KEYS 参考答案 | 增分加练

小题必刷卷（一）

题组一　刷真题

1. C　2. C　3. B　4. C　5. D　6. D　7. C
8. A　9. B　10. B　11. C　12. C
13. $\left(-1,\dfrac{2}{3}\right)$
14. $4\sqrt{3}$　15. $\sqrt{2}$

题组二　刷模拟

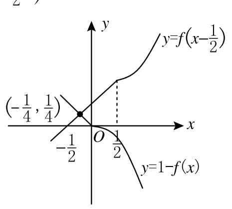
16. B　17. C　18. C　19. AD　20. ABD
21. D　22. D　23. B　24. C
25. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$　$\left\{x\middle|\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$
26. $2+\sqrt{3}$
27. $-3\leqslant a\leqslant 1$
28. ①②④

小题必刷卷（二）

题组一　刷真题

1. C　2. C
3. C　[解析] 由题中选项可知 $a\geqslant 0$. 当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，若 $x\leqslant 1$，则 $f(x)=(x-a)^2+2a-a^2$，可知 $f(x)_{\min}=f(a)=2a-a^2$，因为 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $\begin{cases}f(x)_{\min}=2a-a^2\geqslant 0,\\0\leqslant a\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant 1$；若 $x>1$，则 $f(x)=x-a\ln x$，$f'(x)=1-\dfrac{a}{x}$，因为 $0\leqslant a\leqslant 1$，$x>1$，所以 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}>0$，所以 $f(x)=x-a\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>1-a\ln 1=1>0$. 所以当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立. 当 $a>1$ 时，若 $x\leqslant 1$，则 $f(x)=(x-a)^2+2a-a^2$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1>0$. 若 $x>1$，则 $f(x)=x-a\ln x$，$f'(x)=1-\dfrac{a}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$. 当 $x\in(1,a)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上单调递减；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. 所以当 $x>1$ 时，$f(x)_{\min}=f(a)=a-a\ln a$，若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $f(x)_{\min}=a-a\ln a\geqslant 0$，即 $\ln a\leqslant 1$，解得 $1<a\leqslant \mathrm{e}$. 综上可知，若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 $0\leqslant a\leqslant \mathrm{e}$. 故选 C.
4. $(-\infty,8]$　[解析] 当 $x<1$ 时，由 $\mathrm{e}^{x-1}\leqslant 2$，得 $x<1$；当 $x\geqslant 1$ 时，由 $x^{\frac{1}{3}}\leqslant 2$，解得 $1\leqslant x\leqslant 8$. 综合可知 x 的取值范围为 $x\leqslant 8$.
5. $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$　[解析] $\because f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant 0,\\2^x,x>0,\end{cases}$

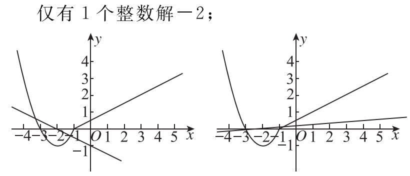
$\therefore f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2},x\leqslant\dfrac{1}{2},\\2^{x-\frac{1}{2}},x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$，即 $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1-f(x)$. 画出 $y=f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $y=1-f(x)$ 的图像如图所示.



