 最小正周期为 π 的偶函数

4. 【微点 2】[2019·济宁二模] 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(x)$的周期为 4,当 $x\in(0,2)$时,$f(x)=x^2+\ln x$,则 $f(2019)=$　(　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. 【微点 3】定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=-f(x)$,当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=2^x-1$,设 $a=\ln\frac{1}{\pi}$,$b=e^{-\ln\frac{2}{5}}$,$c=\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.1}$,则　(　　)

A. $f(a)<f(b)<f(c)$　　B. $f(b)<f(c)<f(a)$

C. $f(b)<f(a)<f(c)$　　D. $f(c)<f(b)<f(a)$

请完成课时作业(七)

第 8 讲　二次函数与幂函数

内容要求　1. 二次函数

(1)掌握二次函数的图像与性质(单调性、对称性、顶点、最值);

(2)了解二次函数的广泛应用.

2. 幂函数

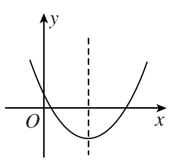
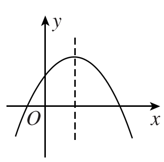
通过具体实例,结合 $y=x$,$y=\frac{1}{x}$,$y=x^2$,$y=\sqrt{x}$,$y=x^3$ 的图像,理解它们的变化规律,了解幂函数.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

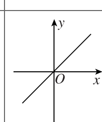
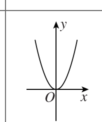
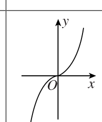
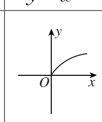
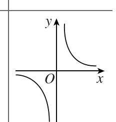
1. 二次函数的图像和性质

解析式	$y=ax^2+bx+c(a>0)$	$y=ax^2+bx+c(a<0)$
图像		
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	______	______
单调性	在______上单调递减,在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递增	在______上单调递增,在$\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$上单调递减
顶点坐标	______	
奇偶性	当______时为偶函数	
对称轴方程	$x=-\frac{b}{2a}$	

2. 幂函数

(1)定义:形如 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$的函数称为幂函数,其中 x 是自变量,α 是常数.

(2)常见的五种幂函数的图像和性质比较

函数		$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图像						
性质	定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	______	______
	值域	$\mathbf{R}$	______	$\mathbf{R}$	______	______
	奇偶性	____函数	____函数	____函数	______函数	____函数
	单调性	在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	在____上单调递减;在____上单调递增	在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	在______上单调递增	在______和______上单调递减
	公共点	______				

常用结论

1. 二次函数解析式的三种形式：

(1)一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$；

(2)顶点式：$f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq0)$；

(3)零点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0)$.

2. 一元二次不等式恒成立的条件：

(1)“$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$恒成立”的充要条件是“$a>0$且$\Delta<0$”；

(2)“$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$恒成立”的充要条件是“$a<0$且$\Delta<0$”.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 若函数$f(x)=4x^2-kx-8$在$[5,20]$上是单调函数，则实数k的取值范围是________.
2. [教材改编] 已知幂函数$y=f(x)$的图像过点$(2,\sqrt{2})$，则函数$f(x)=$________.
3. [教材改编] 函数$f(x)=x^2-2x+3$在闭区间$[0,3]$上的最大值为________，最小值为________.
4. [教材改编] 若函数$y=x^2+(a+2)x+3,x\in[a,b]$的图像关于直线$x=1$对称，则$b=$________.

题组二 常错题

◆ **索引**：图像特征把握不准出错；不会利用二次函数图像解决问题出错；二次函数的单调性理解不到位出错；忽略幂函数的定义域出错；幂函数的图像掌握不到位出错.

5. 如图2-8-1，若$a<0,b>0$，则函数$y=ax^2+bx$的大致图像是________(填序号).

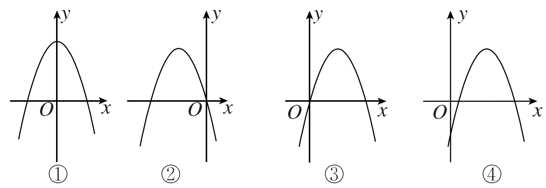


图 2-8-1

6. 设二次函数$f(x)=x^2-x+a(a>0)$，若$f(m)<0$，则$f(m-1)$________0.(填“>”“<”或“=”)
7. 若函数$y=mx^2+x+2$在$[3,+\infty)$上是减函数，则m的取值范围是________.
8. 已知幂函数$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$，若$f(a+1)<f(10-2a)$，则a的取值范围为________.
9. 当$x\in(0,1)$时，函数$y=x^m$的图像在直线$y=x$的上方，则m的取值范围是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

▶ 探究点一 幂函数的图像和性质

1. 已知幂函数$y=x^n,y=x^m,y=x^p$的图像如图2-8-2所示，则 ( )

A. $m>n>p$

B. $m>p>n$

C. $n>p>m$

D. $p>n>m$

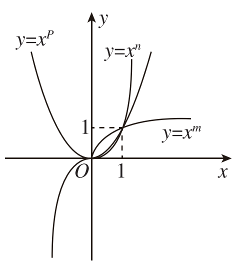


图 2-8-2

2. 幂函数$f(x)=x^{a^2-10a+23}(a\in\mathbf{Z})$为偶函数，且$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是减函数，则$a=$ ( )

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3. 已知点$(m,9)$在幂函数$f(x)=(m-2)x^n$的图像上，设$a=f\left(m^{-\frac{1}{3}}\right),b=f\left(\ln\frac{1}{3}\right),c=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则$a,b,c$的大小关系为 ( )

A. $a<c<b$ B. $b<c<a$

C. $c<a<b$ D. $b<a<c$

[总结反思] 幂函数的性质因幂指数大于零、等于零或小于零而不同，解题中要善于根据幂指数的符号和其他性质确定幂函数的解析式、参数取值等.

▶ 探究点二 二次函数的解析式

例1 (1)已知二次函数$y=f(x)$的顶点坐标为$\left(-\frac{3}{2},49\right)$，且方程$f(x)=0$的两个实根之差等于7，则此二次函数的解析式是____________.

(2)已知二次函数$f(x)$的图像经过点$(4,3)$，$f(x)$的图像截x轴所得的线段长为2，且对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(2-x)=f(2+x)$，则函数$f(x)$的解析式为$f(x)=$________.

[总结反思] 求二次函数解析式的三个策略：(1)已知三个点的坐标，宜选用一般式；(2)已知顶点坐标、对称轴、最大(小)值等，宜选用顶点式；(3)已知图像与x轴的两交点的坐标，宜选用零点式.

变式题 已知二次函数$f(x)$满足$f(2)=-1,f(-1)=-1$，且$f(x)$的最大值是8，则此二次函数的解析式为____________.

▶ 探究点三 二次函数的图像与性质问题

微课7·方法

微点1 通过图像识别二次函数

例2 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像如图2-8-3所示. 给出下列结论：①$a+b+c<0$；②$a-b+c>0$；③$abc>0$；④$b=2a$. 其中正确的是________.(填序号)

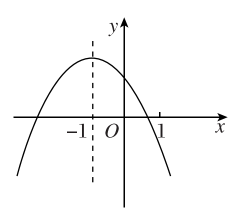


图 2-8-3

[总结反思] 一般地,给出了二次函数的图像,我们可以从图像中得到下列信息:(1)开口方向;(2)判别式的正负;(3)对称轴方程;(4)特殊点的函数值的大小(正负).

微点 2　二次函数的单调性问题

例 3 (1)函数 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 的单调递增区间是 (　　)

A. $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$和$[2,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$和$\left[\frac{3}{2},2\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$和$[2,+\infty)$

(2)已知函数 $f(x)=ax^2-2x-2$ 在区间$[1,+\infty)$上不单调,则实数 a 的取值范围是________.

[总结反思] 对于二次函数的单调性,关键是确定其图像的开口方向与对称轴的位置,若开口方向或对称轴的位置不确定,则需要分类讨论求解.

微点 3　二次函数的最值问题

例 4 已知函数 $f(x)=-x^2+2ax+1-a$ 在$[0,1]$上的最大值为 2,则 a 的值为________.

[总结反思] 二次函数在闭区间上的最值主要有三种类型:轴定区间定、轴动区间定、轴定区间动.不论哪种类型,解题的关键都是对称轴与区间的位置关系,当含有参数时,要依据对称轴与区间的位置关系进行分类讨论.

微点 4　二次函数的恒成立问题

例 5 已知 $f(x)=x^2+2x+1+a$,若对任意的 $x\in\mathbf{R}$,$f[f(x)]\geqslant 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{\sqrt{5}-3}{2},+\infty\right)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[0,+\infty)$

[总结反思] 由不等式恒成立求参数取值范围一般有两个解题思路:一是分离参数,二是不分离参数.两种思路都是将问题归结为求函数的最值,若不分离参数,则一般需要对参数进行分类讨论求解;若分离参数,则 $a\geqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\max}$,$a\leqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\min}$.

