



参考答案 / 听课手册

第一单元 集合与常用逻辑用语

第1讲 集合

【课前双基巩固】

知识聚焦

- (1)确定性 互异性
(2) $a \in A$ $b \notin A$
(3)列举法 描述法
(4) \mathbf{N} \mathbf{N}^+ 或 \mathbf{N}_+ \mathbf{Z} \mathbf{Q} \mathbf{R}
- 元素 $A \subseteq B$ $B \supseteq A$ 至少 $A \subseteq B$ $B \supseteq A$
相同 $A=B$ 子集 真子集
- 或 $\{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 且 $\{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 不 $\{x|x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$
- (1) $B \cup A$ (2) $A \subseteq B$ (3) \emptyset (4) $A \cap B$ (5) $A \cup B$

对点演练

- 4 或 1 2. 4 3. $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$
1. 5, 0 或 3 6. 2, 7, 0 或 1 或 -1
8. $[2, 4]$ 9. 4

【课堂考点探究】

- 例1 (1)A (2)-1 变式题 (1)B (2)-3
例2 (1)B (2)A 变式题 (1)D (2)D
例3 (1)D (2)B 例4 (1)A (2)C
例5 (1)C (2)B

第2讲 命题及其关系、充分条件与必要条件

【课前双基巩固】

知识聚焦

- (1)真假 判断为真 判断为假 (3)①相同
②没有关系
- 充分 必要 充分不必要 必要不充分
充要 既不充分也不必要

对点演练

- ④ 2. 0
- 若整数 a 不是奇数, 则 a 能被 2 整除
- 既不充分也不必要
- 若 $a+b \neq \lambda(a-b)$, 则向量 $a+b$ 与 $a-b$ 不平行
- 对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $ab \leq 0$, 则 $a \leq 0$
- $[-3, 0]$
- (1) $a \geq 2$ (2) $a < 2$ 9. 充分不必要

【课堂考点探究】

探究点一

- B 2. C 3. A 4. A

探究点二

- A 2. B 3. C 4. D
- 例 (1)A (2)B

变式题 (1) $0 \leq a \leq 1$ (2) $[\frac{1}{2}, 1]$

第3讲 简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词

【课前双基巩固】

知识聚焦

- (1)且 或 非 \wedge, \vee, \neg
(2)真假 假 真 假 真 真 假 真
- (1) \forall (2) \exists
- $\forall x \in M, p(x) \rightarrow \exists x_0 \in M, p(x_0)$ $\forall x \in M$

对点演练

- 真 真 真 假
- $\forall x \in \mathbf{R}, \log_2 x + 2 \geq 0$
- 有些表面积相等的三棱锥体积不相等
- $(\neg p) \wedge (\neg q)$
- 存在一个奇数, 它的立方不是奇数
- ④ 7. $(-\infty, 4]$

【课堂考点探究】

- D 2. C 3. D
- 例1 (1)D (2)A 变式题 (1)D (2)A
- 例2 (1)1 (2) $a > 1$
- 变式题 (1)C (2) $[1 + \sqrt{3}, +\infty)$

第4讲 函数的概念及其表示

【课前双基巩固】

知识聚焦

- 非空的数集 非空的集合 任意 唯一确定
任意 唯一确定
- (1)定义域 值域 (2)定义域 值域 对应关系 (3)定义域 对应关系 (4)解析法
图像法
- 对应关系

对点演练

- ④ 2. 4 5 3. $\{x|x > 1\}$ 4. 7
- $[-3, 0] \cup [2, 3]$ $[1, 5]$ $[1, 2) \cup (4, 5]$
- $\{x|x \geq 2\}$
- $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$
- $x^2 - 1 (x \geq 0)$

【课堂考点探究】

- 例1 (1)C (2) $(\frac{\pi}{4}, 1]$ 例2 (1)B (2)B

- 例3 (1) $-\frac{9}{2}$ (2) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

- 例4 (1) $\lg \frac{2}{x-1} (x > 1)$ (2) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$
变式题 (1)3 (2) $f(x) = 2x + 7$

- 例5 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\sqrt{2}$ 例6 (1)D (2)0 或 1

- 例7 (1)D (2) $(-\frac{1}{4}, +\infty)$

应用演练

- C 2. B 3. B 4. C 5. C

第5讲 函数的单调性与最值

【课前双基巩固】

知识聚焦

- $f(x_1) < f(x_2)$ $f(x_1) > f(x_2)$ 上升的 下降的
- 增函数或减函数 区间 D
- $f(x) \geq M$ $f(x_0) = M$

对点演练

- $a < \frac{1}{2}$ 2. $(2, 3]$ $[-3, 2]$
- $\frac{3}{2}$ 4. $a \leq 2$ 5. $(-1, \frac{3}{2})$

- $(-\infty, \frac{21}{8}]$ 7. $[-1, 1)$

- (1) $a \leq -3$ (2)-3

【课堂考点探究】

- 例1 (1)略 (2) $0 < a \leq 1$
变式题 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 证明略.
例2 (1)D (2) $(-\infty, -2), (-1, +\infty)$
变式题 (1)A (2)D