由图可知，满足 $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1-f(x)$ 的解集为 $\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.
6. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　[解析] 由 $f(x+4)=f(x)(x\in\mathbf{R})$，得 $f(15)=f(-1+4\times 4)=f(-1)$，又 $-1\in(-2,0]$，所以 $f(15)=f(-1)=\left|-1+\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$. 而 $\dfrac{1}{2}\in(0,2]$，所以 $f(f(15))=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
7. D　[解析] $y=10^{\lg x}=x$，定义域与值域均为 $(0,+\infty)$，只有选项 D 满足题意.
8. C　[解析] 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$，$f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln(-x^2+2x)=\ln[-(x-1)^2+1]$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，故选项 A，B 错. 由于函数 $y=-(x-1)^2+1$，$x\in(0,2)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称. 故选 C.
9. C　[解析] 因为 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$①，且 $f(0)=0$. 而 $f(1-x)=f(1+x)$，所以 $f(-x)=f(2+x)$②，由①②可得 $f(x+2)=-f(x)$，则有 $f(x+4)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的周期为 4. 由 $f(1)=2$，得 $f(-1)=-2$，于是有 $f(2)=f(0)=0$，$f(3)=f(-1)=-2$，$f(4)=f(0)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(49)+f(50)=12\times 0+f(1)+f(2)=2+0=2$.
10. -3　[解析] 因为 $\ln 2>0$，函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(\ln 2)=-f(-\ln 2)=-[-\mathrm{e}^{a(-\ln 2)}]=\mathrm{e}^{-a\ln 2}=8$，所以 $-a\ln 2=\ln 8$，即 $a=-\dfrac{\ln 8}{\ln 2}=-3$.
11. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$　[解析] 由 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，得 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 又 $f(2^{|a-1|})>f(-\sqrt{2})$，$f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})$，$\therefore 2^{|a-1|}<\sqrt{2}$，即 $|a-1|<\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$.
12. $(-1,3)$　[解析] 根据偶函数的性质，易知 $f(x)>0$ 的解集为 $(-2,2)$，若 $f(x-1)>0$，则 $-2<x-1<2$，解得 $-1<x<3$.
13. 3　[解析] 因为函数图像关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(3)=f(1)$，又函数为偶函数，所以 $f(-1)=f(1)$，故 $f(-1)=3$.
14. $[-1,7]$　[解析] 由题意可得 $7+6x-x^2\geqslant 0$，即 $x^2-6x-7\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 7$，故该函数的定义域是 $[-1,7]$.
15. 6　[解析] 由 $f(x+4)=f(x-2)$ 可知周期 $T=6$，所以 $f(919)=f(153\times 6+1)=f(1)$，又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(1)=f(-1)=6^{-(-1)}=6$.
16. -2　[解析] 因为 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，所以 $f(x)=f(x+2)$.
因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(1)=f(-1)$，$f(1)=-f(-1)$，即 $f(1)=0$. 又 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}=2$，
所以 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-2$，从而 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)+f(1)=-2$.

题组二　刷模拟

17. B　18. D　19. ABC　20. C　21. B
22. B　[解析] 函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2b,b+1)$ 上的偶函数，$\therefore -2b+b+1=0$，得 $b=1$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$. $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-2,0]$ 上单调递增，$\therefore$ 该函数在区间 $(0,2)$ 上单调递减. 由 $f(x-1)\leqslant f(2x)$，可得 $f(|x-1|)\leqslant f(|2x|)$，则 $\begin{cases}|x-1|\geqslant|2x|,\\-2<x-1<2,\\-2<2x<2,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant\dfrac{1}{3}$. 因此，不等式 $f(x-1)\leqslant f(2x)$ 的解集为 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right]$，故选 B.
23. C　[解析] $\because f(2-x)=f(x)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称. 又 $f(x+2)=f(x-2)$，$\therefore f(x+4)=f(x)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为 4，$\therefore f(2018)=f(2)$，$f(2019)=f(3)$，$f(2020)=f(0)=f(2)$，又当任意的 $x_1,x_2\in[1,3](x_1\neq x_2)$ 时，$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上为减函数，故 $f(2020)=f(2018)>f(2019)$，故选 C.
24. BC　[解析] 函数 $f(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$，故 A 错误；$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 x 为有理数时，$-x$ 是有理数，则 $f(-x)=f(x)=1$，当 x 为无理数时，$-x$ 是无理数，则 $f(-x)=f(x)=0$，即 $f(x)$ 为偶函数，故 B 正确；对于任意的有理数 T，当 x 为有理数时，$x+T$ 也是有理数，则 $f(x+T)=f(x)=1$，当 x 为无理数时，$x+T$ 也是无理数，则 $f(x+T)=f(x)=0$，即函数 $f(x)$ 是以任意非 0 有理数为周期的周期函数，故 C 正确；$f(-1)=1$，$f(\sqrt{2})=0$，$f(1)=1$，显然 $f(x)$ 不是单调函数，故 D 错误. 故选 BC.
25. C　[解析] 当 $m=0$ 时，显然不等式 $f(x)<0$ 仅有 1 个整数解 -2；