应用演练

1. 【微点 1】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图像如图 2-8-4 所示,则下列结论中正确的是 (　　)

A. $a>0$

B. 当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大

C. $c<0$

D. 3 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根

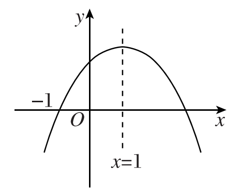


图 2-8-4

2. 【微点 3】已知函数 $f(x)=x^2-6x+8$,且函数 $f(x)$在$[1,a]$上的最小值为 $f(a)$,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $(1,2]$　　B. $(1,3]$

C. $(1,4]$　　D. $(1,5]$

3. 【微点 4】已知函数 $f(x)=x^2+x+6$,若存在 $x_0\in[0,2]$,使得 $f(x_0)\geqslant a^2-a$ 成立,则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-3,4]$

B. $[-2,3]$

C. $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$

D. $(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$

4. 【微点 2】已知函数 $f(x)=(a-1)x^2+2x+3$ 在$(-\infty,4]$上是增函数,则实数 a 的取值范围是________.

5. 【微点 4】[2019 · 天津和平区质检] 已知函数 $f(x)=-x^2+2x+3$,若 $f(x)\leqslant 2^{1-3a}$ 对任意实数 x 都成立,则实数 a 的最大值为________.

请完成课时作业(八)

第 9 讲　指数与指数函数

内容要求 1. 通过对有理数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ ($a>0$,且 $a\neq 1$;m,n 为整数,且 $n>0$),实数指数幂 a^x ($a>0$,且 $a\neq 1$;$x\in\mathbf{R}$)含义的认识,了解指数幂的拓展过程,掌握指数幂的运算性质.

2. 指数函数

(1)通过具体实例,了解指数函数的实际意义,理解指数函数的概念;

(2)能用描点法或借助计算工具画出具体指数函数的图像,探索并理解指数函数的单调性与特殊点.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识 多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 根式

n 次方根	概念	如果 $x^n=a$，那么 x 叫作 a 的________，其中 $n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$
	性质	当 n 是________时，a 的 n 次方根为 $x=\sqrt[n]{a}$
		当 n 是________时，正数 a 的 n 次方根为 $x=\pm\sqrt[n]{a}$，负数的偶次方根________
		0 的任何次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0}=0$
根式	概念	式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作________，其中 n 叫作________，a 叫作________
	性质	当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=$________
		当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=\lvert a\rvert=$________

2. 有理数指数幂

(1)幂的有关概念

①正数的正分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且$n>1$）.

②正数的负分数指数幂：$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0$，$m$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1$）.

③0 的正分数指数幂等于________，0 的负分数指数幂________.

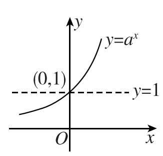
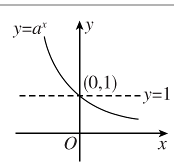
(2)有理数指数幂的性质

①$a^ra^s=$________（$a>0,r,s\in\mathbf{Q}$）；

②$(a^r)^s=$________（$a>0,r,s\in\mathbf{Q}$）；

③$(ab)^r=$________（$a>0,b>0,r\in\mathbf{Q}$）.

3. 指数函数的图像与性质

$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$a>1$	$0<a<1$
图像		

（续表）

$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）	$a>1$	$0<a<1$
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	________	
性质	过定点________	
	当 $x>0$ 时，________；当 $x<0$ 时，________	当 $x>0$ 时，________；当 $x<0$ 时，________
	在 $\mathbf{R}$ 上是________	在 $\mathbf{R}$ 上是________

常用结论

1. 函数 $y=a^x+b$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像恒过定点 $(0,1+b)$.
2. 指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像以 x 轴为渐近线.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一 常识题

1. [教材改编] 若 $x+x^{-1}=3$，则 $x^2-x^{-2}=$________.
2. [教材改编] 已知 $2^{x-1}<2^{3-x}$，则 x 的取值范围是________.
3. [教材改编] 函数 $y=a^{x-1}+2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像恒过定点________.
4. [教材改编] 下列所给函数中值域为 $(0,+\infty)$ 的是________.（填序号）

①$y=-5^x$；②$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}$；③$y=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1}$；

④$y=\sqrt{1-2^x}$.

题组二 常错题

◆ **索引**：忽略 n 的范围导致式子 $\sqrt[n]{a^n}$（$a\in\mathbf{R}$）化简出错；不能正确理解指数函数的概念致错；指数函数问题忽略底数的两种情况致错；复合函数问题容易忽略指数函数的值域致错.

5. 计算 $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}=$________.
6. 若函数 $f(x)=(a^2-3)\cdot a^x$ 为指数函数，则 $a=$________.
7. 若函数 $f(x)=a^x$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 2，则 $a=$________.
8. 函数 $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ 的值域为____________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

▶ 探究点一 指数幂的化简与求值

1. 化简 $\left(\sqrt[3]{(-5)^2}\right)^{\frac{3}{4}}$ 的结果为 （ ）

A. 5　　B. $\sqrt{5}$

C. $-\sqrt{5}$　　D. -5

2. 化简 $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(\dfrac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$ 的结果为（ ）

A. $6a$　　B. $-a$

C. $-9a$　　D. $9a^2$

3. 计算：$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^{6}+(-2019)^{0}-4\times\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{(3-\pi)^{4}}=$________.

4. 已知 $x+x^{-1}=3$，则 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^{2}+x^{-2}-6}$ 的值为________.

[总结反思] 指数幂运算的一般原则：

(1)指数幂的运算首先将根式、负分数指数幂统一为正分数指数幂，以便利用法则计算.

(2)先乘除后加减，负指数幂化成正指数幂的倒数.

(3)底数是负数，先确定符号；底数是小数，先化成分数；底数是带分数，先化成假分数.

(4)运算结果不能同时含有根号和分数指数，也不能既有分母又含有负指数.

探究点二　指数函数的图像及应用

例 1 (1)函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 与函数 $y=(a-1)x^{2}-2x-1$ 在同一个坐标系内的图像可能是 (　　)

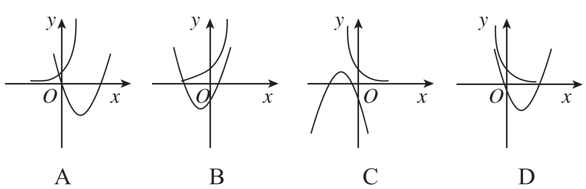


图 2-9-1

(2)[2019·菏泽期末] 已知实数 a,b 满足等式 $2019^{a}=2020^{b}$，则下列关系式中不可能成立的是 (　　)

A. $0<a<b$　　B. $a<b<0$

C. $0<b<a$　　D. $a=b$

[总结反思] (1)研究指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$ 的图像要抓住三个特殊点：$(1,a)$，$(0,1)$，$\left(-1,\frac{1}{a}\right)$.

(2)与指数函数有关的函数图像问题的研究，往往利用基本指数函数的图像，通过平移、对称变换得到其图像.

(3)一些指数方程、不等式问题的求解，往往结合相应的指数型函数图像，利用数形结合求解.

变式题 (1)函数 $y=\dfrac{xa^{x}}{|x|}(a>1)$ 的大致图像是 (　　)

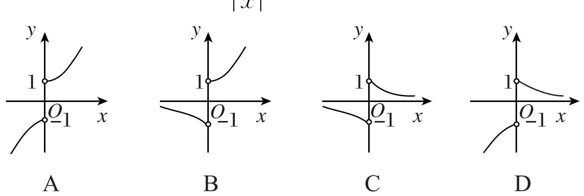


图 2-9-2

(2)已知方程 $|3^{x}-1|=k$ 只有一个解，则 k 的取值范围为____________.

探究点三　利用指数函数的性质解决有关问题

微课8·方法

微点 1　比较指数式的大小

例 2 (1)已知 $a=36^{\frac{1}{5}}$，$b=3^{\frac{4}{3}}$，$c=9^{\frac{2}{5}}$，则 (　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$

C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

(2)[2019·厦门质检] 已知 $a>b>0$，$x=a+be^{b}$，$y=b+ae^{a}$，$z=b+ae^{b}$，则 (　　)

A. $x<z<y$　　B. $z<x<y$

C. $z<y<x$　　D. $y<z<x$

[总结反思] 比较指数式的大小，其依据是指数函数的单调性，原则上是将待比较的指数式化为同底的指数式，并要注意底数的范围是 $(0,1)$ 还是 $(1,+\infty)$，若不能化为同底，则可化为同指数或利用中间变量比较.

