教与学整体设计

全品作业本

QUANPIN ZUOYEBEN

主　　编：肖德好
本册主编：吴金辉
编　　者：吴金辉　庞志全　类成方　王康垣

高中数学
选修 4–4
新课标（RJA）

开明出版社

CONTENTS 目录

第一讲　坐标系

一　平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

基础巩固

❶若以点 B 为原点，建立直角坐标系，点 A 坐标为(3，4)，则以点 A 为原点，建立直角坐标系，点 B 坐标为（　　）

A. $(-3,-4)$　　B. $(-3,4)$

C. $(3,-4)$　　D. $(3,4)$

❷如图 1-1-1 所示是永州市几个主要景点示意图的一部分，如果用(0，1)表示九嶷山的中心位置点 C，用(−2，0)表示盘王殿的中心位置点 A，则千家峒的中心位置点 B 表示（　　）

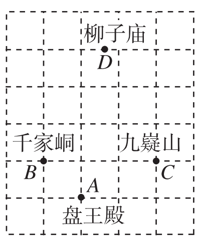


图 1-1-1

A. $(-3,1)$　　B. $(-1,-3)$

C. $(1,-3)$　　D. $(-3,-1)$

❸以点$(a_1,0)$，$(a_2,0)$为圆心的两圆均过点(1，0)，与 y 轴正半轴分别交于点$(0,y_1)$，$(0,y_2)$，且满足 $\ln y_1+\ln y_2=0$，则点$\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2}\right)$的轨迹是（　　）

A. 直线　　B. 圆

C. 椭圆　　D. 双曲线

❹如图 1-1-2 所示的曲线的方程是（　　）

A. $|x|-y=0$

B. $x-|y|=0$

C. $\frac{x}{|y|}-1=0$

D. $\frac{|x|}{y}-1=0$

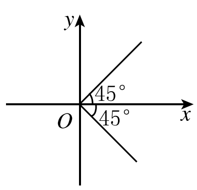


图 1-1-2

❺在相距 1400 m 的 A，B 两哨所，哨兵听到炮弹爆炸声的时间相差 3 s，已知声速是 340 m/s，则炮弹爆炸点所在的曲线是（　　）

A. 射线　　B. 椭圆

C. 双曲线　　D. 抛物线

❻在同一平面直角坐标系中能正确表示直线 $y=ax$ 与 $y=x+a$ 的是（　　）

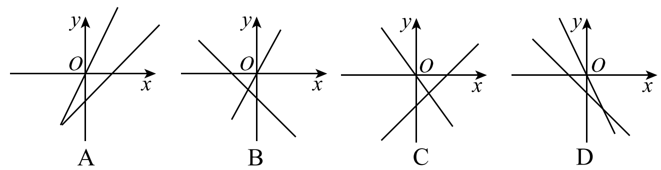


图 1-1-3

❼若 $A(1,2)$，$B(a,-2)$，$C(3,1-a)$三点共线，则 $a=$________.

❽在平面直角坐标系中，与点 $A(1,1)$的距离为 1，且与点 $B(-2,-3)$的距离为 6 的直线条数为________.

❾在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 $A(3,a)$，$B(3,b)$使$\angle AOB=45°$，其中 a，b 均为整数，且 $a>b$，则满足条件的数对(a,b)共有________组.

❿若$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(3,1)$，则$\triangle ABC$ 的形状为__________.

能力提升

⓫已知点 P 的坐标是$(\sqrt{2}+a,\sqrt{2}+b)$，a，b 都是有理数，PA，PB 分别是点 P 到 x 轴和 y 轴的垂线段，且矩形 $OAPB$(O 为坐标原点)的面积为$\sqrt{2}$，则点 P 可能出现在第几象限？

⑫ 在▱$ABCD$中，求证：$|AC|^2+|BD|^2=2(|AB|^2+|AD|^2)$.

⑬ 如图1-1-4所示，圆O_1与圆O_2的半径都是1，$|O_1O_2|=4$，过动点P分别作圆O_1、圆O_2的切线PM，PN(M，N为切点)，使得$|PM|=\sqrt{2}|PN|$，试建立适当的坐标系，并求动点P的轨迹方程.

