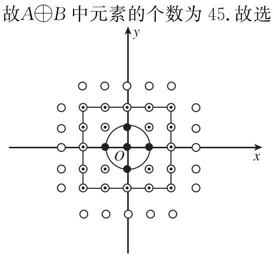
KEYS 参考答案 | 增分加练

小题必刷卷（一）

1. C　2. C　3. C　4. D　5. A　6. A

7. A ［解析］当 $a=0$ 时，$A=\varnothing$；当 $a\neq0$ 时，$\Delta=a^2-4a=0$，则 $a=4$，故选 A.

8. C ［解析］集合 A 表示如图所示的所有"•"点，集合 B 表示如图所示的所有"•"点＋所有"⊙"点，集合 $A\oplus B$ 显然是集合 $\{(x,y)||x|\leqslant3,|y|\leqslant3,x,y\in\mathbf{Z}\}$ 中除去四个点 $(-3,-3)$，$(-3,3)$，$(3,-3)$，$(3,3)$ 之外的所有整点（即横坐标与纵坐标都为整数的点），即集合 $A\oplus B$ 表示如图所示的所有"•"点＋所有"⊙"点＋所有"○"点，共 45 个. 故 $A\oplus B$ 中元素的个数为 45. 故选 C.



9. D ［解析］∵逆否命题是将原命题的条件与结论互换并分别否定，∴命题"若 $m>0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 有实根"的逆否命题是"若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m\leqslant0$".

10. C ［解析］函数在 $x=x_0$ 处有导数且导数为 0，$x=x_0$ 未必是函数的极值点，还要看函数在这一点左右两边的导数的符号，若符号一致，则不是极值点；反之，若 $x=x_0$ 为函数的极值点，则函数在 $x=x_0$ 处的导数一定为 0，所以 p 是 q 的必要不充分条件.

11. A ［解析］由 $\left|x-\frac12\right|<\frac12$，解得 $0<x<1$，可推出 $x^3<1$，反之不成立，故为充分而不必要条件.

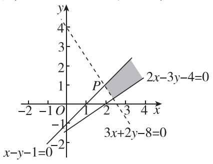
12. B ［解析］当 $ad=bc$ 时，例如 $1\times8=4\times2$，但 1，4，2，8 不能构成等比数列，故充分性不成立；反之，由等比数列的性质易得必要性成立.

13. A ［解析］设 R 是三角形外接圆的半径，$R>0$. 由正弦定理，得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$. ∵$\sin A\leqslant\sin B$，∴$2R\sin A\leqslant2R\sin B$，∴$a\leqslant b$. 同理也可以由 $a\leqslant b$ 推出 $\sin A\leqslant\sin B$. 故选 A.

14. B ［解析］由全称命题的否定形式可得 $\neg p$：存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\leqslant0$.

15. B ［解析］易知命题 p 为真命题，命题 q 为假命题，所以 $\neg q$ 为真命题，由复合命题真值表知，p 且 $\neg q$ 为真命题，故选 B.

16. D ［解析］当 $a=0$ 时，A 为空集，排除 A；当 $a=2$ 时，$(2,1)\in A$，排除 B；当 $a=\frac32$ 时，作出可行域如图中阴影部分所示，由 $\begin{cases}x-y=1,\\ \frac32x+y=4,\end{cases}$ 得 $P(2,1)$，又∵$ax+y>4$，取不到边界值，∴$(2,1)\notin A$. 故选 D.



17. B ［解析］由题知集合 $B=\{x|-x^2+4x\geqslant0\}=\{x|x^2-4x\leqslant0\}=\{x|0\leqslant x\leqslant4\}$，则 $A\cap B=\{1,3\}$，故选 B.

18. D ［解析］由题知集合 $B=\{x|(x-2)(x+1)<0\}=\{x|-1<x<2\}$，所以 $A\cup B=\{x|x>-1\}$，故选 D.

19. B ［解析］特称命题的否定是全称命题，所以 $\neg p$ 为"对任意 $x<0$，$e^x-x\leqslant1$"，故选 B.

20. C ［解析］集合 $A=\{y|y=2^x-1\}=(-1,+\infty)$，$B=\{x|x\geqslant1\}=[1,+\infty)$，则 $\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,1)$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(-1,1)$，故选 C.

21. A ［解析］∵集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{y|y=2^x+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y|y>1\}$，∴$A\cap B=\varnothing$，故 A 正确，C，D 错误；$A\cup B=\{x|x<1$ 或 $x>1\}$，故 B 错误. 故选 A.

22. A ［解析］若 $b>a>1$，则 $\log_ab>\log_aa=1$，即"$b>a>1$"⇒"$\log_ab>1$"；反之，若 $\log_ab>1$，则 $b>a>1$ 或 $0<b<a<1$，即"$\log_ab>1$"不能推出"$b>a>1$". 所以"$b>a>1$"是"$\log_ab>1$"的充分不必要条件，故选 A.

23. D ［解析］由 $\cos\theta=\frac{\sqrt2}{2}$，得 $\theta=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\tan\theta=\pm1$，即 $p\not\Rightarrow q$；由 $\tan\theta=1$，得 $\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\cos\theta=\pm\frac{\sqrt2}{2}$，即 $q\not\Rightarrow p$. 所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件，故选 D.

24. A ［解析］由 $A\cup C=B$ 可知集合 C 中一定有元素 2，所以符合要求的集合 C 有 $\{2\}$，$\{2,0\}$，$\{2,1\}$，$\{2,0,1\}$，共 4 个，故选 A.

25. D ［解析］∵集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|ax-2=0\}$，$B\subseteq A$，∴$B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{2\}$，∴$a=0,1,-2$，故选 D.

26. B ［解析］若方程 $\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{2-m}=1$ 表示双曲线，则 $(m-1)(2-m)<0$，解得 $m<1$ 或 $m>2$，A 的说法错误；若 p 且 q 为真命题，则 p，q 均为真命题，所以 p 或 q 为真命题，反之不成立，如 p 为假命题，q 为真命题，则 p 或 q 为真命题，但 p 且 q 为假命题，B 的说法正确；命题"存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+3<0$"的否定是"对任意 $x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+3\geqslant0$"，C 的说法错误；命题"若 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$"的逆命题是"若 $f'(x_0)=0$，则 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极值点"，假设 $f(x)=x^3$，则 $f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$，但 $x=0$ 不是 $y=f(x)$ 的极值点，D 的说法错误. 故选 B.

27. C ［解析］由 $2^x>0$，得 $2^x+\frac{1}{2^x}\geqslant2\sqrt{2^x\cdot\frac{1}{2^x}}=2$（当且仅当 $x=0$ 时取等号），则命题 p 是真命题，命题 $\neg p$ 是假命题；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$2^x>2^0=1$，则命题 q 是假命题，命题 $\neg q$ 是真命题，所以 p 且 q 是假命题，$(\neg p)$ 且 $(\neg q)$ 是假命题，p 且 $(\neg q)$ 是真命题，$(\neg p)$ 且 q 是假命题，故选 C.