微点 2　解简单的指数方程或不等式

例 3 (1)若关于 x 的方程 $\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}+a-2=0$ 有解，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $0\leqslant a<1$　　B. $1\leqslant a<2$

C. $a\geqslant1$　　D. $a>2$

(2)若 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\geqslant0$ 时满足 $f(x)=2^{x}-4$，则不等式 $f(x-2)>0$ 的解集为____________.

[总结反思] (1) $a^{f(x)}=a^{g(x)}(a>0$ 且 $a\neq1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$. (2) $a^{f(x)}>a^{g(x)}$，当 $a>1$ 时，等价于 $f(x)>g(x)$；当 $0<a<1$ 时，等价于 $f(x)<g(x)$. (3)有些含参数的指数不等式，需要分离变量，转化为求有关函数的最值问题.

微点 3　指数函数性质的综合问题

例 4 (1)[2019·江淮名校联考] 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+1}-\dfrac{1}{2}$，则 $f(x)$ 是 (　　)

A. 奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

B. 偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

C. 奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

D. 偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

(2)[2019·延边第二中学月考] 函数 $f(x)=\dfrac{2^{x}-b}{2^{x+1}+a}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，a,b 是常数. 不等式 $f(k\cdot3^{x})+f(3^{x}-9^{x}-2)<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为 (　　)

A. $k<2\sqrt{2}-1$

B. $-2\sqrt{2}-1<k<2\sqrt{2}-1$

C. $k\leqslant-1$

D. $-1\leqslant k<2\sqrt{2}-1$

［总结反思］指数函数性质的综合问题，主要涉及单调性、奇偶性、最值等，应在有关性质的基础上，结合指数函数的性质进行解决，而指数函数性质的重点是单调性，注意利用单调性实现问题的转化.

应用演练

1. 【微点1】［2019·北京通州区一模］已知 $c<0$，则下列不等式中成立的是（　　）

A. $c>2^c$　　B. $c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$

C. $2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　　D. $2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$

2. 【微点1】［2019·宜宾二诊］已知 $a=2^{0.4}$，$b=9^{0.2}$，$c=(\sqrt[4]{3})^3$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

3. 【微点2】设 $2^x=8^{y+1}$，$9^y=3^{x-9}$，则 $x+y$ 的值为（　　）

A. 18　　B. 21　　C. 24　　D. 27

4. 【微点2】若 $2^{x^2+1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$，则函数 $y=2^x$ 的值域是（　　）

A. $\left[\frac{1}{8},2\right)$　　B. $\left[\frac{1}{8},2\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{1}{8}\right]$　　D. $[2,+\infty)$

5. 【微点3】已知幂函数 $f(x)=(m-1)^2x^{m^2-4m+2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，函数 $g(x)=2^x-t$，若对任意 $x_1\in[1,6)$，总存在 $x_2\in[1,6)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，则 t 的取值范围是（　　）

A. $\varnothing$　　B. $t\geqslant28$ 或 $t\leqslant1$

C. $t>28$ 或 $t<1$　　D. $1\leqslant t\leqslant28$

请完成课时作业（九）

第10讲　对数与对数函数

内容要求　1. 理解对数的概念和运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数.

2. 了解对数函数的概念. 能用描点法或借助计算工具画出具体对数函数的图像，探索并了解对数函数的单调性与特殊点.

3. 知道对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数($a>0$，且 $a\neq1$).

课前双基巩固

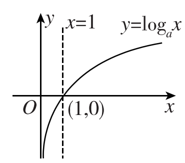
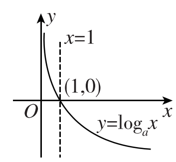
/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 对数

概念	如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么 x 叫作以 a 为底 N 的________，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫作对数的底数，N 叫作真数，$\log_a N$ 叫作对数式	
性质	底数的限制：$a>0$，且 $a\neq1$	
	对数式与指数式的互化：$a^x=N\Leftrightarrow$________	
	负数和零没有________	
	$\log_a 1=$________	
	$\log_a a=1$	
	对数恒等式：$a^{\log_a N}=$________	
运算法则	$\log_a(M\cdot N)=$________	$a>0$，且 $a\neq1$，$M>0$，$N>0$
	$\log_a\frac{M}{N}=$________	
	$\log_a M^n=$________$(n\in\mathbf{R})$	
换底公式	换底公式：$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}(a>0$，且 $a\neq1$，$c>0$，且 $c\neq1$，$b>0)$	
	推论：$\log_{a^m} b^n=$________，$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$	

2. 对数函数的概念、图像与性质

概念	函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq1)$ 叫作________函数	
底数	$a>1$	$0<a<1$
图像		
定义域	________	
值域	________	
性质	过定点________，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	在区间$(0,+\infty)$上是________函数	在区间$(0,+\infty)$上是________函数

3. 反函数

指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$ 与对数函数____________互为反函数，它们的图像关于直线________对称.

常用结论

1. 互为反函数的两个函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.
2. 只有在定义域上单调的函数才存在反函数.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. ［教材改编］化简 $\log_a b\log_b c\log_c a$ 的结果是________.
2. ［教材改编］函数 $f(x)=\log_2(2-x)$ 的定义域是________.
3. ［教材改编］若函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=2^x$ 的反函数，则 $f(2)=$________.
4. ［教材改编］函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)$ 的单调递增区间是________.

题组二　常错题

◆**索引**：对数的性质及其运算掌握不到位；忽略真数大于零致错；不能充分运用对数函数的性质；忽略对底数的讨论致误.

5. 有下列结论：①$\lg(\lg 10)=0$；②$\lg(\ln e)=0$；③若 $\lg x=1$，则 $x=10$；④若 $\log_2 2=x$，则 $x=1$；⑤若 $\log_m n\cdot\log_3 m=2$，则 $n=9$. 其中正确结论的序号是____________.
6. 已知 $\lg x+\lg y=2\lg(x-2y)$，则 $\frac{x}{y}=$________.
7. 设 $a=\frac{1}{4}$，$b=\log_9\frac{8}{5}$，$c=\log_8\sqrt{3}$，则 a,b,c 的大小关系是________.
8. 若函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 在$[2,4]$上的最大值与最小值的差是1，则 $a=$________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

▶ 探究点一　对数式的化简与求值

例1 (1)［2019·新乡三模］设 $a=\lg 6$，$b=\lg 20$，则 $\log_2 3=$　　(　　)

A. $\frac{a+b-1}{b+1}$　B. $\frac{a+b-1}{b-1}$　C. $\frac{a-b+1}{b+1}$　D. $\frac{a-b+1}{b-1}$

(2) $\log_3\frac{1}{2}\times\log_4 9+\lg\frac{5}{2}+2\lg 2=$________.

［总结反思］(1)对数运算法则是在化为同底的情况下进行的，因此经常会用到换底公式及其推论. 在对含有字母的对数式进行化简时，必须保证恒等变形.
(2)利用对数运算法则，在真数的积、商、幂与对数的和、差、倍之间进行转化.

变式题 (1)设 $g(x)=\ln(2^x+1)$，则 $g(4)-g(3)+g(-3)-g(-4)=$　　(　　)

A. -1　B. 1　C. $\ln 2$　D. $-\ln 2$

(2)［2019·济宁二模］已知 $a=\log_4 9$，$b=\log_2 5$，则 $2^{2a+b}=$________.

▶ 探究点二　对数函数的图像及应用

例2 (1)［2019·济南外国语学校模拟］若函数 $f(x)=a^x-a^{-x}(a>0$ 且 $a\neq1)$ 在 **R** 上为减函数，则函数 $y=\log_a(|x|-1)$ 的图像可以是　　(　　)

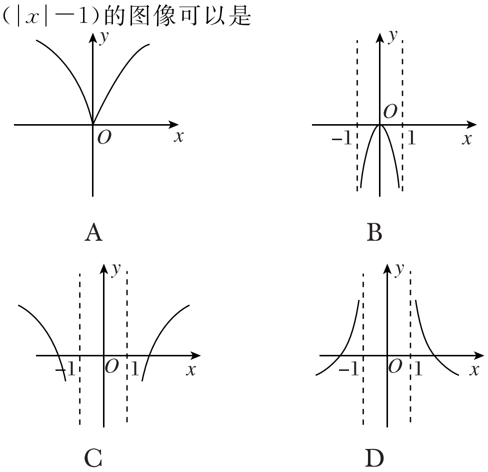


图 2-10-1

(2)［2019·延安一模］已知函数 $f(x)=|\lg(x-1)|$，若 $1<a<b$且 $f(a)=f(b)$，则 $2a+b$ 的取值范围是　　(　　)

A. $[3+2\sqrt{2},+\infty)$　B. $(3+2\sqrt{2},+\infty)$
C. $[6,+\infty)$　D. $(6,+\infty)$

［总结反思］(1)在研究对数函数图像时一定要注意其定义域，注意根据基本的对数函数图像作出经过平移、对称变换得到的函数的图像.(2)一些对数型方程、不等式问题常转化为相应的函数图像问题，利用数形结合法求解.