第二单元 函数、导数及其应用

- 例3 (1)D (2)B

- 例4 (1)B (2) $(0, \frac{3}{4}) \cup (1, +\infty)$

- 例5 (1)A (2) $\frac{2}{5}$ 例6 (1)B (2)D

应用演练

- A 2. C 3. B 4. 2 5. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

第6讲 函数的奇偶性与周期性

【课前双基巩固】

知识聚焦

- $f(-x) = f(x)$ $f(-x) = -f(x)$ y 轴 原点
- $f(x+T) = f(x)$ 最小的正数 最小正数

对点演练

- ②③ ⑤ ①④ 2. 减 减
- $1 - \sqrt{2}$ 4. 1 5. 奇 6. $x = a$ $(b, 0)$
- 3 8. $\begin{cases} x-3, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ x+3, x < 0 \end{cases}$

【课堂考点探究】

- 例1 (1)B (2)B 例2 (1)D (2)A

- 例3 (1)B (2)-4

应用演练

- D 2. A 3. C 4. 2 5. -1

探究点二

- D 2. C
- 例4 (1)B (2)C 例5 (1)-4 (2)2
- 例6 (1)D (2)A

应用演练

- B 2. D 3. B 4. B 5. A

第7讲 二次函数与幂函数

【课前双基巩固】

知识聚焦

- $[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$ $(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$
 $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ $(-\infty, -\frac{b}{2a})$
 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ $b=0$
- (1) $y = x^n$ 自变量
(2) $\{x|x \geq 0\}$ $\{x|x \neq 0\}$ $\{y|y \geq 0\}$
 $\{y|y \geq 0\}$ $\{y|y \neq 0\}$ 奇 偶 奇
非奇非偶 奇 $(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$
 $[0, +\infty)$ $(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$ $(1, 1)$

对点演练

- 3 17 2. 2 3. $\frac{1}{2}$

- $y = -\frac{1}{4}x^2 - x$ 5. ④

- $m \leq -\frac{1}{6}$ 7. (3, 5) 8. $(-\infty, 1)$

【课堂考点探究】

- B 2. D 3. A 4. B

- 例1 (1) $f(x) = -4x^2 + 4x + 7$

- (2) $f(x) = -4x^2 - 12x + 40$

- 变式题 (1) $x^2 + 2x + 1$ (2) $x^2 - 4x + 3$

- 例2 (1)B (2)C 例3 (1)D (2)D

- 例4 (1)A (2)-5 或 $\frac{5}{4}$

- 例5 (1) $(-\infty, -1)$ (2) $[\frac{1}{8}, 2]$

应用演练

- C 2. C 3. C 4. B

- $[-\frac{1}{10}, 0) \cup (0, \frac{1}{10}]$

第8讲 指数与指数函数

【课前双基巩固】

知识聚焦

- 方根 奇数 偶数 0 根式 根指数 被开

- 方数 $a \begin{cases} a(a \geq 0), \\ -a(a < 0) \end{cases}$

- $(0, +\infty)$ $(0, 1)$ $y > 1$ $0 < y < 1$
 $0 < y < 1$ $y > 1$ 增函数 减函数

对点演练

- 3 2. 1 3. $(-\infty, 2)$
- (1, 3) 5. $[0, +\infty)$ 6. $2\sqrt{2}$
- 2 8. 2 或 $\frac{1}{2}$ 9. $\{y|y > 0 \text{ 且 } y \neq 1\}$

【课堂考点探究】

- B 2. C 3. $99 + \pi$ 4. $-\frac{1}{2}$

- 例1 (1)C (2)C 变式题 (1)D (2)B

- 例2 (1)D (2)C 例3 (1)C (2)-1

- 例4 (1)A (2) $(-\infty, -1]$

应用演练

- D 2. B 3. D 4. $\frac{1}{2}$ 5. $[\frac{3}{4}, 57]$

第9讲 对数与对数函数

【课前双基巩固】

知识聚焦

- 对数 $\log_a N = x$ 0 N $\log_a M + \log_a N$
 $\log_a M - \log_a N$ $n \log_a M$
- $(0, +\infty)$ \mathbf{R} (1, 0) 1 0 $y > 0$ $y < 0$
 $y < 0$ $y > 0$ 增 减
- $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ $y = x$

对点演练

1. 1 2. $(-\infty, 2]$ 3. 1 4. $(-\infty, 2]$
5. ①②③④⑤ 6. 4 7. $c > a > b$ 8. 2 或 $\frac{1}{2}$

【课堂考点探究】

- 例 1 (1)B (2)1 变式题 (1)D (2)D
例 2 (1)B (2)A 变式题 (1)B (2)D
例 3 (1)B (2)B
例 4 (1)C (2) $\left(1, \frac{8}{3}\right)$
例 5 (1)D (2) $(1, 2]$