28. C ［解析］$y=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sin\left(-2x+\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$，而函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像关于原点对称的图像的函数解析式为 $y=-\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$，则命题 p 是真命题；若 $l_1\parallel l_2$，则 $\frac36=\frac b8$ 且 $\frac63\neq\frac{a}{22}$，解得 $b=4$，$a\neq44$，由 l_1 和 l_2 之间的距离为 a，得 $a>0$，由 $\frac{|a-44|}{\sqrt{6^2+8^2}}=a$，解得 $a=4$ 或 $a=-\frac{44}{9}$（舍去），则 $a=b=4$，命题 q 是真命题. 所以 p 或 q 是真命题，p 且 q 是真命题，$(\neg p)$ 或 q 是真命题，p 或 $(\neg q)$ 是真命题，故选 C.

29. $(2,+\infty)$ ［解析］由"$x>2$"是"$x>m$"的必要不充分条件，得 $\{x|x>m\}\subsetneqq\{x|x>2\}$，∴$m>2$，即实数 m 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

30. $[2,+\infty)$ ［解析］若 p 为真命题，则存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $mx^2\leqslant-1$ 成立，所以 $m<0$；若 q 为真命题，即 $\Delta=m^2-4<0$，解得 $-2<m<2$. 若 p 或 q 为假命题，则 p，q 均为假命题，即 $\begin{cases}m\geqslant0,\\ m\leqslant-2\text{ 或 }m\geqslant2,\end{cases}$ 解得 $m\geqslant2$，即实数 m 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

小题必刷卷（二）

1. D　2. A　3. -7　4. $[-1,7]$　5. -2
6. A

7. C ［解析］因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,2)$，$f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln(-x^2+2x)=\ln[-(x-1)^2+1]$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，故选项 A，B 错. 由于函数 $y=-(x-1)^2+1$，$x\in(0,2)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称. 故选 C.

8. C ［解析］由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数且在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，可知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，∴由 $f(2^{|a-1|})>f(-\sqrt2)$，$f(-\sqrt2)=f(\sqrt2)$，可得 $2^{|a-1|}<\sqrt2$，即 $|a-1|<\frac12$，∴$\frac12<a<\frac32$.

9. D ［解析］∵当 $x>\frac12$ 时，$f\left(x+\frac12\right)=f\left(x-\frac12\right)$，∴$x>1$ 时，$f(x)=f(x-1)$，即 $f(6)=f(1)$.
∵当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$f(-x)=-f(x)$，∴$f(1)=-f(-1)$.
∵当 $x<0$ 时，$f(x)=x^3-1$，∴$f(6)=f(1)=-f(-1)=-[(-1)^3-1]=2$.

10. C ［解析］由题意得 $f\left(\log_3\frac14\right)=f(-\log_34)=f(\log_34)<f(1)$，$f(0)>f(2^{-\frac32})>f(2^{-\frac23})>f(2^0)=f(1)$，所以 $f(2^{-\frac32})>f(2^{-\frac23})>f\left(\log_3\frac14\right)$.

11. D ［解析］因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-1)=1$，不等式 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant1$，即 $f(1)\leqslant f(x-2)\leqslant f(-1)$，因为 $f(x)$ 单调递减，所以 $-1\leqslant x-2\leqslant1$，解得 $1\leqslant x\leqslant3$，故 x 的取值范围为 $[1,3]$.

12. 12 ［解析］因为函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(2)=-f(-2)=-[2\times(-2)^3+(-2)^2]=12$.

13. 6 ［解析］由 $f(x+4)=f(x-2)$ 可知周期 $T=6$，所以 $f(919)=f(153\times6+1)=f(1)$，又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(1)=f(-1)=6^{-(-1)}=6$.

14. 2 ［解析］因为函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是减函数，所以当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 $f(2)=1+1=2$.

15. -2 ［解析］因为 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，所以 $f(x)=f(x+2)$.
又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(0)=0$.
所以 $f\left(-\frac52\right)=f\left(-\frac12\right)=-f\left(\frac12\right)=-4^{\frac12}=-2$，$f(2)=f(0)=0$，
所以 $f\left(-\frac52\right)+f(2)=-2$.

16. -2 ［解析］由题，$f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1$.
∵$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1=\ln(1+x^2-x^2)+2=2$，
∴$f(a)+f(-a)=2$，
∴$f(-a)=-2$.

17. $\frac{\sqrt2}{2}$ ［解析］由 $f(x+4)=f(x)(x\in\mathbf{R})$，得 $f(15)=f(-1+4\times4)=f(-1)$，又 $-1\in(-2,0]$，所以 $f(15)=f(-1)=\left|-1+\frac12\right|=\frac12$. 而 $\frac12\in(0,2]$，所以 $f(f(15))=f\left(\frac12\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac12\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}$.

18. A ［解析］要使函数 $f(x)$ 有意义，则 $\begin{cases}-x^2-3x+4\geqslant0,\\ \lg(x+1)\neq0,\\ x+1>0,\end{cases}$
解得 $-1<x\leqslant1$ 且 $x\neq0$，
则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1]$，故选 A.

19. B ［解析］因为 $-3<0$，$1<\log_23<2$，所以 $f(-3)+f(\log_23)=\log_24+2^{2\log_23-1}=2+2^{\log_29}\times2^{-1}=\frac{13}{2}$，故选 B.

20. C ［解析］由 $f(x^2+1)$ 的定义域为 $[-1,1]$，即 $-1\leqslant x\leqslant1$，得 $0\leqslant x^2\leqslant1$，得 $1\leqslant x^2+1\leqslant2$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|1\leqslant x\leqslant2\}$.
由 $1\leqslant\lg x\leqslant2$，得 $10\leqslant x\leqslant100$，所以函数 $f(\lg x)$ 的定义域为 $[10,100]$，故选 C.

21. D ［解析］∵$f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，且 $f\left[f(x)-\frac1x\right]=2$，

∴ $f(x)-\frac{1}{x}$ 是常数,设 $f(x)-\frac{1}{x}=c$(c 为常数),则 $f(x)=\frac{1}{x}+c$,

∴ $f(c)=\frac{1}{c}+c=2$,解得 $c=1$,故 $f(x)=\frac{1}{x}+1$,∴ $f(3)=\frac{4}{3}$.

22. A [解析] 要使函数 $f(x)$ 有意义,则 $\begin{cases}x+1>0,\\x-3>0,\end{cases}$ 解得 $x>3$,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3,+\infty)$.
又 $y=\log_{0.5}(x+1)$ 与 $y=\log_{0.5}(x-3)$ 在 $(3,+\infty)$ 上都是减函数,所以函数 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上是减函数,故选 A.

23. B [解析] 由 $f(-x)=-f(x)$,得 $f(x)$ 是奇函数,即 $f(0)=0$. 由 $f(3-x)=f(x)$,可得 $f(3+x)=f(-x)=-f(x)$,则 $f(6+x)=-f(3+x)=f(x)$,即函数 $f(x)$ 的周期为 6,所以 $f(2019)=f(336\times6+3)=f(3)=f(3-3)=f(0)=0$,故选 B.