变式题 (1)［2019·六安一中期末］函数 $f(x)=\frac{x+1}{|x+1|}\cdot\log_a|x|(a>1)$的图像大致是　　(　　)

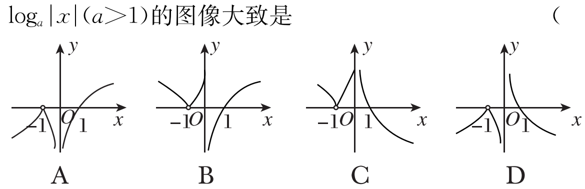


图 2-10-2

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}\lg x,x>0,\\ \lg\left(-\frac{1}{x}\right),x<0,\end{cases}$ 若 $f(m)>f(-m)$，则实数 m 的取值范围是　　(　　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
C. $(-1,0)\cup(0,1)$　D. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

▶ 探究点三　解决与对数函数性质有关的问题

微课9·方法

微点1　比较大小

例3 (1)［2019·唐山二模］已知 $a=\log_3 2$，$b=\log_4 3$，$c=\log_{0.2}0.3$，则 a,b,c 的大小关系是　　(　　)

A. $a<b<c$　B. $a<c<b$
C. $c<a<b$　D. $b<a<c$

(2)设 $m=\log_{0.3}0.6$，$n=\frac{1}{2}\log_2 0.6$，则　　(　　)

A. $m-n>m+n>mn$　B. $m-n>mn>m+n$
C. $m+n>m-n>mn$　D. $mn>m-n>m+n$

[总结反思] 比较对数式的大小，一是将对数式转化为同底的形式，再根据对数函数的单调性进行比较，二是采用中间值0或1等进行比较，三是将对数式转化为指数式，再将指数式转化为对数式，通过循环转化进行比较.

微点2 解简单的对数不等式

例4 (1)[2019·江西名校学术联盟质检] 若 $\log_a(a+1)<\log_a(2\sqrt{a})<0$，则实数 a 的取值范围是________.

(2)[2019·温州九校联盟期末] 已知对数函数 $f(x)$ 的图像过点 $(4,-2)$，则不等式 $f(x-1)-f(x+1)>3$ 的解集为________.

[总结反思] 对于形如 $\log_a f(x)>b$ 的不等式，一般转化为 $\log_a f(x)>\log_a a^b$，再根据底数的范围转化为 $f(x)>a^b$ 或 $0<f(x)<a^b$. 而对于形如 $\log_a f(x)>\log_b g(x)$ 的不等式，一般要转化为同底的不等式来解.

微点3 对数函数性质的综合问题

例5 (1)[2019·广州执信中学月考] 已知函数 $f(x)=\log_a(x^2+x-1)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值比最小值大2，则 a 的值为 ( )

A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$ 或 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2)[2019·广东百校联考] 已知函数 $f(x)=\ln(x-2)+\ln(6-x)$，则 ( )

A. $f(x)$ 在 $(2,6)$ 上单调递增

B. $f(x)$ 在 $(2,6)$ 上的最大值为 $2\ln 2$

C. $f(x)$ 在 $(2,6)$ 上单调递减

D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(4,0)$ 对称

[总结反思] 利用对数函数的性质，求与对数函数有关的函数值域、最值和复合函数的单调性问题，必须弄清三方面的问题：一是定义域，所有问题都必须在定义域内讨论；二是底数与1的大小关系；三是复合函数的构成，即它是由哪些基本初等函数复合而成的. 另外，解题时要注意数形结合、分类讨论、转化与化归思想的使用.

应用演练

1. 【微点1】[2019·韶关模拟] 已知 $a=\ln\frac{2}{3}$，$b=-\log_3\frac{3}{2}$，$c=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，则下面大小顺序正确的是 ( )

A. $c>a>b$ B. $c>b>a$

C. $b>a>c$ D. $a>b>c$

2. 【微点3】[2019·威海二模] 已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(a-x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，则函数 $f(x)$ 的值域为 ( )

A. $(0,2)$ B. $[0,+\infty)$

C. $(-\infty,2]$ D. $(-\infty,0]$

3. 【微点3】函数 $f(x)=\log_2(-x^2+2x)$ 的单调递减区间是________.

4. 【微点2】[2019·北京朝阳区期末] 对任意实数 x，都有 $\log_a(e^x+3)\geqslant 1$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$)，则实数 a 的取值范围是________.

5. 【微点3】[2019·绵阳期末] 已知函数 $f(x)=|\log_2 x|$，实数 a,b 满足 $0<a<b$，且 $f(a)=f(b)$，若 $f(x)$ 在 $[a^2,b]$ 上的最大值为2，则 $\frac{1}{a}+b=$________.

请完成课时作业（十）

第11讲 函数的图像

内容要求 1. 掌握基本初等函数的图像特征，能熟练运用基本初等函数的图像解决问题.
2. 掌握图像的作法：描点法和图像变换.
3. 会运用函数的图像理解和研究函数性质.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识 多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 描点法作图

基本步骤是列表、描点、连线，具体为：

首先：①确定函数的定义域；②化简函数解析式；③讨论函数的性质(奇偶性、单调性、周期性).

其次：列表(尤其注意特殊点、零点、最大值点、最小值点、与坐标轴的交点).

最后：描点，连线.

2. 图像变换

(1)平移变换

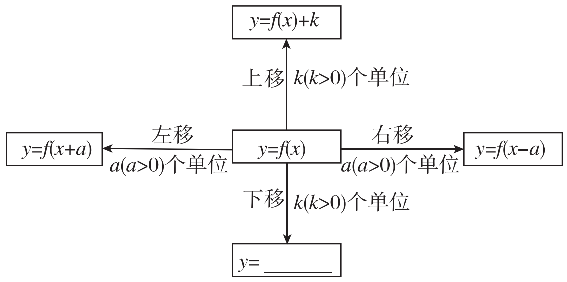


图 2-11-1

(2)对称变换

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}}$$y=$________的图像;

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}}$$y=$________的图像;

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow{\text{关于原点对称}}$$y=$________的图像;

$y=a^x$($a>0$,且$a\neq1$)的图像$\xrightarrow{\text{关于直线 } y=x \text{ 对称}}$$y=$________($a>0$,且$a\neq1$)的图像.

(3)伸缩变换

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[\text{各点横坐标变为原来的}\frac{1}{a}(a>0)\text{倍}]{\text{纵坐标不变}}$$y=f(ax)$的图像.

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[\text{各点纵坐标变为原来的 } A(A>0)\text{ 倍}]{\text{横坐标不变}}$$y=Af(x)$的图像.

(4)翻折变换

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[x\text{ 轴及上方部分不变}]{x\text{ 轴下方部分翻折到上方}}$$y=$________的图像;

$y=f(x)$的图像$\xrightarrow[\text{原 } y \text{ 轴左侧部分去掉,右侧不变}]{y\text{ 轴右侧部分翻折到左侧}}$$y=$________的图像.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数$y=\log_a x$与函数$y=\log_{\frac{1}{a}} x$的图像关于直线________对称.
2. [教材改编] 函数$y=a^x$与$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$的图像关于直线________对称.
3. [教材改编] 函数$y=\log_2 x$与函数$y=2^x$的图像关于直线________对称.
4. [教材改编] 函数$y=\sqrt{|1-x^2|}$的大致图像是________.(填序号)

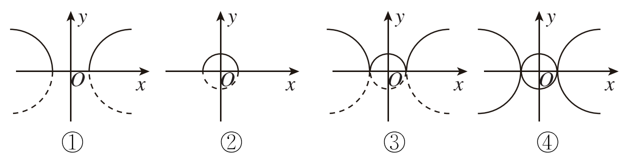


图 2-11-2

题组二　常错题

◆ **索引**:函数图像的几种变换记混;分段函数的图像问题.

5. 将函数$f(x)=(2x+1)^2$的图像向左平移一个单位后,得到的图像的函数解析式为__________.
6. 把函数$f(x)=\ln x$的图像上各点的横坐标扩大到原来的2倍,得到的图像的函数解析式是________.
7. 设$f(x)=2^{-x}$,$g(x)$的图像与$f(x)$的图像关于直线$y=x$对称,$h(x)$的图像由$g(x)$的图像向右平移1个单位得到,则$h(x)=$__________.
8. 函数$y=e^{\ln x}+|x-1|$的图像是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

探究点一　作函数的图像

例 1 分别画出下列函数的图像:

①$y=|\lg(x-1)|$;②$y=2^{x+1}-1$;③$y=x^2-|x|-2$.