①　　②

当 $m<0$ 时，如图①所示，不等式 $f(x)<m(x+2)$ 的整数解为 -3 和 -2，所以 $\begin{cases}9-12+3<m(-3+2),\\16-16+3\geqslant m(-4+2),\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{3}{2}\leqslant m<0$；当 $m>0$ 时，如图②所示，不等式 $f(x)<m(x+2)$ 的整数解为 -2 和 -1，所以 $\begin{cases}1-4+3<m(-1+2),\\\dfrac{1}{2}\geqslant 2m,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant\dfrac{1}{4}$. 综上所述，实数 m 的取值范围为 $\left[-\dfrac{3}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$，故选 C.
26. 1

27. 3 [解析] 因为函数$f(x)$的图像关于点$(2,0)$对称,所以$f(1)=-f(3)=-3$,又因为函数$f(x)$为奇函数,所以$f(-1)=-f(1)=3$.

28. $[1,+\infty)$

29. $(4,+\infty)$ 2 [解析] 由题易知,当$0<x<2$时,$f(x)>0$;当$x\geqslant 2$时,令$-2x+8<0$,解得$x>4$,∴实数m的取值范围是$(4,+\infty)$.当$x\geqslant 2$时,$f(x)=-2x+8$是减函数,若$a\geqslant 2$,则$f(a)\neq f(a+2)$,∴$0<a<2$,由$f(a)=f(a+2)$得$a^2+a=-2(a+2)+8$,解得$a=1$或$a=-4$(舍去),则$f\left(\frac{1}{a}\right)=f(1)=1^2+1=2$.

30. 1 [解析] ∵函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\leqslant 0,\\-3x,x>0,\end{cases}$ $f[f(x)]=10$,∴可令$f(x)=t$,则$f(t)=10$.当$t\leqslant 0$时,$f(t)=t^2+1=10$,解得$t=-3$或$t=3$(舍去);当$t>0$时,$f(t)=-3t=10$,解得$t=-\frac{10}{3}$,舍去.∴$t=-3$,即$f(x)=-3$,又$x^2+1\geqslant 1$,∴$-3x=-3$,解得$x=1$,满足$x>0$.故$x=1$.

31. $a\geqslant 2$ [解析] 当$x>1$时,$f(x)=x+\frac{4}{x}+a\geqslant 4+a$,当且仅当$x=2$时,等号成立.又当$x\leqslant 1$时,$f(x)=x^2-2ax+9$为二次函数,∴若$f(x)$在$x=1$处取得最小值,则$a\geqslant 1$且$f(1)\leqslant 4+a$,即$a\geqslant 1$且$1-2a+9\leqslant a+4$,解得$a\geqslant 2$.

32. 2 [解析] 因为$f(x)$为定义在$\boldsymbol{R}$上的奇函数,所以$f(0)=0$.因为$f(x)+f(x+2)=0$,所以$f(x+2)=-f(x)$,所以$f(x+4)=f(x)$,所以函数$f(x)$是周期为4的周期函数,所以$f(2019)+f(2018)=f(4\times 504+3)+f(4\times 504+2)=f(3)+f(2)$.又$f(2)=-f(0)=0$,$f(3)=-f(1)=2$,所以$f(2019)+f(2018)=f(3)+f(2)=2+0=2$.

小题必刷卷(三)

题组一 刷真题

1. -2 2. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

3. B 4. D 5. B

6. A [解析] 因为$a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$,$b=\log_{0.5}0.2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}=\log_2 5>1$,$c=0.5^{0.2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}>\frac{1}{2}$,且$c=0.5^{0.2}<0.5^0=1$,所以$b>c>a$.