24. D [解析] 依题意得 $f(x)$ 在 **R** 上是减函数,所以 $f(x^2-2x+a)<f(x+1)$ 对任意的 $x\in[-1,2]$ 恒成立,等价于 $x^2-2x+a>x+1$ 对任意的 $x\in[-1,2]$ 恒成立,等价于 $a>-x^2+3x+1$ 对任意的 $x\in[-1,2]$ 恒成立. 设 $g(x)=-x^2+3x+1(-1\leqslant x\leqslant2)$,则 $g(x)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{13}{4}(-1\leqslant x\leqslant2)$,当 $x=\frac{3}{2}$ 时,$g(x)$ 取得最大值,且 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{4}$,因此 $a>\frac{13}{4}$,故选 D.

25. A [解析] $f(x)=[(x-1)^2-1]\cdot\sin(x-1)+x-1+2$,令 $g(x)=[(x-1)^2-1]\cdot\sin(x-1)+x-1$,得 $g(2-x)=[(1-x)^2-1]\cdot\sin(1-x)+1-x$,所以 $g(x)+g(2-x)=0$,则 $g(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称,所以 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,2)$ 对称. 所以 $M+m=4$,故选 A.

26. C [解析] $f(x)=\sin x$ 是奇函数,具有周期性,有最大值 1;$f(x)=\tan x$ 是奇函数,具有周期性,没有最大值;$f(x)=\begin{cases}-x+2,x>1,\\x,-1\leqslant x\leqslant1,\\-x-2,x<-1\end{cases}$ 是奇函数,没有周期性,没有最大值;$f(x)=\begin{cases}2^x,x>0,\\-2^{-x},x<0\end{cases}$ 是奇函数,没有周期性,没有最大值. 所以这四个函数共同具有的性质是奇函数,故选 C.

27. C [解析] 由已知,得 $f(1)=1,f(2)=2,f(3)=f(-3)=-1,f(4)=f(-2)=0,f(5)=f(-1)=-1,f(6)=f(0)=0$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1$,又函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$,即函数 $f(x)$ 的周期为 6,且 $2019=336\times6+3$,所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2019)=f(1)+f(2)+f(3)+336=338$,故选 C.

28. 1 [解析] 由 $f(x+1009)=\frac{2}{\sqrt{f(x)}+1}$,得 $f(1010)=f(1+1009)=\frac{2}{\sqrt{f(1)}+1}=1$,$f(2019)=f(1010+1009)=\frac{2}{\sqrt{f(1010)}+1}=1$.

29. -3 [解析] 若 $a>0$,则 $f(a)=2^a$,而 $f(a)+f(1)=2^a+2>0$,不满足题意;若 $a\leqslant0$,则 $f(a)=a+1$,由 $f(a)+f(1)=0$,得 $a+1+2=0$,解得 $a=-3$,即实数 a 的值为 -3.

小题必刷卷(三)

1. B 2. D 3. D 4. D 5. B 6. B

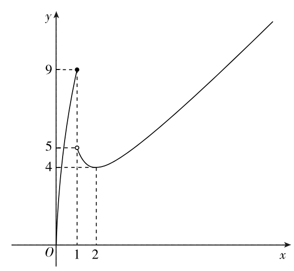
7. D [解析] 令 $y=f(x)$,则 $f(-x)=2^{|-x|}\sin(-2x)=-2^{|x|}\sin 2x=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数,其图像关于原点对称,排除 A,B. 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$f(x)>0$,当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$f(x)<0$,故选 D.

8. C [解析] 在函数 $y=f(x)$ 的图像上任设一点 $P(x,y)$,其关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $P'(x',y')$,则有 $\begin{cases}\frac{y'-y}{x'-x}=1,\\\frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x'=-y,\\y'=-x.\end{cases}$ 由于点 $P'(x',y')$ 在函数 $y=2^{x+a}$ 的图像上,于是有 $-x=2^{-y+a}$,得 $-y+a=\log_2(-x)$,即 $y=f(x)=a-\log_2(-x)$,所以 $f(-2)+f(-4)=a-\log_2 2+a-\log_2 4=2a-3=1$,所以 $a=2$.

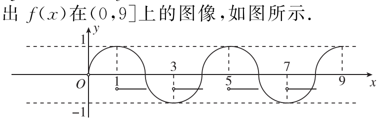
9. B [解析] $f(x)=2\sin x-\sin 2x=2\sin x(1-\cos x)$,当 $x=0,\pi,2\pi$ 时,$2\sin x-\sin 2x=2\sin x(1-\cos x)=0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点.

10. C [解析] ∵ $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$,∴ $f(2-x)=(2-x)^2-2(2-x)+a[e^{2-x-1}+e^{-(2-x)+1}]=x^2-4x+4-4+2x+a(e^{1-x}+e^{x-1})=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$,
∴ $f(2-x)=f(x)$,即直线 $x=1$ 为 $f(x)$ 的图像的对称轴.
由题意,$f(x)$ 有唯一零点,
∴ $f(x)$ 的零点只能为 $x=1$,
∴ $f(1)=1^2-2\times1+a(e^{1-1}+e^{-1+1})=0$,
解得 $a=\frac{1}{2}$.

11. D [解析] 由 $f(x)=-\frac{1}{4}x+a$,得 $4a=\begin{cases}8\sqrt{x}+x,0\leqslant x\leqslant1,\\\frac{4}{x}+x,x>1.\end{cases}$ 于是问题转化为直线 $y=4a$ 与分段函数 $y=\begin{cases}8\sqrt{x}+x,0\leqslant x\leqslant1,\\\frac{4}{x}+x,x>1\end{cases}=\begin{cases}(\sqrt{x}+4)^2-16,0\leqslant x\leqslant1,\\\frac{4}{x}+x,x>1\end{cases}$ 的图像恰有两个不同的公共点.
当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$y=(\sqrt{x}+4)^2-16\in[0,9]$;
当 $x>1$ 时,$y=x+\frac{4}{x}$ 在 $(1,2]$ 上单调递减,此时 $y\in[4,5)$,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,此时 $y\in(4,+\infty)$,故当 $x>1$ 时,$y=x+\frac{4}{x}\in[4,+\infty)$.
作出分段函数的图像如图所示,由图可知直线 $y=4a$ 与图像有两个不同的公共点时,$5\leqslant4a\leqslant9$ 或 $4a=4$,故 a 的取值范围为 $\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant\frac{9}{4}$ 或 $a=1$. 故选 D.



12. $\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ [解析] 当 $x\in(0,2]$ 时,$y=f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 等价于 $(x-1)^2+y^2=1(y\geqslant0)$. 结合 $f(x)$ 是周期为 4 的奇函数,可作出 $f(x)$ 在 $(0,9]$ 上的图像,如图所示.