[**总结反思**] 为了正确地作出函数的图像,除了掌握"列表、描点、连线"的方法之外,还要做到以下两点:

(1)熟练掌握几种基本函数的图像,以及形如$y=x+\frac{1}{x}$的函数图像.

(2)掌握常用的图像变换方法,如平移变换、伸缩变换、对称变换、翻折变换、周期变换等,利用这些方法来帮助我们简化作图过程.

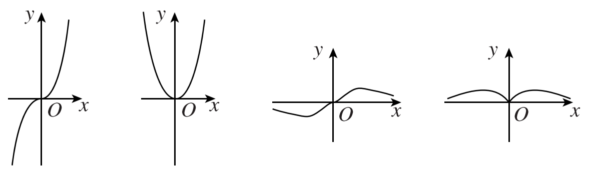
变式题 分别画出下列函数的图像:

(1)$y=|x^2-4x+3|$;(2)$y=\frac{2x+1}{x+1}$;(3)$y=10^{|\lg x|}$.

探究点二 识图与辨图的常见方法 微课10·方法

微点1 性质检验法

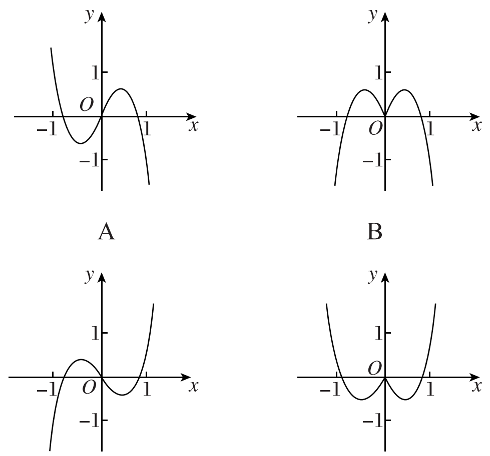
例2 (1)[2019·淮南一模] 函数 $f(x)=x^2(e^x-e^{-x})$ 的图像大致为 ( )



A B C D

图 2-11-3

(2)函数 $y=x^3+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的图像大致为 ( )



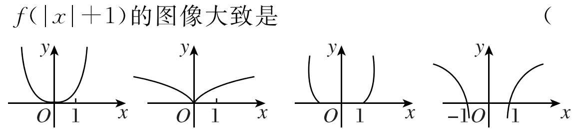
A B C D

图 2-11-4

[总结反思] 利用性质识别函数图像是辨图中的主要方法,采用的性质主要是定义域、值域、函数的奇偶性、函数局部的单调性等.当然,对于一些更为复杂的函数图像的判断,还可能同特殊点法结合起来使用.

微点2 图像变换法

例3 已知对数函数 $f(x)=\log_a x$ 是增函数,则函数 $f(|x|+1)$ 的图像大致是 ( )



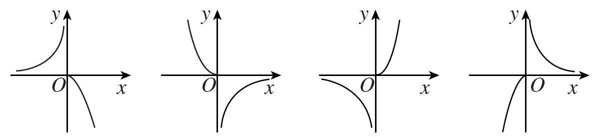
A B C D

图 2-11-5

[总结反思] 通过图像变换识别函数图像要掌握两点:一是熟悉基本初等函数的图像(如指数函数、对数函数等图像);二是了解常见的一些变换形式,如平移变换、翻折变换.

应用演练

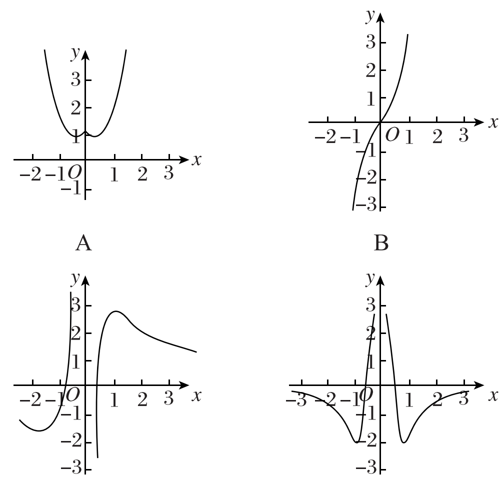
1.【微点2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 0,\\ -\dfrac{1}{x},x>0,\end{cases}$ $g(x)=-f(-x)$,则函数 $g(x)$ 的图像大致是 ( )



A B C D

图 2-11-6

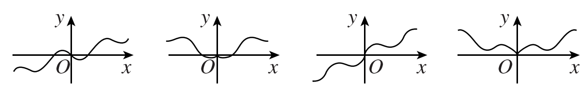
2.【微点1】[2019·雅礼中学二模] 函数 $f(x)=\dfrac{-4x^2+1}{2x^4}$ 的图像大致是 ( )



A B C D

图 2-11-7

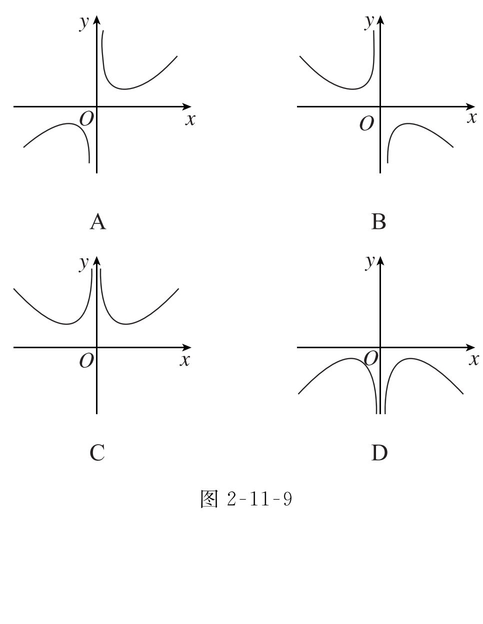
3.【微点1】[2019·保定二模] 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\sin x$ 的图像大致是 ( )



A B C D

图 2-11-8

4.【微点1】函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{4x}$ 的图像大致为 ( )



A B C D

图 2-11-9

探究点三　以函数图像为背景的问题

微课11·思维

微点1　研究函数的性质

例4 [2019·大庆实验中学二模] 已知函数 $f(x)$ 的图像如图2-11-10所示,则函数 $f(x)$ 的解析式可能是 (　　)

A. $f(x)=(4^x+4^{-x})|x|$

B. $f(x)=(4^x-4^{-x})\log_2|x|$

C. $f(x)=(4^x+4^{-x})\log_2|x|$

D. $f(x)=(4^x+4^{-x})\log_{\frac{1}{2}}|x|$

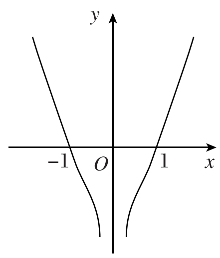


图2-11-10

[总结反思] 一般根据图像研究函数的性质有以下几方面:一是观察函数图像是否连续以及最高点和最低点,确定定义域、值域;二是函数图像是否关于原点或 y 轴对称,确定函数是否具有奇偶性;三是根据图像上升与下降的情况,确定单调性.

微点2　求不等式的解集

例5 已知函数 $y=f(x)$ 的图像是如图2-11-11所示的折线 ACB,函数 $g(x)=\log_2(x+1)$,则不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集是 (　　)

A. $\{x|-1<x\leqslant 0\}$

B. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\{x|-1<x\leqslant 1\}$

D. $\{x|-1<x\leqslant 2\}$

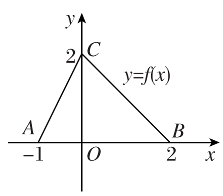


图2-11-11

[总结反思] 当不等式问题不能用代数法求解或用代数法求解比较困难,但其对应函数的图像可作出时,常将不等式问题转化为两函数图像的位置关系问题,从而利用数形结合思想求解.

微点3　确定方程根的个数

例6 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3, x\leqslant 1,\\ \ln x, x>1,\end{cases}$ 则关于 x 的方程 $f(x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0$ 解的个数为 (　　)

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

[总结反思] 根据方程合理构造函数.若构造的是一个函数,则方程根的个数就是函数图像与 x 轴交点的个数;若构造的是两个函数,则方程根的个数就是这两个函数的图像交点的个数.

微点4　与函数思想结合求参数的取值范围

例7 若不等式 $\log_a x+x-4>0(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $(0,2)$ 内有解,则实数 a 的取值范围是________.

[总结反思] 当参数的不等关系不易找出时,可将不等式、函数或方程等价转化为方便作图的两个函数,再根据题设条件和图像确定参数的取值范围.