7. B [解析] 由题意,得$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$.因此函数$f(x)$的图像的对称轴为直线$x=-\frac{a}{2}$.当$-\frac{a}{2}\leqslant 0$,即$a\geqslant 0$时,函数$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递增,所以函数$f(x)$的最大值$M=f(1)=1+a+b$,最小值$m=f(0)=b$,所以$M-m=1+a$;当$-\frac{a}{2}\geqslant 1$,即$a\leqslant -2$时,函数$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递减,所以函数$f(x)$的最大值$M=f(0)=b$,最小值$m=f(1)=1+a+b$,所以$M-m=-1-a$;当$0<-\frac{a}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,即$-1\leqslant a<0$时,函数$f(x)$在$[0,1]$上的最小值$m=f\left(-\frac{a}{2}\right)=b-\frac{a^2}{4}$,最大值$M=f(1)=1+a+b$,所以$M-m=1+a+\frac{a^2}{4}$;当$\frac{1}{2}<-\frac{a}{2}<1$,即$-2<a<-1$时,函数$f(x)$在$[0,1]$上的最小值$m=f\left(-\frac{a}{2}\right)=b-\frac{a^2}{4}$,最大值$M=f(0)=b$,所以$M-m=\frac{a^2}{4}$.结合各选项,可得B正确,A,C,D错误.因此选B.

8. 1 [解析] 由$f(-x)=f(x)$得$-x\ln(-x+\sqrt{a+x^2})=x\ln(x+\sqrt{a+x^2})$,即$x[\ln(x+\sqrt{a+x^2})+\ln(-x+\sqrt{a+x^2})]=x\ln a=0$对定义域内的任意$x$恒成立,因为$x$不恒为0,所以$\ln a=0$,所以$a=1$.

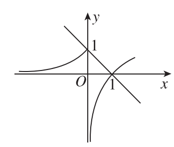
9. D [解析] 两函数的底数分别为$\frac{1}{a}$,a,显然两函数的单调性不一致,所以排除B.对数函数$y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$的图像过定点$\left(\frac{1}{2},0\right)$,排除A,C,所以选D.

10. D [解析] 因为$x\in[-\pi,\pi]$,所以由$f(-x)=\frac{\sin(-x)+(-x)}{\cos(-x)+(-x)^2}=-\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}=-f(x)$,可知函数$f(x)$为奇函数,所以选项A错误.又由当$x=\pi$时,$f(\pi)=\frac{\sin\pi+\pi}{\cos\pi+\pi^2}=\frac{\pi}{\pi^2-1}$,可知$0<f(\pi)<1$,所以只有D符合.

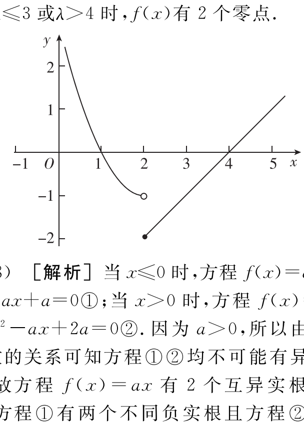
11. B [解析] 令$y=f(x)=\frac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$,易知$f(-x)=-f(x)$,所以$f(x)$为奇函数,排除选项C;$f(4)=\frac{2\times 4^3}{2^4+2^{-4}}=\frac{128}{16+\frac{1}{16}}>0$,排除选项D;$f(6)=\frac{2\times 6^3}{2^6+2^{-6}}=\frac{432}{64+\frac{1}{64}}\approx 6.75$,排除选项A.故选B.

12. B [解析] 应用排除法.当$m=\sqrt{2}$时,画出$y=(\sqrt{2}x-1)^2$与$y=\sqrt{x}+\sqrt{2}$的图像,由图可知,两函数的图像在$[0,1]$上无交点,排除C,D;当$m=3$时,画出$y=(3x-1)^2$与$y=\sqrt{x}+3$的图像,由图可知,两函数的图像在$[0,1]$上恰有一个交点.故选B.

13. C [解析] 函数$g(x)=f(x)+x+a$有2个零点,即方程$f(x)=-x-a$有2个不同的解,即函数$f(x)$的图像与直线$y=-x-a$有2个不同的交点.分别作出函数$f(x)$的图像与直线$y=-x-a$,由图可知,当$-a\leqslant 1$,即$a\geqslant -1$时,函数$f(x)$的图像与直线$y=-x-a$有2个不同的交点,即函数$g(x)$有2个零点.