因为当 $x\in(1,2]$ 时,$g(x)=-\frac{1}{2}$,且 $g(x)$ 的周期为 2,
由图可知,当 $x\in(1,2]\cup(3,4]\cup(5,6]\cup(7,8]$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有 2 个交点.
由题知,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像在区间 $(0,9]$ 上有 8 个交点,所以当 $x\in(0,1]\cup(2,3]\cup(4,5]\cup(6,7]\cup(8,9]$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有 6 个交点.
又当 $x\in(0,1]$ 时,$y=g(x)=k(x+2)$ 表示的直线恒过定点 $(-2,0)$,且斜率 $k>0$.
结合 $g(x)$ 的周期为 2 及 $f(x)$ 的图像可知,当 $x\in(2,3]\cup(6,7]$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像无交点,
所以当 $x\in(0,1]\cup(4,5]\cup(8,9]$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有 6 个交点.
由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期性可知,当 $x\in(0,1]$ 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有 2 个交点.
当线段 $y=k_1(x+2)(0<x\leqslant1)$ 与圆弧 $(x-1)^2+y^2=1(0<x\leqslant1,y\geqslant0)$ 相切时,圆心到线段的距离 $d=\frac{|3k_1|}{\sqrt{k_1^2+1}}=1$,解得 $k_1^2=\frac{1}{8}$,又 $k_1>0$,所以 $k_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$(此时恰有 1 个交点);当线段 $y=k_2(x+2)(0<x\leqslant1)$ 过点 $(1,1)$ 时,$k_2=\frac{1}{3}$(此时恰有 2 个交点).
结合图像分析可知,k 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

13. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ [解析] 由 $y=\log_a(x+1)+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,得 $0<a<1$. 又由 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减,得 $\begin{cases}0^2+(4a-3)\times0+3a\geqslant f(0)=1,\\\frac{3-4a}{2}\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$. 由 $y=|f(x)|$ 与 $y=2-\frac{x}{3}$ 的图像(图略)可知,在区间 $[0,+\infty)$ 上,方程 $|f(x)|=2-\frac{x}{3}$ 有且仅有一个解,故在区间 $(-\infty,0)$ 上,方程 $|f(x)|=2-\frac{x}{3}$ 同样有且仅有一个解,则 $3a<2$,所以 $\frac{1}{3}\leqslant a<\frac{2}{3}$.
当 $3a\geqslant2$ 时,两函数图像只有一个交点,不合题意. 所以 $a\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

14. A [解析] 若太阳的星等 $m_1=-26.7$,天狼星的星等 $m_2=-1.45$,则 $m_2-m_1=-1.45-(-26.7)=25.25$. 因为 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$,所以 $\lg\frac{E_1}{E_2}=10.1$,所以 $\frac{E_1}{E_2}=10^{10.1}$.

15. B [解析] 设 x 年后该公司全年投入的研发资金为 200 万元. 由题可知,$130(1+12\%)^x=200$,
解得 $x=\log_{1.12}\frac{200}{130}=\frac{\lg 2-\lg 1.3}{\lg 1.12}\approx3.80$.
又资金需超过 200 万元,所以 x 的值取 4,即该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是 2019 年.

16. C [解析] 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 **R** 上单调递减,若 $m<n$,则 $m-n<0$,$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}>\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$,充分性成立;若 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}>1$,则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}>\left(\frac{1}{2}\right)^0$,则 $m-n<0$,$m<n$,必要性成立. 所以"$m<n$"是"$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}>1$"的充要条件,故选 C.

17. B [解析] 因为 $f(x+1)+f(3-x)=\log_2\frac{2x}{2-x}+\log_2\frac{2(2-x)}{2-(2-x)}=\log_2 4=2$,所以函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(2,1)$ 对称,则 $f(4-a)=2-b$,故选 B.

18. B [解析] 函数 $y=2^x$ 在 **R** 上单调递增,且 $0<0.3<1$,则 $2^0<2^{0.3}<2^1$,即 $1<a<2$. 函数 $y=0.3^x$ 在 **R** 上单调递减,且 $2>0$,则 $0<0.3^2<0.3^0$,即 $0<b<1$. 因为关于 u 的函数 $y=\log_x u(x>1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $c=\log_x(x^2+0.3)>\log_x x^2=2$. 所以 $c>a>b$,故选 B.

19. C [解析] $y=(a-1)2^x-\frac{a}{2}=a\left(2^x-\frac{1}{2}\right)-2^x$,令 $2^x-\frac{1}{2}=0$,得 $x=-1$,则函数 $y=(a-1)2^x-\frac{a}{2}$ 的图像过定点 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$,故选 C.

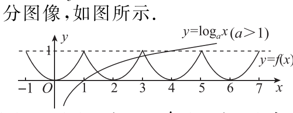
20. C [解析] 函数 $f(x)=e^x+3x-4$ 在 **R** 上是增函数,且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}-4=e^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}<0$,$f(1)=e+3-4=e-1>0$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$,即函数 $f(x)=e^x+3x-4$ 的零点所在的区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$,故选 C.

21. A [解析] 由 $f(x)=\frac{\ln|x|}{e^x}$，得 $f(1)=0$，$f(-1)=0$，又 $f(e)=\frac{1}{e^e}>0$，$f(-e)=\frac{1}{e^{-e}}>0$，排除选项C，D；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，排除选项B. 故选A.

22. C [解析] 由图像知，当 $x\to0$ 时，$f(x)\to\pm\infty$，可排除选项A，B；由图像知，当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，选项D中的函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}>0$，排除选项D，故选C.

23. B [解析] 由 $1<\log_{0.3}0.2<\frac{3}{2}$，得 $a=\log_{0.3}0.2\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$，即 $2a\in(2,3)$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_{0.3}0.2\in(1,2)$，即 $0<-b<1$，所以 $2<2a-b<4$，故选B.

24. A [解析] 由 $f(x)-f(-x)=0$，得 $f(x)=f(-x)$，则 $f(x)$ 是偶函数，由当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=x^2$，得当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，由题知函数 $f(x)$ 的周期为2，作出函数 $f(x)$ 的部分图像，如图所示.



∵$g(x)=f(x)-\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上仅有三个零点，∴$y=f(x)$ 和 $y=\log_a x$ 的图像在 $(0,+\infty)$ 上仅有三个交点. 当 $0<a<1$ 时，显然不符合题意；当 $a>1$ 时，作出函数 $y=\log_a x$ 的图像(如图所示)，由题意知 $\begin{cases}\log_a 3<1,\\ \log_a 5>1,\end{cases}$ 解得 $3<a<5$，即 a 的取值范围是(3,5). 故选A.

25. B [解析] 若 $x=0$，则此时库存量为10吨，所以库存量的一半为5吨，则 $y_1=0$，$y_2=5$，此时 $f(0)=0+5=5$，排除选项A.
若 $x=10$，则此时库存量为 $10+10=20$(吨)，所以库存量的一半为10吨，则 $y_2=10$，$y_1=10$，此时 $f(10)=10+10=20$；若 $x=20$，则此时库存量为 $10+20=30$(吨)，所以库存量的一半为15吨，则 $y_2=10$，$y_1=15$，此时 $f(20)=10+15=25$，排除选项D. 因为(0,5)，(10,20)，(20,25)三点不共线，所以排除选项C. 故选B.