应用演练

1. 【微点1】[2019·宜昌1月调研] 已知函数 $f(x)$ 的部分图像如图2-11-12所示,则该函数的解析式可能为 (　　)

A. $f(x)=(e^x+e^{-x})\sin x$

B. $f(x)=(e^x+e^{-x})\cos x$

C. $f(x)=-(e^x+e^{-x})\sin x$

D. $f(x)=-(e^x+e^{-x})\cos x$

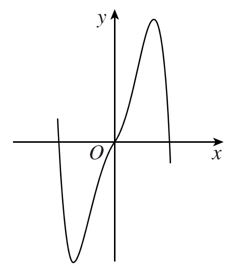


图2-11-12

2. 【微点3】已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, x\leqslant 1,\\ |\ln(x-1)|, x>1,\end{cases}$ 则方程 $f[f(x)]=1$ 的根的个数为 (　　)

A. 7　　B. 5　　C. 3　　D. 2

3. 【微点2】[2019·上海长宁区一模] 已知函数 $f(x)=\log_a x$ 和 $g(x)=k(x-2)$ 的图像如图2-11-13所示,则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0$ 的解集是________.

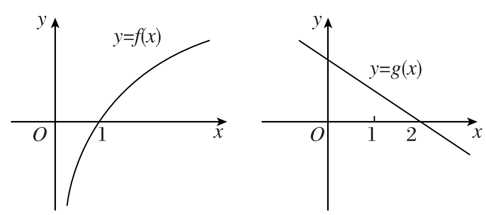


图2-11-13

4. 【微点4】[2019·湖北部分重点中学联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, x\leqslant 0,\\ \lg x, x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)-a=0$ 有两个不相同的实数根,则实数 a 的取值范围是________.

请 完成课时作业(十一)

第 12 讲　函数与方程

内容要求 1. 结合学过的函数图像，了解函数零点与方程解的关系.
2. 结合具体连续函数及其图像的特点，了解函数零点存在定理.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 函数的零点

(1)函数零点的定义

对于函数 $y=f(x)(x\in D)$，把使________的实数 x 叫作函数 $y=f(x)(x\in D)$的零点.

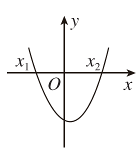
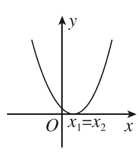
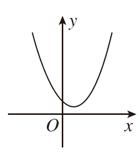
(2)等价关系

方程 $f(x)=0$ 有实数根$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$的图像与________有交点$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$有________.

(3)函数零点的判定(零点存在性定理)

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图像是连续不断的一条曲线，并且有__________，那么函数 $y=f(x)$在区间________内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得________，这个________也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像与零点的关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像			
与 x 轴的交点	________	________	无交点
零点个数	________	________	________

常用结论

1. 在区间 D 上单调的函数在该区间内至多有一个零点.
2. 周期函数如果存在零点，则必有无穷个零点.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点的个数是________.
2. [教材改编] 如果函数 $f(x)=e^{x-1}+4x-4$ 的零点在区间$(n,n+1)$(n 为整数)内，则 $n=$________.
3. [教材改编] 函数 $f(x)=x^3-2x^2+x$ 的零点是________.
4. [教材改编] 若函数 $f(x)=x^2-4x+a$ 存在两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是________.

题组二　常错题

◆索引：错用零点存在性定理；误解函数零点的定义；忽略限制条件；二次函数在 **R** 上无零点的充要条件(判别式小于零).

5. 函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$的零点个数是________.
6. 函数 $f(x)=x^2-3x$ 的零点是________.
7. 若二次函数 $f(x)=x^2-2x+m$ 在区间$(0,4)$上存在零点，则实数 m 的取值范围是________.
8. 若二次函数 $f(x)=x^2+kx+k$ 在 **R** 上无零点，则实数 k 的取值范围是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法　总结归类型 /

▶ 探究点一　函数零点所在区间的判断

例 1 (1)[2019·乌鲁木齐质检] 在下列区间中，函数 $f(x)=e^x+3x-4$ 的零点所在的区间为　(　　)

A. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

(2)[2019·皖西南名校联考] 设 x_0 是方程 $101-x=\lg x$ 的解，且 $x_0\in(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$，则 $k=$________.

[总结反思] 判断函数零点所在区间的方法：(1)解方程法，当对应方程易解时，可直接解方程；(2)零点存在性定理；(3)数形结合法，画出相应函数图像，观察与 x 轴的交点来判断，或转化为两个函数的图像在所给区间上是否有交点来判断.

变式题 [2019·重庆南开中学月考] 函数 $f(x)=\ln x+2x-6$ 的零点一定位于区间　(　　)

A. (1,2)　　B. (2,3)

C. (3,4)　　D. (4,5)

▶ 探究点二　函数零点个数的讨论

例 2 (1)[2019·凯里三模] 函数 $f(x)=\log_3|x|-|\sin \pi x|$在区间$[-2,0)\cup(0,3]$上零点的个数为　(　　)

A. 5　B. 6　C. 7　D. 8

(2)[2019·潍坊三模] 已知 $f(x)$是定义在$[-10,10]$上的奇函数，且 $f(x)=f(4-x)$，则函数 $f(x)$的零点个数至少为　(　　)

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

[总结反思] 关于函数零点个数的讨论,基本解法有:(1)直接法,令 $f(x)=0$,方程有多少个解则 $f(x)$ 有多少个零点;(2)定理法,利用定理时往往还要结合函数的单调性、奇偶性等;(3)图像法,一般是把函数拆分为两个简单函数,依据两函数图像的交点个数得出函数的零点个数.

变式题 (1)设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x+1,x\geqslant0,\\|x^2+2x|,x<0,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=f(x)-3x-1$ 的零点个数为　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2,x<0,\\x^2+\dfrac{1}{2},x\geqslant0,\end{cases}$ 则函数 $y=f[f(x)]-1$ 的零点个数为　(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

探究点三　函数零点的应用

例3 (1)[2019·怀化一模] 已知函数 $f(x)=|\ln x|-a^x(x>0,0<a<1)$ 的两个零点为 x_1,x_2,则　(　　)

A. $0<x_1x_2<1$　　B. $x_1x_2=1$

C. $1<x_1x_2<e$　　D. $x_1x_2>e$

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+m,x\leqslant-1,\\\log_2(x+1),x>-1,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)+1$ 有三个零点,则实数 m 的取值范围是　(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(2,3]$

C. $[2,3)$　　D. $(1,3)$

[总结反思] 函数零点的应用主要体现在三类问题中:一是函数中不含参数,零点又不易直接求出,考查各零点的和或范围问题;二是函数中含有参数,根据零点情况求函数中参数的范围;三是函数中有参数,但不求参数,仍是考查零点的范围问题.这三类问题一般是通过数形结合或分离参数求解.

变式题 (1)(多选题)已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的图像的对称轴为直线 $x=-3$,且当 $x\geqslant-3$ 时,$f(x)=2^x-3$.若函数 $f(x)$ 在区间 $(k-1,k)(k\in\mathbf{Z})$ 上有零点,则 k 的值可能为　(　　)

A. 2　　B. -2

C. -7　　D. -8

(2)[2019·吉林普通中学调研] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+3,x>a,\\x^2+6x+3,x\leqslant a,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-2x$ 恰有 2 个不同的零点,则实数 a 的取值范围为________.

请完成课时作业(十二)

增分微课(一)
多维度探究数形结合思想在函数中的应用

类型一　绝对值函数

涉及绝对值函数的问题常见的有两种情况:一是含绝对值的函数图像的画法;二是含绝对值的函数的零点及相关方程的实数根个数问题.两类问题都需要通过数形结合、分类讨论等思想进行处理.

例1 (1)关于函数 $f(x)=|\ln|2-x||$,下列结论错误的是　(　　)

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称

C. 若 $x_1\neq x_2$,但 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1+x_2=4$

D. 函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点

(2)[2019·天津红桥区一模] 已知函数 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$,$g(x)=kx-2$,若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数根,则实数 k 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,4)$　　D. $(0,1)\cup(1,4)$

[总结反思] 含绝对值的函数问题最根本的方法就是找到绝对值的零点,然后消去绝对值,转化为分段函数,分段画出函数的图像.熟练掌握数形结合的思想、分类讨论思想及把问题等价转化是解题的关键.

变式题 (1)关于函数 $f(x)=|x^2-1|$,给出下列结论:

①$f(x)$ 是偶函数;

②若函数 $y=f(x)-m$ 有四个零点,则实数 m 的取值范围是 $(0,1)$;

③$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递增;

④若 $f(a)=f(b)(0<a<b)$,则 $0<ab<1$.