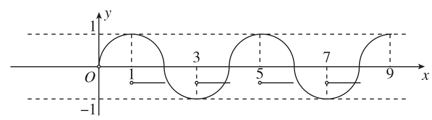


14. $(1,4)$ $(1,3]\cup(4,+\infty)$ [解析] 当$\lambda=2$时,函数$f(x)$的图像如图所示,$f(x)<0$的解集为$(1,4)$.当$\lambda\leqslant 1$时,$f(x)$只有1个零点为4;当$1<\lambda\leqslant 3$时,$f(x)$有2个零点为1和4;当$3<\lambda\leqslant 4$时,$f(x)$有3个零点为1,3和4;当$\lambda>4$时,$f(x)$有2个零点为1和3.故当$1<\lambda\leqslant 3$或$\lambda>4$时,$f(x)$有2个零点.



15. $(4,8)$ [解析] 当$x\leqslant 0$时,方程$f(x)=ax$,即$x^2+ax+a=0$①;当$x>0$时,方程$f(x)=ax$,即$x^2-ax+2a=0$②.因为$a>0$,所以由根与系数的关系可知方程①②均不可能有异号实根,故方程$f(x)=ax$有2个互异实根只能是:方程①有两个不同负实根且方程②无正实根;方程①无负实根且方程②有两个不同正实根.方程①有两个负实根,只要$\Delta=a^2-4a\geqslant 0$,即$a\geqslant 4$即可,方程②有两个正实根,只要$\Delta=a^2-8a\geqslant 0$,即$a\geqslant 8$即可.所以方程①有两个不同负实根且方程②无正实根,只需$a>4$且$a<8$,即$4<a<8$;方程①无负实根且方程②有两个不同正实根,只需$a<4$且$a>8$,此时无解.综上可知,实数a的取值范围是$(4,8)$.

16. $\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ [解析] 当$x\in(0,2]$时,$y=f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$等价于$(x-1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$.结合$f(x)$是周期为4的奇函数,可作出$f(x)$在$(0,9]$上的图像,如图所示.



因为当$x\in(1,2]$时,$g(x)=-\frac{1}{2}$,且$g(x)$的周期为2,由图可知,当$x\in(1,2]\cup(3,4]\cup(5,6]\cup(7,8]$时,$f(x)$与$g(x)$的图像有2个交点.由题知,$f(x)$与$g(x)$的图像在区间$(0,9]$上有8个交点,所以当$x\in(0,1]\cup(2,3]\cup(4,5]\cup(6,7]\cup(8,9]$时,$f(x)$与$g(x)$的图像有6个交点.又当$x\in(0,1]$时,$y=g(x)=k(x+2)$表示的直线恒过定点$(-2,0)$,且斜率$k>0$.结合$g(x)$的周期为2及$f(x)$的图像可知,

当$x\in(2,3]\cup(6,7]$时,$f(x)$与$g(x)$的图像无交点,所以当$x\in(0,1]\cup(4,5]\cup(8,9]$时,$f(x)$与$g(x)$的图像有6个交点.由$f(x)$与$g(x)$的周期性可知,当$x\in(0,1]$时,$f(x)$与$g(x)$的图像有2个交点.当线段$y=k_1(x+2)(0<x\leqslant 1)$与圆弧$(x-1)^2+y^2=1(0<x\leqslant 1,y\geqslant 0)$相切时,圆心到线段的距离$d=\frac{|3k_1|}{\sqrt{k_1^2+1}}=1$,解得$k_1^2=\frac{1}{8}$,又$k_1>0$,所以$k_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$(此时恰有1个交点);当线段$y=k_2(x+2)(0<x\leqslant 1)$过点$(1,1)$时,$k_2=\frac{1}{3}$(此时恰有2个交点).结合图像分析可知,$k$的取值范围是$\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

题组二 刷模拟

17. CD 18. B 19. D

20. D [解析] 由已知得$8=2^n$,解得$n=3$,所以$f(x)=x^3$,因为$\frac{\sqrt{3}}{3}<1$,$\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,$\ln\pi>\ln e=1$,又$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{6}<0$,所以$\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\ln\pi$.由$f(x)=x^3$在$\mathbf{R}$上单调递增,可得$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f(\ln\pi)$,即$a<c<b$.

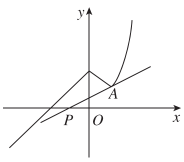
21. C [解析] 由$a=\log_3 e<1$,$b=\log_3\frac{5}{2}<\log_3 e=a$,$c=\ln 3>1$,则$c>a>b$.故选C.