26. -2 [解析] 根据题意，当 $x\geq0$ 时，$f(x)=\log_2(1+x)$，则 $f(3)=\log_2 4=2$，又 $f(x)$ 是定义在**R**上的奇函数，∴$f(-3)=-f(3)=-2$.

27. 2 [解析] $f(x)=(2^x)^2-2\times2^x+b$，令 $2^x=t$，则函数 $f(x)$ 可转化为 $y=t^2-2t+b$，当 $x\in[-1,1]$ 时，$t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，所以当 $t=2$ 时，$y_{\max}=2^2-2\times2+b=3$，解得 $b=3$，当 $t=1$ 时，$y_{\min}=1^2-2\times1+b=2$，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值是2.

28. 2 [解析] 由函数 $f(x)=(m^2-5m+7)x^m$ 是幂函数，得 $m^2-5m+7=1$，解得 $m=2$ 或 $m=3$. 当 $m=2$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，不符合题意；当 $m=3$ 时，$f(x)=x^3$，则 $f(x)$ 在**R**上是增函数. 故 $m=3$，∴$\log_m\sqrt{27}+m^{\log_m\frac{1}{2}}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}+3^{\log_3\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$.

29. 2 [解析] 令 $f(x)=0$，得 $x^2-2x-1-|x-1|=0$，即 $(x-1)^2-|x-1|-2=0$. 设 $|x-1|=t$，则 $t\geq0$，由 $t^2-t-2=0$，得 $t=2$ 或 $t=-1$(舍去)，所以 $|x-1|=2$，则 $x=3$ 或 $x=-1$，即函数 $f(x)=x^2-2x-1-|x-1|$ 有两个零点3，-1，且 $3+(-1)=2$，则函数 $f(x)=x^2-2x-1-|x-1|$ 的所有零点之和为2.

小题必刷卷（四）

1. D 2. D 3. A 4. A
5. $x+2y-2=0$ 6. (1,1)

7. e [解析] $f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x}{x}$，所以 $f'(1)=e$.

8. $2x-y-2=0$ [解析] 因为 $y'=\frac{2}{x}$，所以曲线 $y=2\ln x$ 在点(1,0)处的切线斜率为 $\frac{2}{1}=2$，所以切线方程为 $y-0=2(x-1)$，即 $2x-y-2=0$.

9. 1 [解析] ∵$f'(x)=a-\frac{1}{x}$，∴$f'(1)=a-1$，又 $f(1)=a$，∴函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 的方程为 $y-a=(a-1)(x-1)$，整理得 $y=(a-1)x+1$，∴切线 l 在 y 轴上的截距为1.

10. 8 [解析] 对函数 $y=x+\ln x$ 求导得 $y'=1+\frac{1}{x}$，函数图像在点(1,1)处的切线的斜率 $k=y'|_{x=1}=2$，所以在点(1,1)处的切线方程为 $y=2x-1$，又该切线也为函数 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 的图像的切线，所以由 $\begin{cases}y=2x-1,\\y=ax^2+(a+2)x+1\end{cases}$ 得 $ax^2+ax+2=0$，此方程应有唯一解，所以 $\Delta=a^2-8a=0$，得 $a=8$ 或 $a=0$(舍).

11. D [解析] 函数 $y=1+x+\frac{\sin x}{x^2}$ 的图像可以看成是由 $y=x+\frac{\sin x}{x^2}$ 的图像向上平移一个单位长度得到的，并且 $y'=\left(1+x+\frac{\sin x}{x^2}\right)'=1+\frac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$，当 $x\to\infty$ 时，$y'\to1$，所以可确定答案为A或D，又当 $x=1$ 时，$y=1+1+\sin1>2$，由图像可以排除A，故选D.

12. C [解析] 方法一：对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos2x+a\cos x=-\frac{4}{3}\cos^2x+a\cos x+\frac{5}{3}$，因为函数 $f(x)$ 在**R**上单调递增，所以 $f'(x)\geq0$，即 $-\frac{4}{3}\cos^2x+a\cos x+\frac{5}{3}\geq0$ 恒成立. 设 $t=\cos x\in[-1,1]$，则 $g(t)=4t^2-3at-5\leq0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，所以有 $\begin{cases}g(-1)=4\times(-1)^2-3a\times(-1)-5\leq0,\\g(1)=4\times1^2-3a\times1-5\leq0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3}\leq a\leq\frac{1}{3}$.
方法二：取 $a=-1$，则 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin2x-\sin x$，$f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos2x-\cos x$，但 $f'(0)=1-\frac{2}{3}-1=-\frac{2}{3}<0$，不满足 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，排除A，B，D，故选C.

13. D [解析] 由已知得，$f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x+2)(x-2)$.
于是当 $x<-2$ 或 $x>2$ 时，$f'(x)>0$；当 $-2<x<2$ 时，$f'(x)<0$.
故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$ 上单调递增；在区间 $(-2,2)$ 上单调递减.
于是当 $x=2$ 时，$f(x)$ 取得极小值，故 $a=2$.

14. -3 [解析] 由题意得，$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$. 当 $a\leq0$ 时，对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x)>f(0)=1$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点，不满足题意，舍去. 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 及 $x>0$，得 $x=\frac{a}{3}$，则当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，因此函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$，单调递增区间是 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$，在 $x=\frac{a}{3}$ 处 $f(x)$ 取得极小值 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1$. 而函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，所以 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$，解得 $a=3$，因此 $f(x)=2x^3-3x^2+1$，则 $f'(x)=2x(3x-3)$. 令 $f'(x)=0$，结合 $x\in[-1,1]$，得 $x=0$ 或 $x=1$. 而当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上是增函数，在 $(0,1)$ 上是减函数，所以 $f(x)_{\max}=f(0)=1$. 又 $f(-1)=-4$，$f(1)=0$，所以 $f(x)_{\min}=-4$，故 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为 -3.

15. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ [解析] 因为 $f(-x)=-x^3+2x+e^{-x}-e^x=-f(x)$，$f(0)=0$，所以 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(a-1)+f(2a^2)\leq0$ 可化为 $f(2a^2)\leq f(1-a)$. 又 $f'(x)=3x^2-2+e^x+e^{-x}\geq3x^2-2+2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=3x^2\geq0$，所以 $f(x)$ 在**R**上单调递增，则 $2a^2\leq1-a$，即 $-1\leq a\leq\frac{1}{2}$.

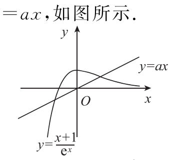
16. D [解析] 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为 k，倾斜角为 θ，由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$，得 $f'(x)=x^2-2$，则 $\tan\theta=k=f'(1)=-1$，又 $0\leq\theta<\pi$，故 $\theta=\frac{3\pi}{4}$，故选D.

17. C [解析] $y=e^x$ 的导函数为 $y'=e^x$，故曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线的斜率 $k=y'|_{x=0}=1$，故切线的方程为 $y-1=x$. 函数 $y=\ln x+b$ 的导函数为 $y'=\frac{1}{x}$，设切点为 (m,n)，则 $\frac{1}{m}=1$，解得 $m=1$，故 $n=2=\ln1+b$，解得 $b=2$，故选C.