其中正确的是　(　　)

A. ①②　　B. ③④

C. ①③④　　D. ①②④

(2)[2019·天津十二重点中学联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x,-3\leqslant x\leqslant0,\\2x-3,x>0,\end{cases}$ 若方程 $f(x)+|x-2|-kx=0$ 有且只有三个不相等的实数解,则实数 k 的取值范围是(　　)

A. $\left[-\dfrac{2}{3},3-2\sqrt{2}\right)$　　B. $\left[-\dfrac{2}{3},3+2\sqrt{2}\right)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right]$　　D. $\left[-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{6}\right]$

类型二 函数的迭代问题

迭代是重复反馈过程的活动，其目的通常是为了逼近所需目标或结果. 每一次对过程的重复称为一次“迭代”，而每一次迭代得到的结果会作为下一次迭代的初始值. 我们常见的函数迭代问题有两种形式：一是二阶迭代函数 $y=f[f(x)]$；二是 $f(x+a)=kf(x)$形式.

例2 (1)[2019·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$时，$f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geqslant-\frac{8}{9}$，则 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$

(2)若函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$则函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点的个数为________.

[总结反思] (1)对于二阶迭代函数 $y=f[f(x)]$问题，通常是用换元法，设 $t=f(x)$，这样就转化为两个一阶函数 $y=f(t)$与 $t=f(x)$的有关问题，结合图像进行具体分析；(2)形如 $f(x+a)=kf(x)$的迭代问题，一般是结合定义区间，分段写出相应函数的解析式，结合图像及相应运算进行求解.

变式题 (1)[2019·宜昌1月调研] 已知函数 $f(x)=x^2+(a-1)x-a$，若函数 $g(x)=f[f(x)]$有且仅有两个零点，则实数 a 的取值集合为________.

(2)[2019·金丽衢十二校联考] 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$满足当 $x>0$ 时，有 $f(x+4)=\frac{1}{3}f(x)$，且当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$f(x)=3|x-3|$，若方程 $f(x)-mx=0$ 恰有三个实根，则 m 的取值范围是________________.

类型三 复合二次函数 $y=a[f(x)]^2+bf(x)+c$

复合二次函数 $y=a[f(x)]^2+bf(x)+c$ 问题大多以函数的图像为背景，涉及方程根的个数、函数零点的个数、参数的取值范围等问题，突出数形结合思想、函数与方程思想. 考查运算求解、逻辑思维、分析与解决问题的能力. 解决这类问题的基本思想为由外到里，以二次函数的基本理论为基础，把里层函数 $f(x)$看成整体，通过研究二次函数的性质转化为函数 $f(x)$的性质，再对 $f(x)$进行研究.

例3 (1)[2019·石家庄质检] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x<0,\\ 4x^3-6x^2+1,x\geqslant 0,\end{cases}$其中 e 为自然对数的底数，则函数 $g(x)=3[f(x)]^2-10f(x)+3$ 的零点个数为 ( )

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 3

(2)[2019·上饶重点中学联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\geqslant 0,\\ \log_2(-x),x<0,\end{cases}$若关于 x 的方程$[f(x)]^2+2f(x)+m=0$有三个不同的实根，则 m 的取值范围为________.

[总结反思] 对于方程 $a[f(x)]^2+bf(x)+c=0$ 解的个数(或函数 $y=a[f(x)]^2+bf(x)+c$ 零点个数)问题，一般采用换元法，设 $t=f(x)$，根据 t 的取值或范围，再利用函数 $f(x)$的值域或最值，结合函数的单调性、草图确定. 注意数形结合思想、分类讨论思想的应用.

变式题 (1)若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有极值点 x_1，x_2，且 $f(x_1)=x_1$，则关于 x 的方程 $3[f(x)]^2+2af(x)+b=0$的不同实根个数是 ( )

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 6

(2)已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x^2-1|,x\geqslant 0,\\ x+1,x<0,\end{cases}$若方程$[f(x)]^2+af(x)+1=0$ 有四个不等的实根，则实数 a 的取值范围是________.

⊙ 题组训练 ⊙

1. [2020·攀枝花一模] 关于函数 $f(x)=\cos|x|+|\sin x|$的下述四个结论中，正确的是 ( )

A. $f(x)$是奇函数

B. $f(x)$是最大值为 2

C. $f(x)$在$[-\pi,\pi]$有 3 个零点

D. $f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单调递增

2. [2019·上饶重点中学联考] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}+1,x\in[-2,0],\\ 2f(x-2),x\in(0,+\infty),\end{cases}$若函数 $g(x)=f(x)-x-2m+1$在区间$[-2,4]$内有 3 个零点，则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $\left\{m\middle|-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{m\middle|-1<m\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{m\middle|-1<m<\frac{1}{2}\text{或}m=1\right\}$

D. $\left\{m\middle|-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}\text{或}m=1\right\}$

3. [2019·龙岩质检] 已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x},x\geqslant 1,\\ -(x-1)^3,x<1,\end{cases}$若关于 x 的方程$[f(x)]^2+mf(x)-1-m=0$ 恰好有 4 个不相等的实数解，则实数 m 的取值范围为 ( )

A. $\left(-1,\frac{1}{e}-1\right)$　　B. $\left(-1-\frac{1}{e},-1\right)$

C. $\left(1,\frac{1}{e}+1\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$

4. 已知函数 $f(x)$ 满足：①定义域为 $\mathbf{R}$；②对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+2)=2f(x)$；③当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$. 若函数 $g(x)=\begin{cases}e^x(x\leqslant 0),\\ \ln x(x>0),\end{cases}$ 则函数 $y=f(x)-g(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上零点的个数是　　(　　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{2x},x>0,\\ -x^2-2x-3,x\leqslant 0,\end{cases}$ 当 $a<0$ 时，方程 $[f(x)]^2-2f(x)+a=0$ 有 4 个不相等的实根，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $-15\leqslant a<-8$

B. $-15\leqslant a\leqslant e-\dfrac{e^2}{4}$

C. $-15<a<-8$

D. $-15\leqslant a\leqslant\dfrac{e^2}{4}-e$

6. [2019·江南十校质检] 已知函数 $f(x)=a\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}-1\right)-x^2+2bx(a,b\in\mathbf{R})$，若函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f[f(x)]$ 的零点相同，则 $a-b$ 的取值范围为　　(　　)

A. $[0,2)$

B. $(-2,0]$

C. $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

D. $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

7. [2019·湖南师大附中月考] 已知函数 $f(x)=|x^2-4|+x^2+mx$，若函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是________.

8. [2019·天津河西区质检] 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}kx+k,x\leqslant 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$ 其中 $k\geqslant 0$，若函数 $y=f[f(x)]+1$ 有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是________.

第 13 讲　函数模型及其应用

内容要求 1. 理解函数模型是描述客观世界中变量关系和规律的重要数学语言和工具. 在实际情境中，会选择合适的函数类型刻画现实问题的变化规律.

2. 结合现实情境中的具体问题，利用计算工具，比较对数函数、一元一次函数、指数函数增长速度的差异，理解“对数增长”“直线上升”“指数爆炸”等术语的现实含义.

3. 收集、阅读一些现实生活、生产实际或者经济领域中的数学模型，体会人们是如何借助函数刻画实际问题的，感悟数学模型中参数的现实意义.

课前双基巩固

/ 纵横梳知识　多向固基础 /

⊙ 知识聚焦 ⊙

1. 三种函数模型的性质的比较

性质 \ 函数	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在 $(0,+\infty)$ 上的增减性	单调________	单调________	单调________
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳

2. 常见的函数模型

函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b(a,b$ 为常数，$a\neq 0)$
二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c$ 为常数，$a\neq 0)$
反比例函数模型	$f(x)=\dfrac{k}{x}+b(k,b$ 为常数且 $k\neq 0)$
指数函数模型	$f(x)=ba^x+c(a,b,c$ 为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1,b\neq 0)$
对数函数模型	$f(x)=b\log_a x+c(a,b,c$ 为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1,b\neq 0)$
幂函数模型	$f(x)=ax^\alpha+b(a,b,\alpha$ 为常数，$a\neq 0,\alpha\neq 0)$

常用结论

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}(a>0,b>0,x>0)$ 在区间 $(0,\sqrt{ab}]$ 上单调递减，在区间 $[\sqrt{ab},+\infty)$ 上单调递增.

2. 直线上升、对数缓慢、指数爆炸.

⊙ 对点演练 ⊙

题组一　常识题

1. [教材改编] 函数模型 $y_1=0.25x$，$y_2=\log_2 x+1$，$y_3=1.002^x$，随着 x 的增大，增长速度的大小关系是________.(填关于 y_1,y_2,y_3 的关系式)

2. [教材改编] 在如图 2-13-1 所示的锐角三角形空地中，欲建一个面积不小于 300 m^2 的内接矩形花园(阴影部分)，则其边长 x(单位：m)的取值范围是________.