应用演练

1. C 2. B 3. C 4. $\left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$
5. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

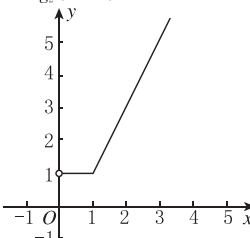
第 10 讲 函数的图像

【课前双基巩固】

知识聚焦

2. $f(x-a)$ $f(x)+b$ $-f(x)$ $f(-x)$
 $-f(-x)$ $\log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ $f(ax)$
 $af(x)$ $|f(x)|$ $f(|x|)$

对点演练

1. $y=0$ 2. $x=0$ 3. $y=x$ 4. ③
5. $y=(2x+3)^2$ 6. $y=\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$
7. $-\log_5(x-1)$
8. 

【课堂考点探究】

- 例 1 略
变式题 略
例 2 (1)D (2)A 例 3 (1)A (2)D
应用演练
1. D 2. D 3. C 4. D
例 4 B
例 5 (1)C (2)2 例 6 (1)C (2)5
例 7 (1) $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2]$ (2) $(3, +\infty)$

应用演练

1. B 2. A 3. A
4. $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) \cup \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 5. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

第 11 讲 函数与方程

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. $f(x)=0$ x 轴 零点 $f(a)f(b) < 0$
 $f(c)=0$ c
2. $(x_1, 0), (x_2, 0)$ $(x_1, 0)$ 2 1 0

对点演练

1. 1 2. 0 3. 0.1 4. $(-\infty, 4)$ 5. 0
6. 0.3 7. $(-8, 1]$ 8. $(0, 4)$

【课堂考点探究】

- 例 1 (1)B (2)2
变式题 (1)D (2)1
例 2 (1)B (2)B
变式题 (1)A (2)C
例 3 (1)C (2)C
变式题 (1)D (2) $(1, 3] \cup (4, +\infty)$

第 12 讲 函数模型及其应用

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. 递增 递增 递增 $\log_a x$ x^a a^x

对点演练

1. $y_3 > y_1 > y_2$ 2. 800 3. $S = \frac{800}{x} + \frac{x}{8}$
4. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 5. 4
6. $\sqrt{(1+a)(1+b)} - 1$ 7. $e^6 - 1$
8. $S = \begin{cases} 60t (0 \leq t \leq 2.5), \\ 150 (2.5 < t \leq 3.5), \\ 325 - 50t (3.5 < t \leq 6.5) \end{cases}$

【课堂考点探究】

例 1 A

变式题 (1)A (2)B

- 例 2 (1)400 吨 (2)该单位不能获利,需要国家每月至少补贴 40 000 元,才能使该单位不亏损.

- 变式题 (1) $v = \begin{cases} 2, 0 < x \leq 4, \\ -\frac{1}{8}x + \frac{5}{2}, 4 < x \leq 20. \end{cases}$

- (2)当养殖密度为 10 尾/立方米时,鱼的年生长量可以达到最大,最大值为 12.5 千克/立方米.
例 3 (1) $a = -1, b = 1$ (2)285 个单位

- 变式题 (1) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}$ (2)5 年

- 例 4 (1) $[1, 5.5]$ (2)300 台 (3)233 元/台

变式题 (1)24

- (2) $s = \begin{cases} \frac{3}{2}t^2, t \in [0, 10], \\ 30t - 150, t \in (10, 20], \\ -t^2 + 70t - 550, t \in (20, 35]. \end{cases}$
(3)在台风发生 30 h 后将侵袭到 N 城.

第 13 讲 变化率与导数、导数的运算

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. (2) $(x_0, f(x_0))$ 切线的斜率
 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
2. 0 ax^{a-1} $\cos x$ $-\sin x$ e^x $a^x \ln a$ $\frac{1}{x}$
 $\frac{1}{x \ln a}$
3. (1) $f'(x) \pm g'(x)$ (2) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
(3) $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

对点演练

1. 10 2. 6 3. 7 4. $y = -\frac{1}{e}$ 5. 3 4
6. $12x^2 - a^2$ 7. $y' = \frac{1-x \ln x}{xe^x}$ 8. -8

【课堂考点探究】

- 例 1 (1) $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
(2) $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$
(3) $y' = \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}$
(4) $y' = -\frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

- 变式题 (1)B (2) $-\frac{7}{4}$

例 2 (1)C (2)A

变式题 (1)A (2) $y = 3x$

例 3 (1)D (2)(e, 1)

变式题 (1)B (2)(1, 1)

例 4 (1) $1 + \ln 2$ (2)-2

变式题 (1)B (2)C

第 14 讲 导数与函数的单调性

【课前双基巩固】

知识聚焦

- 递增 递减 ≥ 0 ≤ 0

对点演练

1. (1, +∞) 2. $>$ 3. $(-\infty, 0)$
4. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 5. 增 6. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$
7. $a > 0$ $a = 0$ $a < 0$ 8. $(-\infty, 0), (0, 1)$

【课堂考点探究】

- 例 1 当 $a > -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, 1+a)$, 单调递减区间是 $(1+a, +\infty)$; 当 $a \leq -1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间.