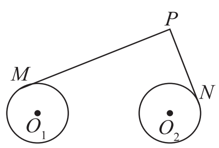


图1-1-4

难点突破

⑭ 由甲导弹驱逐舰、乙导弹驱逐舰、丙综合补给舰组成的护航编队奔赴某海域执行护航任务，对商船进行护航.某日，甲舰在乙舰正东方向6 km处，丙舰在乙舰北偏西30°方向，相距4 km处，某时刻甲舰发现商船的求救信号，由于乙、丙两舰比甲舰距商船远，因此4 s后乙、丙两舰才同时发现这一信号，此信号的传播速度为1 km/s，若甲舰赶赴救援，行进的方向角应是多少？

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

基础巩固

1. 将一个圆作伸缩变换后所得到的图形不可能是（　　）

A. 椭圆　　B. 比原来大的圆

C. 比原来小的圆　　D. 双曲线

2. 在同一平面直角坐标系中，圆 $x^2+y^2=1$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=5x,\\y'=4y\end{cases}$ 后得到的图形是（　　）

A. 焦点在 x 轴，长轴长为 5 的椭圆

B. 焦点在 y 轴，长轴长为 10 的椭圆

C. 焦点在 y 轴，长轴长为 5 的椭圆

D. 焦点在 x 轴，长轴长为 10 的椭圆

3. 将曲线 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 按照伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$ 变换后的曲线对应的函数的最小正周期与最大值分别为（　　）

A. $\pi,\frac{2}{3}$　　B. $4\pi,\frac{3}{2}$

C. $2\pi,3$　　D. $4\pi,6$

4. 在平面直角坐标系中，抛物线 $x^2=-3y$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$ 后得到的曲线方程是（　　）

A. $y'^2=-4x'$　　B. $x'^2=-4y'$

C. $y'^2=-\frac{9}{4}x'$　　D. $x'^2=-\frac{9}{4}y'$

5. 已知四边形 $ABCD$ 的顶点分别为 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(-1,1)$，四边形 $ABCD$ 在伸缩变换 $\begin{cases}x'=ax,\\y'=y\end{cases}$ $(a>0)$ 的作用下变成正方形，则 a 的值为（　　）

A. 1　　B. 2

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 在伸缩变换 $\varphi:\begin{cases}x'=2x,\\y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$ 的作用下，点 $P(1,-2)$ 变换为点 P'，则 P' 的坐标为________.

7. 将曲线 C 按伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$ 变换后所得曲线的方程为 $x'^2+y'^2=1$，则曲线 C 的方程为____________.

8. 若点 $P(-2016,2017)$ 经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{x}{2017},\\y'=\frac{y}{2016}\end{cases}$ 后的点在曲线 $x'y'=k$ 上，则 $k=$________.

9. 在同一平面直角坐标系中，直线 $x-2y=2$ 变成直线 $2x'-y'=4$，则满足上述图形变换的伸缩变换是__________.

10. 在同一平面直角坐标系中，将曲线 $x^2-36y^2-8x+12=0$ 变成曲线 $x'^2-y'^2-4x'+3=0$，则满足上述图形变换的伸缩变换是__________.

能力提升

11. 在平面直角坐标系中，求下列方程所对应的图形经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$ 后的图形.

(1) $y^2=2x$；

(2) $x^2+y^2=1$.

⑫在同一平面直角坐标系中，求一个伸缩变换使其满足下列曲线的变换，并叙述变换过程.

(1)曲线 $y=2\sin\dfrac{x}{4}$变换为曲线 $y=\sin 2x$；

(2)圆 $x^2+y^2=1$ 变换为椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

⑬在同一平面直角坐标系中，已知伸缩变换 φ：$\begin{cases}x'=3x,\\2y'=y.\end{cases}$

(1)求点 $A\left(\dfrac{1}{3},-2\right)$经过变换 φ 后所得点 A'的坐标；

(2)点 B 经过变换 φ 后得到点 $B'\left(-3,\dfrac{1}{2}\right)$，求点 B 的坐标；

(3)求直线 l：$y=6x$ 经过变换 φ 后所得直线 l'的方程；

(4)求双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{64}=1$ 经过变换 φ 后所得曲线 C'的焦点坐标.

难点突破

⑭(1)在平面直角坐标系中，求下列方程所对应的图形经过伸缩变换$\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\y'=\dfrac{1}{3}y\end{cases}$后的图形.