22. A [解析] 由$f(x)=\frac{\ln|x|}{e^x}$,得$f(1)=0$,$f(-1)=0$,又$f(e)=\frac{1}{e^e}$,∴$0<f(e)<1$,$f(-e)=\frac{1}{e^{-e}}=e^e>1$,结合选项中图像,可知A选项正确.

23. A [解析] 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,又$f(-x)=\frac{10[(-x)^2+1]}{-x\cdot e^{|-x|}}=-\frac{10(x^2+1)}{x\cdot e^{|x|}}=-f(x)$,故函数$f(x)$为奇函数,则函数$f(x)$的图像关于原点对称,排除B;因为$f(1)=\frac{20}{e}>0$,排除C;又$f(5)=$

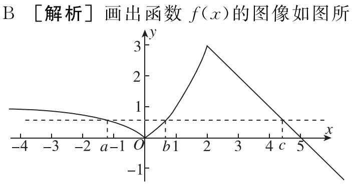
$\frac{52}{e^5}<1$,排除 D. 故选 A.

24. B ［解析］由题可知函数 $g(x)=f(x)-mx-m$ 的图像与 x 轴恰有 3 个交点,即函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=mx+m$ 的图像恰有 3 个交点,函数 $y=mx+m$ 的图像过定点 $P(-1,0)$,且斜率为 m,当动直线 $y=mx+m$ 过点 $A(1,1)$时,两函数的图像有 2 个交点,此时直线的斜率 $m=\frac{1}{2}$,故 $m>\frac{1}{2}$. 当动直线 $y=mx+m$ 与直线 $y=x+2$ 平行时,两函数的图像有 2 个交点,故 $m<1$. 综上,$\frac{1}{2}<m<1$.



25. AD ［解析］因为 $a=\log_{0.1}2$,$b=\log_{30}2$,所以 $ab<0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_2 0.1+\log_2 30=\log_2 3\in\left(\frac{3}{2},2\right)$,所以$\frac{3}{2}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<2$,所以 $4ab<2(a+b)<3ab$. 故选 AD.

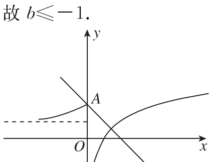
26. B ［解析］画出函数 $f(x)$的图像如图所示.



不妨令 $a<b<c$,则由图可知 $1-2^a=2^b-1$,即 $2^a+2^b=2$. 结合图像可得 $4<c<5$,故 $16<2^c<32$. ∴$18<2^a+2^b+2^c<34$. 故选 B.

27. -3 $(-\infty,-1]$ ［解析］当 $x+5=1$,即 $x=-4$ 时,函数值都为 1,即 $f(x)$的图像恒过点$(-4,1)$,∴$m=-4$,$n=1$,∴$m+n=-3$,∴$g(x)=\ln(bx-1)$. 若函数 $g(x)=\ln(bx-1)$在$(-2,-1)$上单调递减,则 $b<0$ 且 $bx-1>0$ 在$(-2,-1)$上恒成立,即 $b<\frac{1}{x}$ 在$(-2,-1)$上恒成立,故 $b\leqslant-1$.

28. $(2,+\infty)$ ［解析］由 $y=f(x)+x-a=0$,得 $f(x)=-x+a$,∴函数 $y=f(x)+x-a$ 有且只有一个零点等价于 $y=f(x)$与 $y=-x+a$的图像有且只有一个交点. 画出函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x,x>0,\\2^x+1,x\leqslant 0\end{cases}$的图像如图所示,



当 $y=-x+a$ 的图像经过点 $A(0,2)$时,与 $y=f(x)$的图像有两个交点,此时,$a=2$. 由图可知,当 $a>2$ 时,两图像有一个交点,∴a 的取值范围是$(2,+\infty)$.