- 变式题 (1)单调递增区间是 $(0, 1)$, 单调递减区间是 $(1, +\infty)$. (2)-1

- 例 2 (1)当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 有零点; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的零点为 $\pm \sqrt{-a}$. (2)略

- 变式题 (1) $f(x) = 3x^2 + \ln x + 4, x \in (0, +\infty)$. 证明略.

(2)略

例 3 (1) $y = x - 1$ (2) $(-\infty, e - 1]$

- 变式题 (1) $(-\infty, 2 \ln 2 - 2)$ (2) $\frac{1}{12} < k < \frac{1}{3}$

例 4 (1)C (2) $(0, +\infty)$

变式题 (1)A (2) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

第 15 讲 导数与函数的极值、最值

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. (1) $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$

- (2) $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$

2. (2) $f(a)$ $f(b)$ $f(a)$ $f(b)$

对点演练

1. -3 2. 16 3. $\ln x < x < e^x$ 4. $\frac{2}{27}a^3$
5. -7 6. 0 不存在 7. 1, 4 不存在
8. $[1, +\infty)$ $[-1, +\infty)$

【课堂考点探究】

例 1 (1)D (2)C

- 例 2 (1)极小值 $f(1) = -1$, 极大值 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$. (2) $[-2, -\sqrt{2})$

例 3 (1)1 (2)略

应用演练

1. C
2. 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值;
当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 处取得极小值 $\ln a$, 无极大值.

3. (1) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ (2)略

- 例 4 (1)若 $a > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $\left(\frac{a}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(0, \frac{a}{3}\right)$ 上单调递减;
若 $a = 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;
若 $a < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a}{3})$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{a}{3}, 0\right)$ 上单调递减.

- (2) $\left[\frac{8}{27}, 2\right)$

- 变式题 (1)当 $n \leq \frac{1}{e}$ 时, 最小值为 $f(n) = n \ln n$;

- 当 $m < \frac{1}{e} < n$ 时, 最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$;

- 当 $m \geq \frac{1}{e}$ 时, 最小值为 $f(m) = m \ln m$.

- (2) $\left(-\frac{3e^2 - 2e + 1}{e}, +\infty\right)$

- 例 5 (1) $L(x) = 10e^{10} \cdot \frac{x - 30 - a}{e^x} (35 \leq x \leq 41)$

- (2)理由略, 当 $2 \leq a \leq 4$ 时, 日售价为 35 元时, 日利润 $L(x)$ 最大; 当 $4 < a \leq 5$ 时, 日售价为 $(a + 31)$ 元时, 日利润 $L(x)$ 最大.

变式题 (1)17.5 升

- (2)当汽车以 80 千米/时的速度匀速行驶时, 从甲地到乙地耗油最少, 最少为 11.25 升.

破解难点优质课 (一) 导数与不等式

- 例 1 解: (1) 函数 $f(x) = ax - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

- 故 $f'(x) = a - \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- ①当 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数时,
 $f'(x) = a - \cos x \leq 0$ 恒成立, 即 $a \leq \cos x$ 恒成立,
又 $\because \cos x \in [0, 1], \therefore a \leq (\cos x)_{\min} = 0$;

- ②当 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数时,
 $f'(x) = a - \cos x \geq 0$ 恒成立, 即 $a \geq \cos x$ 恒成立,
又 $\because \cos x \in [0, 1], \therefore a \geq (\cos x)_{\max} = 1$.

- 综上所述, 若函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为单调函数, 则实数 a 的取值范围是 $a \leq 0$ 或 $a \geq 1$.

- (2) 证明: 要证 $f(x) \leq \frac{1}{6}x^3$, 只需证 $ax - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \leq 0$.

- 令 $g(x) = ax - \sin x - \frac{1}{6}x^3, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

- 则 $g'(x) = a - \cos x - \frac{1}{2}x^2$.

- 令 $h(x) = a - \cos x - \frac{1}{2}x^2, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $h'(x) = \sin x - x$.

- 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\sin x \leq x$,

- $\therefore h'(x) \leq 0$, 故 $h(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

- 又 $a \leq 1$,

- $\therefore h(x) \leq h(0) = a - 1 \leq 0$, 即 $g'(x) \leq 0$,

- $\therefore g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,

$\therefore g(x) \leq g(0) = 0$, 即 $ax - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \leq 0$, 故 $f(x) \leq \frac{1}{6}x^3$.