①$5x+2y=0$；②$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

(2)已知伸缩变换的坐标表达式为$\begin{cases}x'=x,\\y'=4y,\end{cases}$曲线 C 在此变换下变为椭圆 $x'^2+\dfrac{y'^2}{16}=1$，求曲线 C 的方程.

二　极坐标系

1. 极坐标系的概念

基础巩固

1. 已知点 M 的极坐标为 $\left(-5,\frac{\pi}{3}\right)$，下列所给出的四个极坐标中不能表示点 M 的是　　(　　)

A. $\left(5,-\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(5,\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $\left(5,-\frac{2\pi}{3}\right)$　　D. $\left(-5,-\frac{5\pi}{3}\right)$

2. 在极坐标系中，极坐标 $\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$ 表示的极角是　　(　　)

A. $\frac{4\pi}{3}$　　B. $-\frac{4\pi}{3}$

C. $\frac{7\pi}{3}$　　D. $\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$

3. 在极坐标系中，点 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $B\left(3,-\frac{\pi}{6}\right)$ 之间的距离为　　(　　)

A. 3　　B. 6

C. $3\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

4. 在极坐标系中，点 $M\left(3,\frac{\pi}{12}\right)$ 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ 对称的点的一个极坐标是　　(　　)

A. $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(3,\frac{5\pi}{12}\right)$　　D. $\left(3,\frac{7\pi}{12}\right)$

5. 极坐标为 $(3,4)$ 的点到极点的距离为　　(　　)

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. $3\sin 4$

6. 在极坐标系中，直线 l 过点 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，则直线 l 与极轴夹角的大小为　　(　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

7. 在极坐标系中，已知点 $P\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$，$Q\left(2,\frac{2}{3}\pi\right)$，则线段 PQ 的中点 M 的极坐标为　　(　　)

A. $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{3}\right)$

C. $\left(2,\frac{5\pi}{12}\right)$　　D. $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right)$

8. 已知极坐标系中，点 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，$B\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，若 O 为极点，则 $\triangle OAB$ 为　　(　　)

A. 等边三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰锐角三角形　　D. 等腰直角三角形

9. 已知点 $A\left(3,\frac{4\pi}{3}\right)$，则分别满足 $\rho>0,-\pi<\theta\leqslant\pi$ 与 $\rho<0,0<\theta\leqslant2\pi$ 的点 A 的极坐标为__________.

10. 在极轴上，与点 $A\left(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 的距离为 5 的点 M 的极坐标为__________.

11. 在极坐标系中，点 A 的极坐标是 $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$，则：

(1)点 A 关于极轴对称的点的极坐标是________；

(2)点 A 关于极点对称的点的极坐标是________；

(3)点 A 关于直线 $l:\theta=\frac{\pi}{2}(\rho\in\mathbf{R})$ 对称的点的极坐标是________.（规定 $\rho>0,\theta\in[0,2\pi)$）

能力提升

12. 在极坐标系中，分别求下列条件下点 $M\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$ 关于极轴的对称点 M' 的极坐标.

(1) $\rho\geqslant0,\theta\in[0,2\pi)$；

(2) $\rho\geqslant0,\theta\in\mathbf{R}$.

⑬ 在极坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的极坐标分别为 $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$B(2,\pi)$，$C\left(2,\frac{5\pi}{3}\right)$.

(1)判断 $\triangle ABC$ 的形状；

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

难点突破

⑭ 已知极坐标系中，定点 $P\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$.

(1)将极点 O 移至 $O'\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$处，极轴方向不变，求点 P 的新坐标；

(2)极点 O 不变，将极轴顺时针转动 $\frac{\pi}{6}$ 角，求点 P 的新坐标.