29. $\left(-\infty,\frac{9}{16}\right]$ ［解析］∵当 $t\in[1,2]$时,函数 $f(x)=t^2x^2-(t+1)x+a$ 总有零点,∴$\Delta=(t+1)^2-4at^2\geqslant 0$ 对任意 $t\in[1,2]$恒成立,∴$a\leqslant\left(\frac{t+1}{2t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t}\right)^2$,设 $g(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2t}\right)^2$,$t\in[1,2]$,则 $g(t)$在$[1,2]$上单调递减,∴$g(t)_{\min}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}\right)^2=\frac{9}{16}$,∴$a\leqslant\frac{9}{16}$,故答案为$\left(-\infty,\frac{9}{16}\right]$.

小题必刷卷（四）

题组一 刷真题

1. D 2. e 3. $y=2x$ 4. $y=3x$

5. -3 ［解析］$y'=(ax+1+a)e^x$,由曲线 $y=(ax+1)e^x$ 在点$(0,1)$处的切线的斜率为-2可得$(1+a)e^0=-2$,解得 $a=-3$.

6. $1-\ln 2$ ［解析］曲线 $y=\ln x+2$ 的切线为 $y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1+1$(其中 x_1 为切点横坐标),曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线为 $y=\frac{1}{x_2+1}\cdot x+\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$(其中 x_2 为切点横坐标). 由题可知 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1},\\ \ln x_1+1=\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\ x_2=-\frac{1}{2},\end{cases}$ ∴$b=\ln x_1+1=1-\ln 2$.

7. $(e,1)$ ［解析］设切点$A(x_0,\ln x_0)$,因为 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$,所以该曲线在点 A 处的切线的斜率 $k=\frac{1}{x_0}$,又切线过点$(-e,-1)$,所以 $k=\frac{\ln x_0+1}{x_0+e}=\frac{1}{x_0}$,即 $x_0\ln x_0=e$,解得 $x_0=e$,所以点 A 的坐标是$(e,1)$.

8. B ［解析］因为 $x\neq 0$,$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{x^2}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,所以 A 错;当 $x>0$ 时,$e^x>e^{-x}$,此时 $f(x)>0$,所以 D 错;当 $x=1$ 时,$f(1)=e-\frac{1}{e}>2$,所以 C 错. 故选 B.

9. D ［解析］由导函数 $y=f'(x)$ 的图像可知,$y=f'(x)$ 在 x 轴的负半轴上有一个零点(不妨设为 x_1),并且当 $x<x_1$ 时,$f'(x)<0$,$y=f'(x)$ 在 x 轴的正半轴上有两个零点(从左到右依次设为 x_2,x_3),且当$x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)>0$,当 $x\in(x_2,x_3)$ 时,$f'(x)<0$,当$x>x_3$ 时,$f'(x)>0$. 因此函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极小值,在 $x=x_2$ 处取得极大值,在 $x=x_3$ 处取得极小值. 由此对照四个选项中的图像,选项 A 中,在 $x=x_1$ 处取得极大值,不符合题意;选项 B 中,极大值点小于 0,也不符合题意;选项 C 中,在 $x=x_1$ 处取得极大值,不符合题意;选项 D 符合题意. 因此选 D.

10. C ［解析］对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x=-\frac{4}{3}\cos^2 x+a\cos x+\frac{5}{3}$,因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $f'(x)\geqslant 0$,即 $-\frac{4}{3}\cos^2 x+a\cos x+\frac{5}{3}\geqslant 0$ 恒成立. 设 $t=\cos x\in[-1,1]$,则 $g(t)=4t^2-3at-5\leqslant 0$在$[-1,1]$上恒成立,所以有$\begin{cases}g(-1)=4\times(-1)^2-3a\times(-1)-5\leqslant 0,\\ g(1)=4\times 1^2-3a\times 1-5\leqslant 0,\end{cases}$ 解得$-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$.

11. A ［解析］设函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$,则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. 因为当 $x>0$ 时,$xf'(x)-f(x)<0$,所以当 $x>0$ 时,$g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上单调递减. 又因为函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数,所以函数 $g(x)$ 是偶函数,所以 $g(x)$ 在$(-\infty,0)$ 上单调递增,且 $g(-1)=g(1)=0$. 故当 $0<x<1$ 时,$g(x)>0$,则 $f(x)>0$;当 $x<-1$ 时,$g(x)<0$,则 $f(x)>0$. 综上所述,使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是$(-\infty,-1)\cup(0,1)$. 故选 A.