例 2 解: (1) 由题意知, 当 $a = e$ 时, $f(x) = x^2 - 2ex + e^2 + \frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x}$, 令 $x = e$, 得 $f(e) = 0$, 又 $f'(x) = 2x - 2e - \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 所以 $f'(e) = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y = 0$. (2) 证明: 当 $a \leq e$ 时, $-2ax^2 \geq -2ex^2$, 要证 $x^3 - 2ax^2 \geq \ln x - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)x$ 成立, 只需证 $x^3 - 2ex^2 \geq \ln x - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)x$ 成立, 即证 $x^3 - 2ex^2 \geq \frac{\ln x}{x} - \left(e^2 + \frac{1}{e}\right)$ 成立, 即证 $x^3 - 2ex + e^2 + \frac{1}{e} \geq \frac{\ln x}{x}$ 成立. 令 $g(x) = x^3 - 2ex + e^2 + \frac{1}{e} (x > 0)$, $h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$. 则 $g'(x) = 3x^2 - 2e$, 由 $g'(x) < 0$ 得 $0 < x < e$, 由 $g'(x) > 0$ 得 $x > e$, 故 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) \geq g(e) = \frac{1}{e}$. $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 由 $h'(x) > 0$ 得 $0 < x < e$, 由 $h'(x) < 0$ 得 $x > e$, 故 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 故 $h(x) \leq h(e) = \frac{1}{e}$, 所以 $g(x) \geq h(x)$ 成立, 故原不等式成立.

例 3 解: (1) 由 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} - 1 (x > 0)$, 得 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{ax - 1}{x^2}$. ① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 又 $f(1) = 0$, $\therefore f(x) \geq 0$ 不恒成立. ② 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a}$. (i) 当 $\frac{1}{a} > 1$, 即 $0 < a < 1$ 时, 可得 $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增, 要使得 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 只需 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = a \ln \frac{1}{a} + a - 1 = -a \ln a + a - 1 \geq 0$. 令 $h(a) = -a \ln a + a - 1 (0 < a < 1)$, 则 $h'(a) = -\ln a - 1 + 1 = -\ln a > 0$, $\therefore h(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 又 $h(1) = 0$, \therefore 当 $a \in (0, 1)$ 时, $h(a) < 0$ 恒成立, 不合题意. (ii) 当 $0 < \frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 又 $f(1) = 0$, $\therefore f(x) \geq 0$ 恒成立. 综上所述, 实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$. (2) $f(x) > g(x)$, 证明如下: 由 (1) 得当 a 取最小值时 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$. 当 $b \leq \frac{3}{2}$ 时, $g(x) \leq \frac{3}{2e^x} - 1$. 要证 $f(x) > g(x)$, 只需证 $\ln x + \frac{1}{x} - 1 > \frac{3}{2e^x} - 1$, 即证 $x \ln x + 1 > \frac{3x}{2e^x}$. 令 $p(x) = x \ln x + 1 (x > 0)$, 则 $p'(x) = \ln x + 1$. 由 $p'(x) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{e}$; 由 $p'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{e}$. $\therefore p(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增. 故 $p(x) \geq p\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{1}{e}$. 令 $q(x) = \frac{3x}{2e^x} (x > 0)$, 则 $q'(x) = \frac{3(1-x)}{2e^x}$.

由 $q'(x) > 0$, 解得 $0 < x < 1$; 由 $q'(x) < 0$, 解得 $x > 1$. $\therefore q(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 故 $q(x) \leq q(1) = \frac{3}{2e}$. 又 $1 - \frac{1}{e} - \frac{3}{2e} = \frac{2e-5}{2e} > 0$, $\therefore p(x) > q(x)$ 成立, $\therefore f(x) > g(x)$.

例 4 解: (1) 设切点为 $P(x_0, y_0)$, 由 $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$ 得 $f'(x) = e^x - x$, 所以 $f'(x_0) = e^{x_0} - x_0 = 1$. 令 $h(x) = e^x - x$, 则 $h'(x) = e^x - 1$. 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数; 当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数. 所以 $h(x)_{\min} = h(0) = 1$, 所以 $x_0 = 0$. 又 $y_0 = e^{x_0} - \frac{x_0^2}{2} - 1 = x_0 + a$, 所以 $a = 0$. (2) $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq bx$ 恒成立等价于 $e^x - \frac{x^2}{2} - 1 - bx \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立. 令 $g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1 - bx, x \in [0, +\infty)$, 则 $g'(x) = e^x - x - b$, 令 $h(x) = e^x - x - b$, 则 $h'(x) = e^x - 1$. 当 $x \geq 0$ 时, $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $h(x)_{\min} = h(0) = 1 - b$. ① 若 $b \leq 1$, 则当 $x \geq 0$ 时, $g'(x) \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 故当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g(x) \geq g(0) = 0$, 即 $e^x - \frac{x^2}{2} - 1 - bx \geq 0$ 恒成立, 满足题意. ② 若 $b > 1$, 则 $h(0) = 1 - b < 0$, $h(\ln 2b) = b - \ln b - \ln 2$. 令 $s(b) = b - \ln b - \ln 2$, 其中 $b > 1$, 则 $s'(b) = 1 - \frac{1}{b} > 0$, 所以 $s(b)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $s(b) > s(1) = 1 - \ln 2 > 0$, 又 $h(x)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的增函数, 故存在 $0 < x_0 < \ln 2b$, 使得 $h(x_0) = g'(x_0) = 0$, 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上为减函数, 故当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x) < g(0) = 0$, 不符合题意. 综上所述, 实数 b 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