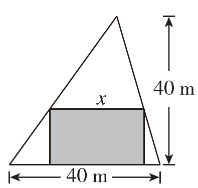


图 2-13-1

3. [教材改编] 某车间分批生产某种产品,每批的生产准备费用为 800 元.若每批生产 x 件,则平均仓储时间为$\frac{x}{8}$天,且每件产品每天的仓储费用为 1 元.把平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和 S 表示为 x 的函数是________.

4. [教材改编] 已知某物体的温度 Q(单位:℃)随时间 t(单位:min)的变化规律为 $Q=m\cdot 2^t+2^{1-t}(t\geqslant 0$,且 $m>0)$.若物体的温度总不低于 2 ℃,则 m 的取值范围是________.

题组二 常错题

◆索引:审题不清致错;忽视限制条件;忽视实际问题中实际量的单位、含义、范围等;分段函数模型的分界把握不到位.

5. 一枚炮弹被发射后,其升空高度 h 与时间 t 的函数关系式为$h=130t-5t^2$,则该函数的定义域是________.

6. 某物体一天中的温度 T 是关于时间 t 的函数,且 $T=t^3-3t+60$,时间单位是小时,温度单位是℃,当 $t=0$ 时表示中午 12:00,其后 t 值为正,则上午 8 时该物体的温度是________.

7. 在不考虑空气阻力的情况下,火箭的最大速度 v(米/秒)关于燃料的质量 M(千克)、火箭(除燃料外)的质量 m(千克)的函数关系式是 $v=2000\cdot\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$.当燃料质量是火箭质量的________倍时,火箭的最大速度可达 12 千米/秒.

8. 已知 A,B 两地相距 150 km,某人开汽车以 60 km/h 的速度从 A 地到达 B 地,在 B 地停留 1 h 后再以 50 km/h 的速度返回 A 地,则汽车离开 A 地的距离 s(km)关于时间 t(h)的函数表达式是________.

课堂考点探究

/ 典例导解法 总结归类型 /

探究点一 用函数图像刻画变化过程

例1 水池有两个相同的进水口和一个出水口,每个口进出水的速度如图 2-13-2(甲)、(乙)所示,某天 0 点到 6 点该水池的蓄水量如图(丙)所示(至少打开一个水口),给出以下 3 个论断:

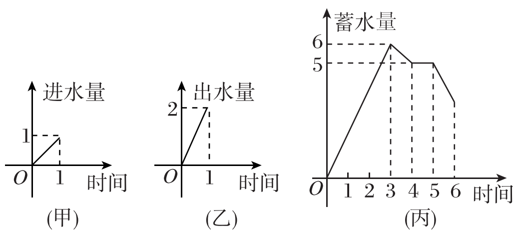


图 2-13-2

①0 点到 3 点只进水不出水;②3 点到 4 点不进水只出水;③4 点到 5 点不进水也不出水.

则一定正确的论断是 ( )

A. ① B. ①② C. ①③ D. ①②③

[总结反思] 判断函数图像与实际问题变化过程是否相吻合时,首先要关注横轴与纵轴所表达的变量的实际意义;其次根据实际问题中两变量的变化快慢等特点,结合图像变换趋势,验证是否吻合,从中排除不符合实际的情况,选出符合实际的答案.

变式题 有一商家从石塘沿水路顺水航行,前往河口,途中因故障停留一段时间,到达河口后逆水航行返回石塘,假设货船在静水中的速度不变,水流速度不变,若该船从石塘出发后所用的时间为 x(小时),货船距石塘的距离为 y(千米),则下列各图中,能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图像是 ( )

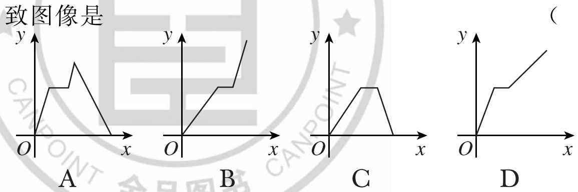


图 2-13-3

探究点二 一次、二次函数模型

例2 某市的绿色富硒产品和特色农产品在国际市场上颇具竞争力,其中香菇远销日本和韩国等地.香菇上市时,外商李经理按市场价格 10 元/千克在本市收购了 2000 千克香菇存放入冷库中.据预测,香菇的市场价格每天每千克将上涨 0.5 元,但冷库存放这批香菇时每天需要支出各种费用合计 340 元,而且香菇在冷库中最多保存 110 天,同时,平均每天有 6 千克的香菇损坏不能出售.

(1)若存放 x 天后,将这批香菇一次性出售,设这批香菇的销售总金额为 y 元,试写出 y 与 x 之间的函数关系式.

(2)李经理如果想获得利润 22 500 元,需将这批香菇存放多少天后出售?(提示:利润=销售总金额-收购成本-各种费用)

(3)李经理将这批香菇存放多少天后出售可获得最大利润?最大利润是多少?

[总结反思] 在建立二次函数模型解决实际问题中的最优问题时,一定要注意自变量的取值范围,即函数的定义域,解决函数应用问题时,最后还要还原到实际问题中.

变式题 为了保护环境和提高果树产量,某果农计划从甲、乙两个仓库用汽车向 A,B 两个果园运送有机化肥,甲、乙两个仓库分别可运出 80 吨和 100 吨有机化肥;A,B 两个果园分别需用 110 吨和 70 吨有机化肥.两个仓库到 A,B

两个果园的路程如下表所示：

	路程（千米）	
	甲仓库	乙仓库
A 果园	15	25
B 果园	20	20

设甲仓库运往 A 果园 x 吨有机化肥，若汽车每吨每千米的运费为 2 元.

(1)根据题意，填写下表.

	运量（吨）		运费（元）	
	甲仓库	乙仓库	甲仓库	乙仓库
A 果园	x	$110-x$	$2\times15x$	$2\times25(110-x)$
B 果园	______	______	______	______

(2)设总运费为 y 元，求 y 关于 x 的函数表达式，并求当甲仓库运往 A 果园多少吨有机化肥时，总运费最少？最少的总运费是多少元？

探究点三　指数、对数函数模型

例 3　候鸟每年都要随季节的变化而进行大规模地迁徙，研究某种鸟类的专家发现，该种鸟类的飞行速度 v(单位：m/s)与其耗氧量 M 之间的关系为 $v=a+b\log_3\frac{M-15}{10}$(其中 a,b 是常数)，据统计，该种鸟类在静止时其耗氧量为 45 个单位，而其耗氧量为 105 个单位时，其飞行速度为 1 m/s.

(1)求出 a,b 的值；

(2)若这种鸟类为赶路程，飞行的速度不能低于 2 m/s，则其耗氧量至少要多少个单位？

[总结反思] 与指数函数、对数函数两类函数模型有关的实际问题，在求解时，要先学会合理选择模型.(1)在两类函数模型中，指数函数模型是增长速度越来越快(底数大于 1)的一类函数模型，对数函数模型是增长速度越来越慢(底数大于 1)的一类函数模型.(2)在解决这两类函数模型时，一般先要通过待定系数法确定函数解析式，再借助函数的图像求解最值问题.

变式题 [2019·北京人大附中三模] 某种物质在时刻 t(min)的浓度 M(mg/L)与 t 的函数关系为 $M(t)=ar^t+24$(a,r 为常数).在 $t=0$ min 和 $t=1$ min 时测得该物质的浓度分别为 124 mg/L 和 64 mg/L，则在 $t=4$ min 时，该物质的浓度为________mg/L；若该物质的浓度小于 24.001 mg/L，则最小的整数 t 的值为________.(参考数据：$\lg 2\approx0.301$)

探究点四　分段函数模型

例 4 [2019·辽阳期末] 某地居民用水采用阶梯水价，其标准为：每户每月用水量不超过 15 吨的部分，每吨 3 元；超过 15 吨但不超过 25 吨的部分，每吨 4.5 元；超过 25 吨的部分，每吨 6 元.

(1)求每户居民每月需交水费 y(元)关于用水量 x(吨)的函数关系式；

(2)若 A 户居民某月交水费 67.5 元，求 A 户居民该月的用水量.

[总结反思] (1)某些实际问题中的变量关系不能用同一个关系式给出，而是由几个不同的关系式构成，所以应建立分段函数模型；(2)构建分段函数时，要力求准确、简捷、合理、不重不漏；(3)分段函数的最值是各段最大值(或最小值)中的最大值(或最小值).

变式题 [2019·佛山一中期末] 某企业生产的某种产品生产总成本 $f(x)$(元)与产量 x(吨)$(0\leqslant x\leqslant80)$的函数关系为 $f(x)=\begin{cases}x^3-50x^2+ax,0\leqslant x\leqslant30,\\x^2+250x+3600,30<x\leqslant80,\end{cases}$ 且函数 $f(x)$ 是$[0,80]$上的连续函数.

(1)求 a 的值；

(2)当产量为多少吨时，平均生产成本最低？

请完成课时作业（十三）