12. -1 $(-\infty,0]$ ［解析］因为 $f(x)$ 为奇函数,且 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $f(0)=0$,所以 $e^0+ae^{-0}=0$,解得 $a=-1$. 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,所以 $f'(x)=e^x-\frac{a}{e^x}\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,即 $a\leqslant e^{2x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,又因为 $e^{2x}>0$,所以 $a\leqslant 0$,即 a 的取值范围为$(-\infty,0]$.

13. A ［解析］$f'(x)=[x^2+(a+2)x+a-1]e^{x-1}$. 因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点,所以 $f'(-2)=0$,所以$4-2(a+2)+a-1=0$,解得 $a=-1$,此时 $f'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}$. 由 $f'(x)=0$,解得 $x=-2$ 或 $x=1$,且当$-2<x<1$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=-1$.

14. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ［解析］因为 $f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\sin(2x+4\pi)=f(x)$,所以 2π 是函数 $f(x)$ 的一个周期,不妨取区间$[0,2\pi]$进行分析.
$f'(x)=2\cos x+2\cos 2x=4\cos^2 x+2\cos x-2$,令 $f'(x)=0$,解得 $\cos x=\frac{1}{2}$ 或 $\cos x=-1$. 当 x 在$[0,2\pi]$上变化时,$f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$	π	$\left(\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$	$\frac{5}{3}\pi$	$\left(\frac{5}{3}\pi,2\pi\right]$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘		↘	极小值	↗

可知函数 $f(x)$ 在$[0,2\pi]$上的极小值即为函数 $f(x)$ 在定义域上的最小值,所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=2\sin\frac{5}{3}\pi+\sin\frac{10}{3}\pi=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

15. -3 ［解析］由题意得,$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$. 当 $a\leqslant 0$ 时,对任意 $x\in(0,+\infty)$,$f'(x)>0$,则函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上是增函数,则 $f(x)>f(0)=1$,则 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上没有零点,不满足题意,舍去. 当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$ 及 $x>0$,得 $x=\frac{a}{3}$,则当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,因此函数 $f(x)$ 的单调递减区间是$\left(0,\frac{a}{3}\right)$,单调递增区间是$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$,在 $x=\frac{a}{3}$ 处 $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1$. 而函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内有且只有一个零点,所以 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$,解得 $a=3$,因此 $f(x)=2x^3-3x^2+1$,则 $f'(x)=2x(3x-3)$. 令 $f'(x)=0$,结合 $x\in[-1,1]$,得 $x=0$ 或 $x=1$. 而当 $x\in(-1,0)$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,则函数 $f(x)$ 在$(-1,0)$上是增函数,在$(0,1)$上是减函数,所以 $f(x)_{\max}=f(0)=1$. 又 $f(-1)=-4$,$f(1)=0$,所以 $f(x)_{\min}=-4$,故 $f(x)$ 在$[-1,1]$上的最大值与最小值的和为-3.

题组二 刷模拟

16. D 17. A 18. A

19. A ［解析］因为 $f(-x)=x^2-x\sin(-x)=x^2+x\sin x=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,选项 B 错误. $f(x)=x^2+x\sin x=x(x+\sin x)$,令 $g(x)=x+\sin x$,则 $g'(x)=1+\cos x\geqslant 0$ 恒成立,所以 $g(x)$ 是增函数,则当 $x>0$ 时,$g(x)>g(0)=0$,故当 $x>0$ 时,$f'(x)=g(x)+xg'(x)>0$,即 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,故选 A.

20. D ［解析］依题意得 $f'(x)=ae^x+\cos x\geqslant 0$,即 $a\geqslant-\frac{\cos x}{e^x}$ 对 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$恒成立. 设 $g(x)=-\frac{\cos x}{e^x}$,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$,则 $g'(x)=\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;当 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right]$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,故 $g(x)_{\max}=\max\left\{g\left(-\frac{\pi}{2}\right),g(0)\right\}=0$,则 $a\geqslant 0$. 故选 D.

21. A ［解析］由题可知,$f'(x)=e^x+x-\frac{1}{x}$,则 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}>0$,$f'\left(\frac{1}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}-\frac{15}{4}<0$,∴$x_1\in$