2. 极坐标和直角坐标的互化

基础巩固

1. 已知点 $P(1,-\sqrt{3})$，则它的极坐标是　　(　　)

A. $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$

C. $\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $\left(2,-\frac{4\pi}{3}\right)$

2. 将极坐标 $\left(2,\frac{3\pi}{2}\right)$ 化成直角坐标为　　(　　)

A. $(0,-2)$

B. $(0,2)$

C. $(2,0)$

D. $(-2,0)$

3. 已知 A，B 两点的极坐标分别为 $\left(6,\frac{\pi}{3}\right)$ 和 $\left(8,\frac{4\pi}{3}\right)$，则线段 AB 中点的直角坐标为　　(　　)

A. $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

D. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

4. 在符合互化条件的直角坐标系和极坐标系中，直线 l：$kx+y+2=0$ 与曲线 C：$\rho=2\cos\theta$ 相交，则 k 的取值范围是　　(　　)

A. $k<-\frac{3}{4}$　　B. $k\geqslant-\frac{3}{4}$

C. $k\in\mathbf{R}$　　D. $k\in\mathbf{R}$，但 $k\neq0$

5. 在极坐标系中，O 为极点，点 A 为曲线 l：$\rho\sin\theta=\rho\cos\theta+2$ 上一点，则 $|OA|$ 的最小值为________.

6. 极坐标为 $(1,1)$ 的点在直角坐标系中的第________象限.

7. 将向量 $\overrightarrow{OM}=(-1,\sqrt{3})$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 得到向量的直角坐标为________.

8. 在极坐标系中，已知 $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$，则 A，B 两点间的距离为________.

9. 已知点 M 的极坐标为 $(5,\theta)$，且 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，则点 M 的直角坐标为________.

10. 在极坐标系中，已知 A，B 两点的极坐标分别为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$，以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴建立直角坐标系，则直线 AB 的斜率为________.

能力提升

11. 在极坐标系中，已知两点 $A\left(2,\frac{3\pi}{4}\right)$，$B\left(6,\frac{5}{4}\pi\right)$，求直线 AB 与极轴所在直线的交点坐标.

12. 在极坐标系中，已知三点 $M\left(2,\frac{5}{3}\pi\right)$，$N(2,0)$，$P\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)将 M，N，P 三点的极坐标化为直角坐标；

(2)判断 M，N，P 三点是否在同一条直线上.

⑬ 在极坐标系中，已知点 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，$B\left(4\sqrt{3},\frac{7\pi}{6}\right)$.

(1)求 $|AB|$ 的值；

(2)求 $\triangle AOB$ 的面积（O 为极点）.

难点突破

⑭ 已知点 M 的极坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$，极点 O' 在直角坐标系 xOy 中的直角坐标为 $(2,3)$，极轴平行于 x 轴，极轴的方向与 x 轴的正方向相同，两坐标系的长度单位相同，求点 M 的直角坐标.

三　简单曲线的极坐标方程

1. 圆的极坐标方程

2. 直线的极坐标方程

基础巩固

❶ 极坐标方程分别是 $\rho=\cos\theta$ 和 $\rho=\sin\theta$ 的两个圆的圆心距是　　(　　)

A. 2　　B. $\sqrt{2}$

C. 1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

❷ 极坐标方程 $(\rho-1)(\theta-\pi)=0(\rho\geqslant0)$ 表示的图形是　　(　　)

A. 两个圆

B. 一个圆和一条直线

C. 一个圆和一条射线

D. 一条直线和一条射线

❸ 在极坐标系中，曲线 $\rho=4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 关于　　(　　)

A. 直线 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$ 对称

B. 直线 $\theta=\frac{5\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$ 对称

C. 点 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ 对称

D. 极点对称

❹ 在极坐标系中，曲线 C_1：$\rho=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ 上恰有 3 个不同的点到直线 C_2：$\sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta=m$ 的距离等于 1，则 $m=$　　(　　)

A. 2　　B. 2 或 6

C. -6　　D. -2 或 -6

❺ 已知曲线 C_1，C_2 的极坐标方程分别为 $\rho\cos\theta=3$，$\rho=4\cos\theta\left(\rho\geqslant0,0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为________.

❻ 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的方程为 $2x-y+1=0$，在以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中，圆 C 的方程为 $\rho=2\sin\theta$，则直线 l 与圆 C 的位置关系为________.

❼ 在极坐标系中，点 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ 到直线 $\rho\cos\theta=2$ 的距离为________.

❽ 极坐标方程 $\rho^2\sin\theta-\rho=0$ 化成直角坐标方程是________.

❾ 在极坐标系中，点 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ 关于直线 l：$\rho\cos\theta=1$ 对称的点的一个极坐标为________.

❿ [2018·北京卷] 在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=a$ $(a>0)$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相切，则 $a=$________.

能力提升

⓫ 过极点 O 作圆 C：$\rho=8\cos\theta$ 的弦 ON，求 ON 的中点 M 的轨迹方程.