18. A [解析] 由函数 $f(x)=x\sin x$，得 $f'(x)=\sin x+x\cos x$，则 $f'(x)$ 为奇函数，可排除选项C，D；设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=2\cos x-x\sin x$，$g'(0)=2>0$，排除选项B. 故选A.

19. A [解析] ∵函数 $f(x)$ 是定义在**R**上的奇函数，∴$f(-x)=-f(x)$. 当 $x<0$ 时，$f(x)=\frac{1-2\ln(-x)}{x}$，不妨设 $x>0$，则 $-x<0$，则 $f(x)=-f(-x)=-\frac{1-2\ln x}{-x}$，故当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{1-2\ln x}{x}$，此时 $f'(x)=\frac{-2-(1-2\ln x)}{x^2}=\frac{2\ln x-3}{x^2}$，则 $f(1)=1$，$f'(1)=-3$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=-3(x-1)$，即 $3x+y-4=0$，故选A.

20. A [解析] 函数 $f(x)$ 有两个零点，即方程 $\frac{x+1}{e^x}-ax=0$ 有两个根，即函数 $y=\frac{x+1}{e^x}$ 的图像与直线 $y=ax$ 有两个不同的交点. 由 $y=\frac{x+1}{e^x}$，得 $y'=\frac{e^x-xe^x-e^x}{(e^x)^2}=-\frac{x}{e^x}$. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$y'<0$，函数 $y=\frac{x+1}{e^x}$ 单调递减. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'>0$，函数 $y=\frac{x+1}{e^x}$ 单调递增. 当 $x\to-\infty$ 时，$y=\frac{x+1}{e^x}\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$y=\frac{x+1}{e^x}\to0$. 作出函数 $y=\frac{x+1}{e^x}$ 的图像与直线 $y=ax$，如图所示.



由图可知，要使函数 $y=\frac{x+1}{e^x}$ 的图像与直线 $y=ax$ 有两个不同的交点，则 $a>0$，故选A.

21. C [解析] 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=x^3e^x<0$，可排除选项B；又 $f(1)=e>1$，可排除选项D；由 $f(x)=x^3e^x$，得 $f'(x)=(x^3+3x^2)e^x$，故 $f'(0)=0$，根据导数的几何意义，可排除选项A. 故选C.

22. D [解析] 依题意得 $a=\ln\sqrt[3]{3}=\frac{\ln3}{3}$，$b=e^{-1}=\frac{\ln e}{e}$，$c=\frac{3\ln2}{8}=\frac{\ln8}{8}$. 构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}=b$，且 $f(3)>f(8)$，即 $a>c$，所以 $b>a>c$，故选D.

23. A [解析] 构造函数 $g(x)=f(x)-\cos x$，$x\in$**R**. 由 $f(x)+f(-x)=2\cos x$，得 $f(x)-\cos x=-[f(-x)-\cos(-x)]$，即 $g(x)=-g(-x)$，∴$g(x)$ 为**R**上的奇函数. ∵$g'(x)=f'(x)+\sin x<0$ 恒成立，∴$g(x)$ 在**R**上单调递减. 若 $f(\pi+\alpha)+f(\alpha)\geq0$，则 $f(\pi+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\geq-[f(\alpha)-\cos\alpha]$，即 $g(\pi+\alpha)\geq-g(\alpha)=g(-\alpha)$，∴$\pi+\alpha\leq-\alpha$，解得 $\alpha\leq-\frac{\pi}{2}$. 故选A.

24. B [解析] 由题可得，若存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)$，则函数 $f(x)$ 具有"同质点". 对于①，$y'=\cos x$，显然存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得 $\cos x_1=\cos x_2$，所以 $y=\sin x$ 具有"同质点"；对于②，$y'=e^x$ 在**R**上单调递增，可得不存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得 $e^{x_1}=e^{x_2}$，所以 $y=e^x$ 不具有"同质点"；对于③，$y'=3x^2$，显然存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得 $3x_1^2=3x_2^2$，所以 $y=x^3$ 具有"同质点"；对于④，$y'=\frac{1}{x}$，由 $y'=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，可得不存在 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，使得 $\frac{1}{x_1}=$

$\frac{1}{x_2}$，所以 $y=\ln x$ 不具有“同质点”．所以具有“同质点”的函数有 $y=\sin x$，$y=x^3$，共 2 个．故选 B．

25．B ［解析］由函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+k(\ln x-x)$，可得 $f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}+k\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{x-1}{x}\left(\frac{e^x}{x}-k\right)$．$\because f(x)$有唯一的极值点 $x=1$，$\therefore f'(x)=0$ 有唯一的根 $x=1$，$\therefore \frac{e^x}{x}-k=0$ 无实根．令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，$x>0$，则直线 $y=k$ 与 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 的图像无交点．$g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，由 $g'(x)>0$ 得 $x>1$，故 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，由 $g'(x)<0$ 得 $0<x<1$，故 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=e$，$\therefore g(x)$的值域为$[e,+\infty)$，$\therefore$只需 $k<e$．综上，实数 k 的取值范围是$(-\infty,e)$，故选 B．

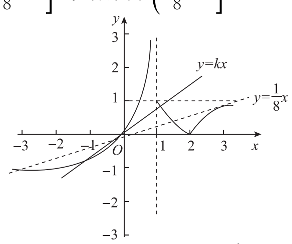
26．$x+y=0$ ［解析］由题可得 $f(-1)=(-1)^3+2\times(-1)^2=1$，$f'(x)=3x^2+4x$，所以 $f'(-1)=3\times(-1)^2+4\times(-1)=-1$，所以曲线 $y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线的斜率为 -1，所以曲线 $y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程为 $y-1=-1\times(x+1)$，即 $x+y=0$．

27．1 ［解析］$\because y=1+\ln x$，$\therefore y'=\frac{1}{x}$，设切点为$(m,1+\ln m)$，则切线的斜率为$\frac{1}{m}$，$\therefore$曲线 $y=1+\ln x$ 在点$(m,1+\ln m)$处的切线的方程为 $y-\ln m-1=\frac{1}{m}(x-m)$，即 $y-\ln m=\frac{1}{m}x$，又该切线过原点，$\therefore -\ln m=0$，解得 $m=1$，$\therefore a=\frac{1}{m}=1$．

28．$\left(\frac{1}{8},1\right]$ ［解析］由函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(1-x),x<1,\\ \left|\frac{2}{x}-1\right|,x\geqslant 1,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=f(x)-kx$ 有且只有三个零点等价于 $y=f(x)$的图象与直线 $y=kx$ 有 3 个交点，$y=f(x)$的图象与直线 $y=kx$ 的位置关系如图所示，

当直线 $y=kx$ 与 $f(x)=1-\frac{2}{x}$ 相切时，易得 $k=\frac{1}{8}$，

由图可知，当 $y=f(x)$的图象与直线 $y=kx$ 有 3 个交点时，实数 k 的取值范围为$\left(\frac{1}{8},1\right]$，故答案为$\left(\frac{1}{8},1\right]$．