变式题 解: (1) $f'(x) = xe^x - 2ax = x(e^x - 2a)$, 当 $a \leq \frac{e}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增. 当 $a > \frac{e}{2}$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2a$. 当 $x \in (1, \ln 2a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln 2a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(1, \ln 2a)$ 上单调递减; 在 $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增. (2) 令 $g(x) = (x-1)e^x - a(x^2-1) - \ln x$, 则原问题转化为 $g(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立. $g'(x) = xe^x - 2ax - \frac{1}{x} = x\left(e^x - 2a - \frac{1}{x^2}\right)$, 令 $h(x) = e^x - 2a - \frac{1}{x^2}$, 则 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = e - 2a - 1$. 当 $h(1) < 0$, 即 $a > \frac{e-1}{2}$ 时, $g'(1) = e - 2a - 1 < 0$, $g'[\ln(2a+1)] = \ln(2a+1) - \frac{1}{\ln(2a+1)}$, 因为 $2a+1 > e$, 所以 $\ln(2a+1) > 1$, 所以 $g'[\ln(2a+1)] > 0$, 所以存在 $x_0 \in (1, \ln(2a+1))$, 使得 $g'(x_0) = 0$, 且当 $x \in (1, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 此时 $g(x) < g(1) = 0$, 不满足题意. 当 $h(1) \geq 0$, 即 $a \leq \frac{e-1}{2}$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 满足题意. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{e-1}{2}\right]$.

破解难点优质课 (二) 导数与方程

例 1 证明: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 由函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - ax$, 得 $f'(x) =$

$\frac{1}{x} + x - a$, 则 $f'(1) = 2 - a$, 又 $f(1) = -\frac{1}{2} - a$, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - \left(-\frac{1}{2} - a\right) = (2 - a)(x - 1)$, 即 $y = (2 - a)x - \frac{3}{2}$, 当 $x = 0$ 时, $y = -\frac{3}{2}$, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线经过点 $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$. (2) ① 当 $a \leq 2$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} + x - a \geq 2 - a \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x)$ 有且仅有一个零点. ② 当 $a > 2$ 时, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} + x - a = 0$, 解得 $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下:

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

且 $f(x_1) = \ln x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - ax_1 = \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} - \frac{(a - \sqrt{a^2 - 4})^2 + 8}{8}$, 又 $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \frac{2}{a + \sqrt{a^2 - 4}} < 1$, 所以 $f(x_1) < 0$, 所以对任意 $x \in (0, x_2]$, $f(x) < 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在区间 $(0, x_2]$ 上无零点. 取 $x_0 = 2a + 1$, 则 $x_0 > e$, 故 $f(x_0) = \ln x_0 + \frac{1}{2}x_0(x_0 - 2a) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 (x_2, x_0) 上有唯一零点, 即 $f(x)$ 在区间 $(x_2, +\infty)$ 上有唯一零点, 故 $f(x)$ 有且仅有一个零点. 综上所述, 函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点.

例 2 解: (1) $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2a}{x^2} = \frac{x^2 - 2a}{x^3} (x > 0)$. 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$. 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{2a}$ (负值舍去). 当 $0 < x < \sqrt{2a}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \sqrt{2a}$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \sqrt{2a})$, 单调递增区间是 $(\sqrt{2a}, +\infty)$. 综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0, +\infty)$; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, \sqrt{2a})$, 单调递增区间是 $(\sqrt{2a}, +\infty)$. (2) ① 当 $a = 0$ 时, 令 $f(x) = \ln x = 0$, 得 $x = 1$. ② 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, $f(e^a) = a(e^{-2a} + 1) < 0$, $f(e^{-a}) = a(e^{2a} - 1) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 1 个零点. ③ 当 $a > 0$ 时, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{2a})$ 上是减函数, 在 $(\sqrt{2a}, +\infty)$ 上是增函数, 所以当 $x = \sqrt{2a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 也是最小值, 且 $f(\sqrt{2a}) = \frac{1}{2}(\ln 2a + 1)$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$. 当 $\frac{1}{2}(\ln 2a + 1) > 0$, 即 $a > \frac{1}{2e}$ 时, $f(x)$ 无零点; 当 $\frac{1}{2}(\ln 2a + 1) = 0$, 即 $a = \frac{1}{2e}$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点; 当 $\frac{1}{2}(\ln 2a + 1) < 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{2e}$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点. 综上所述, 当 $a > \frac{1}{2e}$ 时, $f(x)$ 无零点; 当 $a = \frac{1}{2e}$ 或 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 有 1 个零点; 当 $0 < a < \frac{1}{2e}$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点.