⓬ 在极坐标系中，圆 C 的方程为 $\rho=2\cos\theta$，以极点 O 为原点，极轴为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系.

(1)求圆 C 在直角坐标系下的标准方程；

(2)直线 l 的极坐标方程是 $2\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=6\sqrt{3}$，射线 OM：$\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\geqslant0)$ 与圆 C 的交点为 O,P，与直线 l 的交点为 Q，求线段 PQ 的长.

13 [2018·全国卷Ⅰ] 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.

(1)求 C_2 的直角坐标方程；

(2)若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点，求 C_1 的方程.

难点突破

14 在以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=\sin\theta$.

(1)求曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)过原点 O 且倾斜角为 $\alpha\left(\frac{\pi}{6}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$ 的射线 l 与曲线 C_1，C_2 分别相交于 A，B 两点（A，B 异于原点），求 $|OA|\cdot|OB|$ 的取值范围.

四　柱坐标系与球坐标系简介

1. 柱坐标系

2. 球坐标系

基础巩固

❶要刻画绕地球运转的某气象卫星的位置,最好运用 (　　)

A. 极坐标系

B. 空间直角坐标系

C. 柱坐标系

D. 球坐标系

❷在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,下列柱坐标对应的点在平面 yOz 内的是 (　　)

A. $\left(1,\frac{\pi}{2},2\right)$　　B. $\left(2,\frac{\pi}{3},0\right)$

C. $\left(3,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $\left(3,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$

❸点 M 的直角坐标为$(\sqrt{3},1,-2)$,则它的柱坐标为 (　　)

A. $\left(2,\frac{\pi}{6},2\right)$　　B. $\left(2,\frac{\pi}{3},2\right)$

C. $\left(2,\frac{\pi}{6},-2\right)$　　D. $\left(2,-\frac{\pi}{6},-2\right)$

❹已知点 M 的球坐标为$\left(4,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,则点 M 到 Oz 轴的距离为 (　　)

A. $2\sqrt{2}$　B. $\sqrt{2}$　C. 2　D. 4

❺在球坐标系中,点 $P\left(3,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$和点 $Q\left(3,\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right)$之间的距离为 (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

❻已知一个点的球坐标为$\left(2,\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right)$,则它的高低角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

❼在球坐标系中,方程 $r=2$ 表示的曲面是 (　　)

A. 球面　　B. 圆柱面

C. 圆锥面　　D. 半球面

❽若点 B 的直角坐标是$(1,-1,\sqrt{6})$,则它的球坐标是________.

❾在柱坐标系中,已知点 M 的柱坐标为$\left(2,\frac{2\pi}{3},\sqrt{5}\right)$,且点 M 在坐标轴 Oy 上的射影为 N,则$|MN|=$________.

❿在柱坐标系中,已知 $A\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)$,$B\left(1,\frac{\pi}{2},2\right)$及 $O(0,0,0)$三点,则$\triangle ABO$的面积为________.

能力提升

⓫如图 1-4-1 所示,在柱坐标系中,长方体 $OABC$-$O_1A_1B_1C_1$ 的两个顶点的坐标为 $A_1(2,0,3)$,$C\left(4,\frac{\pi}{2},0\right)$,求此长方体的外接球的表面积.

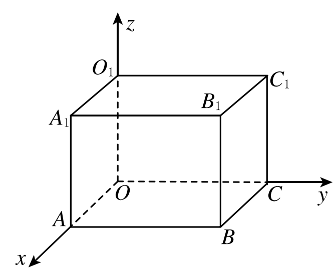


图 1-4-1

⑫ 已知点 P_1 的球坐标是 $\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right)$，点 P_2 的柱坐标为 $\left(\sqrt{5},\frac{\pi}{3},1\right)$，求 $|P_1P_2|^2$.

⑬ 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，如图 1-4-2 所示，建立空间直角坐标系 $Axyz$，求点 C_1 的直角坐标、柱坐标以及球坐标.

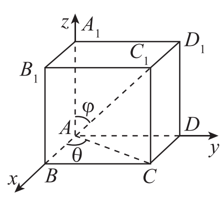


图 1-4-2

难点突破

⑭ 在柱坐标系中，求满足 $\begin{cases}\rho=1,\\0\leqslant\theta<2\pi,\\0\leqslant z\leqslant 2\end{cases}$ 的动点 $M(\rho,\theta,z)$ 围成的几何体的体积.