29．$\frac{1}{e}$ ［解析］由 $f(x)=\begin{cases}e^x(x\geqslant a),\\ f(2a-x)(x<a)\end{cases}$ 可知 $f(x)$的图像关于直线 $x=a$ 对称．由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最小值为 0，可得过点 $P(a,0)$与曲线 $y=e^x(x\geqslant a)$相切的直线的斜率等于 1．设切点为 $C(x_0,e^{x_0})$，则以 C 为切点的切线方程为 $y=e^{x_0}x-e^{x_0}(x_0-1)$，又此切线过点 $P(a,0)$且斜率等于 1，所以 $e^{x_0}=1$，$a=x_0-1$，可得 $x_0=0$，$a=-1$，则 $f(x)$在$[-1,+\infty)$上的最小值为$\frac{1}{e}$，则函数 $f(x)$的最小值为$\frac{1}{e}$．

解答必刷卷（一）

1．**解**：(1)由 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$ 得 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$．

令 $f'(x)=1$，即$\frac{3}{4}x^2-2x+1=1$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$．

又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{27}$，

所以曲线 $y=f(x)$的斜率为 1 的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，

即 $y=x$ 与 $y=x-\frac{64}{27}$．

(2)证明：令 $g(x)=f(x)-x$，$x\in[-2,4]$．

由 $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$．

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$．

当 x 变化时 $g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$\left(0,\frac{8}{3}\right)$	$\frac{8}{3}$	$\left(\frac{8}{3},4\right)$	4
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$的最小值为 -6，最大值为 0．

故 $-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，即 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$．

(3)由(2)知，

当 $a<-3$ 时，$M(a)\geqslant F(0)=|g(0)-a|=-a>3$；

当 $a>-3$ 时，$M(a)\geqslant F(-2)=|g(-2)-a|=6+a>3$；

当 $a=-3$ 时，$M(a)=3$．

综上，当 $M(a)$最小时，$a=-3$．

2．**证明**：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}$．

因为 $y=\ln x$ 单调递增，$y=\frac{1}{x}$ 单调递减，所以 $f'(x)$单调递增，又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0$，故存在唯一的 $x_0\in(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$．

又当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

因此，$f(x)$存在唯一的极值点．

(2)由(1)知 $f(x_0)<f(1)=-2$，又 $f(e^2)=e^2-3>0$，所以 $f(x)=0$ 在$(x_0,+\infty)$内存在唯一根 $x=\alpha$．

由 $\alpha>x_0>1$ 得$\frac{1}{\alpha}<1<x_0$．

又 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\ln\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}-1=\frac{f(\alpha)}{\alpha}=0$，故$\frac{1}{\alpha}$是 $f(x)=0$ 在$(0,x_0)$内的唯一根．

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数．

3．**解**：(1)由已知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且

$f'(x)=\frac{1}{x}-[ae^x+a(x-1)e^x]=\frac{1-ax^2e^x}{x}$．

因此当 $a\leqslant 0$ 时，$1-ax^2e^x>0$，从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增．

(2)证明：(i)由(1)知，$f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}$．令 $g(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\frac{1}{e}$，可知 $g(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减，又 $g(1)=1-ae>0$，且 $g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2<0$，

故 $g(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有唯一解，从而 $f'(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有唯一解，不妨设为 x_0，则 $1<x_0<\ln\frac{1}{a}$．当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}>\frac{g(x_0)}{x}=0$，所以 $f(x)$在$(0,x_0)$内单调递增；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)=\frac{g(x)}{x}<\frac{g(x_0)}{x}=0$，所以 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$内单调递减．

因此 x_0 是 $f(x)$的唯一极值点．

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，故 $h(x)$在$(1,+\infty)$内单调递减，从而当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$，从而

$f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\ln\frac{1}{a}-a\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\ln\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}+1=h\left(\ln\frac{1}{a}\right)<0$，

又因为 $f(x_0)>f(1)=0$，所以 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$内有唯一零点．又 $f(x)$在$(0,x_0)$内有唯一零点 1，从而，$f(x)$在$(0,+\infty)$内恰有两个零点．

(ii)由题意，$\begin{cases}f'(x_0)=0,\\ f(x_1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax_0^2e^{x_0}=1,\\ \ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1},\end{cases}$ 从而 $\ln x_1=\frac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$，

即 $e^{x_1-x_0}=\frac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$．

因为当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，又 $x_1>x_0>1$，

故 $e^{x_1-x_0}<\frac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，两边取对数，

得 $\ln e^{x_1-x_0}<\ln x_0^2$，于是 $x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，

整理得 $3x_0-x_1>2$．

4．**解**：(1)由 $f(x)=x\ln x+ax^2$，

得 $f'(x)=1+\ln x+2ax$，$x>0$，

由题意可得 $f'(1)=1+2a=-1$，

解得 $a=-1$．

(2)若 $a=0$，则 $f(x)=x\ln x$，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$．

由 $f(x)=0$，可得 $x=1$，即 $f(x)$的零点个数为 1．

若 $a>0$，由 $f(x)=0$，得 $x\ln x+ax^2=0$，又 $x>0$，故 $\ln x+ax=0$，

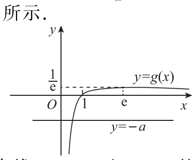
可得 $-a=\frac{\ln x}{x}$．

设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$．

当 $x>e$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当 $0<x<e$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增．

故当 $x=e$ 时 $g(x)$取得极大值，且为最大值，故 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$．

由 $a>0$，得 $-a<0$，作出 $g(x)$的图像与直线 $y=-a$，如图所示．



由图可知，直线 $y=-a$ 和 $g(x)$的图像只有一个交点，

即当 $a>0$ 时，$f(x)$的零点个数为 1．

综上可得，若 $a\geqslant 0$，则 $f(x)$的零点个数为 1．

5．**解**：(1)$f'(x)=\frac{x^2-(a+1)x+a}{e^x}=\frac{(x-1)(x-a)}{e^x}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=a$．

当 $a=1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增．

当 $a<1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<a$ 或 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $a<x<1$，故函数 $f(x)$在$(-\infty,a)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(a,1)$上单调递减．

当 $a>1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x<1$ 或 $x>a$，令 $f'(x)<0$，得 $1<x<a$，故函数 $f(x)$在$(-\infty,1)$，$(a,+\infty)$上单调递增，在$(1,a)$上单调递减．

(2)证明：要证对任意 $x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geqslant -1$，即证当 $x\in[0,+\infty)$时，$f(x)_{\min}\geqslant -1$．

①当 $a>1$ 时，由(1)可知，当 $x\in[0,+\infty)$时，$f(x)_{\min}=\min\{f(0),f(a)\}$．

$f(0)=-1$，$f(a)=\frac{-a-1}{e^a}$．

设 $g(x)=\frac{-x-1}{e^x}$，$x>1$，则 $g'(x)=\frac{x}{e^x}>0$，

$\therefore g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $g(x)>g(1)=-\frac{2}{e}>-1$，即 $f(a)>-1$．

$\therefore f(x)_{\min}=-1$．

②当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(0)=-1$．

③当 $3-e\leqslant a<1$ 时，由(1)可知，当 $x\in[0,+\infty)$时，$f(x)_{\min}=\min\{f(0),f(1)\}$．

又$\because f(0)=-1$，$f(1)=\frac{a-3}{e}\geqslant\frac{(3-e)-3}{e}=-1$，

$\therefore f(x)_{\min}=-1$．

综上，当 $a\geqslant 3-e$ 时，对任意 $x\in[0,+\infty)$，$f(x)\geqslant -1$．

6．**解**：(1)$f'(x)=\ln x+2-4ax$．

$\because f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递减，

$\therefore f'(x)=\ln x+2-4ax\leqslant 0$ 在$(0,+\infty)$内恒成立，

即 $4a\geqslant\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}$在$(0,+\infty)$内恒成立．

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}$，则 $g'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$．

∴当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 内为增函数；

当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 内为减函数.