例 3 解: (1) 由题可知 $a \neq 0$, 所以函数 $f(x) = 2ax^2 - 2x + 1$ 的图像关于直线 $x = \frac{1}{2a}$ 对称. 因

为 $y=f(x+1)$ 是偶函数,
所以 $f(-x+1)=f(x+1)$, 故 $f(x)=2ax^2-2x+1$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称,

所以 $\frac{1}{2a}=1$, 即 $a=\frac{1}{2}$,

所以 $f(x)=x^2-2x+1$.

(2) 函数 $y=f(x)-\frac{m}{e^x}$ 有三个不同的零点, 等价于方程 $m=e^x f(x)$ 有三个不同实数根.

令 $g(x)=e^x f(x)$, 由 (1) 得 $g(x)=(x^2-2x+1)e^x$,

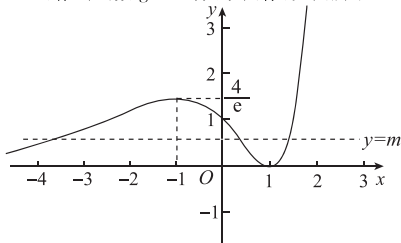
所以 $g'(x)=(x^2-1)e^x$. 令 $g'(x)=0$, 得 $x=-1$ 或 $x=1$.

当 $x<-1$ 时, $g'(x)>0$; 当 $-1<x<1$ 时, $g'(x)<0$; 当 $x>1$ 时, $g'(x)>0$.

故当 $x<-1$ 时, $g(x)$ 单调递增; 当 $-1<x<1$ 时, $g(x)$ 单调递减; 当 $x>1$ 时, $g(x)$ 单调递增.

所以当 $x=-1$ 时, $g(x)$ 取得极大值 $g(-1)=\frac{4}{e}$; 当 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得极小值 $g(1)=0$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 作出函数 $g(x)$ 的大致图像, 如图所示.



若方程 $m=e^x f(x)$ 有三个不同的实数根, 则函数 $g(x)$ 的图像与直线 $y=m$ 有三个不同的交点, 由图可知, 只需 $0 < m < \frac{4}{e}$, 故实数 m 的取值范围是 $(0, \frac{4}{e})$.

变式题 解: (1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x$ 的定义域为

$(0, +\infty)$, $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \sqrt{a}$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < \sqrt{a}$.

故 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 当 $a > 0$ 时, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增.

① 当 $\sqrt{a} \leq 1$, 即 $0 < a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增,

且 $f(1)=\frac{1}{2} > 0$, $f(e)=\frac{1}{2}e^2-a > 0$, 故 $f(x)$

在区间 $(1, e)$ 上无零点, 不满足题意.

② 当 $1 < \sqrt{a} < e$, 即 $1 < a < e^2$ 时, $f(x)$ 在 $(1, \sqrt{a})$

上单调递减, 在 (\sqrt{a}, e) 上单调递增,

则当 $x \in (1, e)$ 时, $f(x)_{\min} = f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a)$.

要使 $f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上恰有两个零点,

只需 $\begin{cases} f(1)=\frac{1}{2} > 0, \\ f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a(1-\ln a) < 0, \end{cases}$ 解得 $e < a < e^2$.

③ 当 $\sqrt{a} \geq e$, 即 $a \geq e^2$ 时, $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减,

且 $f(1)=\frac{1}{2} > 0$, $f(e)=\frac{1}{2}e^2-a < 0$, 故 $f(x)$

在区间 $(1, e)$ 上只有一个零点, 不满足题意.

综上, 当 $f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上恰有两个零点时, a 的取值范围是 $(e, \frac{1}{2}e^2)$.

例 4 解: (1) 函数 $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$,

所以 $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)=2e^4$, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)=-e^2$,

故函数 $f(x)$ 的图像在 $x=\frac{1}{e^2}$ 处的切线方程为

$y+e^2=2e^4\left(x-\frac{1}{e^2}\right)$,

整理得 $y=2e^4x-3e^2$,

即函数 $f(x)$ 的图像在 $x=\frac{1}{e^2}$ 处的切线方程为

$y=2e^4x-3e^2$.

(2) 当 $x > 1$ 时, 方程 $f(x)=a(x-1)+\frac{1}{x}$, 即

$\ln x - a(x^2 - x) = 0$,

令 $h(x) = \ln x - a(x^2 - x)$, 则 $h(1) = 0$,

$h'(x) = \frac{-2ax^2 + ax + 1}{x}$.

令 $r(x) = -2ax^2 + ax + 1$, $x \in (1, +\infty)$.

因为 $a > 0$, 所以 $r(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

① 当 $r(1)=1-a \leq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, $r(x) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x) < h(1)=0$, 方程 $f(x)=a(x-1)+\frac{1}{x}$ 无实根.