∴$g(x)$的最大值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=e$，

要使 $4a\geqslant\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}$ 在$(0,+\infty)$内恒成立，只需 $4a\geqslant e$，解得 $a\geqslant\frac{e}{4}$，故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{e}{4},+\infty\right)$.

(2)证明：若函数 $f(x)$有两个极值点 x_1,x_2，则 $f'(x)=\ln x+2-4ax=0$ 在$(0,+\infty)$内有两个根 x_1,x_2，即 $4a=\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}$ 在$(0,+\infty)$内有两个根 x_1,x_2，

由(1)知 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{e}\right)=e$，且当 $x\to0$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to0$，故 $0<4a<e$，即 $0<a<\frac{e}{4}$.

由 $\ln x_1+2-4ax_1=0$，$\ln x_2+2-4ax_2=0$，

两式相减得 $\ln x_1-\ln x_2=4a(x_1-x_2)$.

不妨设 $0<x_1<x_2$，

∴要证 $x_1+x_2>\frac{1}{2a}$，只需证 $\frac{x_1+x_2}{4a(x_1-x_2)}<\frac{1}{2a(\ln x_1-\ln x_2)}$，

即证 $\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}>\ln x_1-\ln x_2$，即证 $\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}>\ln\frac{x_1}{x_2}$.

令 $h(x)=\frac{2(x-1)}{x+1}-\ln x$，$0<x<1$，

∴$h'(x)=\frac{-(x-1)^2}{x(x+1)^2}$，故 $h'(x)<0$ 在$(0,1)$内恒成立，即函数 $h(x)$在$(0,1)$内单调递减，

∴当 $x\in(0,1)$时，$h(x)>h(1)=0$，∴$\frac{2(x-1)}{x+1}>\ln x$，

即不等式$\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}>\ln\frac{x_1}{x_2}$成立，

故 $x_1+x_2>\frac{1}{2a}$.

小题必刷卷（五）

1. B 2. $\frac{1}{3}$ 3. C 4. A 5. C

6. A [解析]因为$\cos(-x)=\cos x$，所以 $f(x)=\cos|x|=\cos x$，其最小正周期为2π，C不正确；$f(x)=\sin|x|=\begin{cases}\sin x,x\geqslant0,\\-\sin x,x<0,\end{cases}$该函数没有周期性，D不正确；函数 $f(x)=|\sin 2x|$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，但当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，$f(x)=|\sin 2x|=\sin 2x$ 单调递减，B不正确；函数 $f(x)=|\cos 2x|$以$\frac{\pi}{2}$为周期，且在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，满足题意. 故选 A.

7. C [解析] $f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. 由 $f(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递减，得 a 的最大值为$\frac{3\pi}{4}$，故选 C.

8. A [解析]将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图像向右平移$\frac{\pi}{10}$个单位长度后，得到函数 $y=\sin 2x$ 的图像，该函数在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增. 故选 A.

9. B [解析] $f(x)=2\sin x-\sin 2x=2\sin x(1-\cos x)$，当 $x=0,\pi,2\pi$ 时，$2\sin x-\sin 2x=2\sin x(1-\cos x)=0$，所以 $f(x)$在$[0,2\pi]$上有 3 个零点.

10. $\frac{\pi}{2}$ [解析] $f(x)=\sin^2 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x$，所以函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期为$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

11. $-\frac{\pi}{6}$ [解析]由题意得，$\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=\pm1$，则$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

12. D [解析] $\tan 255^\circ=\tan(180^\circ+75^\circ)=\tan 75^\circ=\tan(30^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times1}=2+\sqrt{3}$. 故选 D.

13. D [解析]∵$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，∴$\sin 2\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=-\frac{7}{25}$.

14. $\frac{3}{2}$ [解析] $\tan\alpha=\tan\left[\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)+\frac{5\pi}{4}\right]=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)+\tan\frac{5\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)\tan\frac{5\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{5}+1}{1-\frac{1}{5}\times1}=\frac{3}{2}$.

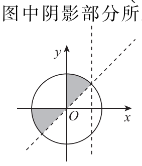
15. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ [解析]因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，所以 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，于是 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

16. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ [解析]由$\frac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\tan\alpha}{\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}}=-\frac{2}{3}$，得 $3\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$，解得 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$.

$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$，

将 $\tan\alpha=2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 代入得 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

17. A [解析]点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$在第一象限$\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha>0,\\\tan\alpha>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha>\cos\alpha,\\\tan\alpha>0.\end{cases}$满足条件的$\alpha$如图中阴影部分所示，



则在$[0,2\pi)$内，α的取值范围是$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$，故选 A.

18. A [解析]∵$\alpha\in(0,\pi)$，∴$\sin\alpha>0$，∴$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-2\cos\alpha$. 由 $\tan\alpha=2=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，解得 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. ∵$\alpha\in(0,\pi)$，$\tan\alpha>0$，∴$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

19. D [解析]显然 $\tan\alpha\neq0$，$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-5\cos\alpha}=4\Rightarrow\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-5\times\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=4\Rightarrow\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-5}=4\Rightarrow\tan\alpha=7$. 故选 D.

20. A [解析] $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{3}$. 故选 A.

21. D [解析]∵$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，∴$\frac{2\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，∴$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{4}{5}$，∴$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-4+3\sqrt{3}}{10}$，故选 D.

22. D [解析] $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\sin 2\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta>\sin\theta$. ∵$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$2\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，∴$\cos 2\theta=\frac{4}{5}$，∴$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$，故选 D.

23. D [解析] $f(x)=|\sin x|+1-2\sin^2x=-2|\sin x|^2+|\sin x|+1=-2\left(|\sin x|-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$. ∵$|\sin x|\in[0,1]$，∴$f(x)\in\left[0,\frac{9}{8}\right]$. 故选 D.

24. B [解析]∵$x\in\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$，∴$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[2a-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$. ∵$f(x)$在$\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$上有最小值$-1$，根据余弦函数的性质，可得 $2a-\frac{\pi}{3}\leqslant-\pi$，可得 $a\leqslant-\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

25. B [解析]设 $f(x)$的最小正周期为 T，$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $f(\alpha)=2$，$f(\beta)=0$，所以$|\alpha-\beta|$的最小值为$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=2\pi$，所以 $\omega=1$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 B.