② 当 $r(1) > 0$, 即 $0 < a < 1$ 时, 存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得当 $x \in (1, x_0)$ 时, $r(x) > 0$, 即 $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $r(x) < 0$, 即 $h(x)$ 单调递减. 因此 $h(x)_{\max} = h(x_0) > h(1) = 0$,

取 $x=1+\frac{1}{a}$, 则 $h\left(1+\frac{1}{a}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)-a\left(1+\frac{1}{a}\right)^2+a\left(1+\frac{1}{a}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)-\left(1+\frac{1}{a}\right)$,

令 $t=1+\frac{1}{a}$ ($t > 2$), $s(t)=\ln t - t$,

则 $s'(t)=\frac{1}{t}-1$, $t > 2$, 所以 $s'(t) < 0$,

即 $s(t)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $s(t) < s(2)=\ln 2 - 2 < 0$.

故存在 $x_1 \in \left(x_0, 1+\frac{1}{a}\right)$, 使得 $h(x_1) = 0$.

综上, a 的取值范围为 $0 < a < 1$.

变式题 解: (1) 函数 $f(x)=(x-1)e^x-ax$, 则 $f'(x)=xe^x-a$,

由 $f'(0)=-1$, 得 $a=1$, 又 $f(0)=-1$, 所以切线方程为 $y-(-1)=-(x-0)$, 即 $x+y+1=0$, 所以 $b=1$.

(2) 证明: 令 $g(x)=f'(x)=xe^x-1$, 则 $g'(x)=(x+1)e^x$,

所以当 $x < -1$ 时, $g(x)$ 单调递减, 且此时 $g(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 内无零点.

当 $x \geq -1$ 时, $g(x)$ 单调递增, 又 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1 < 0$, $g(1)=e-1 > 0$,

所以 $g(x)=0$ 有唯一实数根 x_0 , 且 $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, 所以 $f(x)$ 有唯一极值点.

由 $g(x_0)=0$, 得 $x_0 e^{x_0}=1$, 即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$, 所以

$f(x_0)=\frac{x_0-1}{x_0}-x_0=1-\left(\frac{1}{x_0}+x_0\right)$,

又 $\frac{1}{2} < x_0 < 1$, 所以 $2 < \frac{1}{x_0}+x_0 < \frac{5}{2}$,

所以 $f(x_0) > -\frac{3}{2}$.

第三单元 三角函数、解三角形

第 16 讲 任意角、弧度制及任意角的三角函数

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. (1) 端点 (2) 正角 负角 象限角

(3) $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

2. (1) 半径长 (2) $|\alpha| r$

3. (1) y x (2) 余弦线 正弦线 正切线

对点演练

1. 三 2. $\left\{ \alpha \left| \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$

3. (1) $-\frac{2}{5}\pi$ (2) 75 4. 4π 5. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

6. $\left\{ \alpha \left| k\pi \leq \alpha \leq k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$

7. 三 8. 2 或 0 9. 40π

【课堂考点探究】

例 1 (1) D (2) C

变式题 (1) C (2) B

例 2 (1) D (2) C

变式题 (1) B (2) A

例 3 (1) A (2) B 例 4 (1) D (2) A

变式题 C

例 5 A

变式题 $\left\{ x \left| 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x < 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$

第 17 讲 同角三角函数的基本关系式与诱导公式

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$

2. $\sin \alpha$ $-\sin \alpha$ $\cos \alpha$ $-\cos \alpha$ $-\sin \alpha$ $\tan \alpha$ $-\tan \alpha$

(1) 同名 锐角 (2) 余弦(正弦) 锐角

对点演练

1. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 2. $-\frac{1}{5}$ 3. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\frac{\sqrt{6}-1}{4}$

5. $\pm \frac{5}{12}$ 6. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 7. $-\frac{2}{\sin \alpha}$ 8. $(-2, 2)$

【课堂考点探究】

例 1 (1) D (2) $\cos^2 \alpha$

变式题 (1) D (2) 0

例 2 (1) A (2) B 例 3 (1) A (2) D

例 4 (1) D (2) A

应用演练

1. B 2. -2 $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$ 4. $1-\sqrt{5}$

第 18 讲 三角函数的图像与性质

【课前双基巩固】

知识聚焦

1. (1) $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

(2) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

2. $[-1, 1]$ $[-1, 1]$ **R** 奇函数 偶函数

$\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$

$(k\pi, 0)$ $x=k\pi$

对点演练

1. π 2. $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ 3. 增函数

4. $\left\{ x \left| 2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$

5. $[2k\pi - \pi, 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$

6. $(-1, 1)$ 7. 1 8. $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$

【课堂考点探究】

例 1 (1) D (2) $\left\{ x \left| 2k\pi \leq x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$

变式题 (1) $\left\{ x \left| 2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$

(2) $\left\{ x \left| 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z} \right. \right\}$

例 2 (1) $\frac{49}{16}$ (2) $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

变式题 (1) B (2) $\left[-2-\sqrt{2}, \frac{17}{8}\right]$

例 3 (1) C (2) A

例 4 (1) B (2) 2

例 5 (1) A (2) B