滚动习题(一) [范围　第一讲]

(时间:40 分钟　分值:100 分)

一、选择题(本大题共 7 小题,每小题 5 分,共 35 分)

❶点 P 对应的复数为 $-3+3i$,以原点为极点,实轴正半轴为极轴建立极坐标系,则点 P 的极坐标为 (　　)

A. $\left(3\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi\right)$　　B. $\left(-3\sqrt{2},\frac{5}{4}\pi\right)$

C. $\left(3,\frac{5}{4}\pi\right)$　　D. $\left(-3,\frac{3}{4}\pi\right)$

❷可以将椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{8}=1$ 变为圆 $x^2+y^2=4$ 的伸缩变换是 (　　)

A. $\begin{cases}5x'=2x,\\ \sqrt{2}y'=y\end{cases}$　　B. $\begin{cases}\sqrt{2}x'=\sqrt{5}x,\\ y'=\sqrt{2}y\end{cases}$

C. $\begin{cases}\sqrt{2}x'=x,\\ \sqrt{5}y'=\sqrt{2}y\end{cases}$　　D. $\begin{cases}\sqrt{5}x'=\sqrt{2}x,\\ \sqrt{2}y'=y\end{cases}$

❸如图 G1-1 所示,极坐标方程 $\rho=a\sin\theta(a>0)$ 所表示的曲线是 (　　)

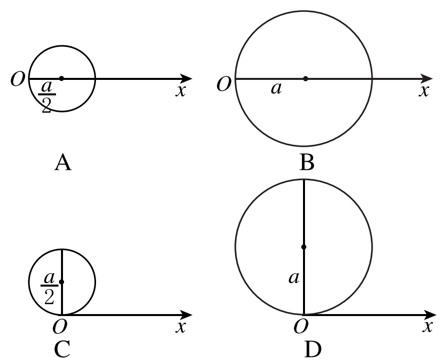


图 G1-1

❹在极坐标系中,动点 $M(1,\theta)(\theta\in[0,\pi])$ 的轨迹是 (　　)

A. 点　　B. 直线

C. 圆　　D. 半圆

❺极坐标方程 $\rho^2\sin 2\theta=2$ 表示的曲线是 (　　)

A. 圆

B. 椭圆

C. 双曲线

D. 抛物线

❻极坐标方程 $\rho^2=\frac{12}{3\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$ 所表示的曲线经过直角坐标系下的伸缩变换 $\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\ y'=\frac{\sqrt{3}}{3}y\end{cases}$ 后,得到的曲线是 (　　)

A. 直线　　B. 椭圆

C. 双曲线　　D. 圆

❼在极坐标系中,圆 $\rho=8\sin\theta$ 上的点到直线 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$ 距离的最大值是 (　　)

A. -4　　B. -7

C. 1　　D. 6

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

❽设点 M 的柱坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{5}{4}\pi,\sqrt{2}\right)$,则它的球坐标为__________.

❾在极坐标系中,以 $\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心,以 a 为半径的圆的极坐标方程为__________.

❿直线 $2x+3y-1=0$ 经过伸缩变换可以化为 $6x'+6y'-1=0$,则坐标变换公式是__________.

⓫在极坐标系中,圆 $C:\rho=2\sin\theta$ 的圆心到点 $(1,0)$ 的距离为________.

三、解答题(本大题共 3 小题,每小题 15 分,共 45 分)

⓬在极坐标系中,已知圆 C 经过点 $P\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$,圆心为直线 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 与极轴的交点,求圆 C 的极坐标方程.

⑬ 在极坐标系中，已知圆 $C:\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ 和直线 $l:\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ 相交于 A,B 两点，求线段 AB 的长.

⑭ 在极坐标系中，已知圆 C 的圆心 $C\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$，半径 $r=3$.

(1)求圆 C 的极坐标方程；

(2)若 Q 点在圆 C 上运动，O 为极点，P 在线段 OQ 的延长线上，且 $\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{QP}$，求动点 P 的轨迹方程.

参考答案

第一讲　坐标系

一　平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

1. A ［解析］当以点 B 为原点时，点 A 在点 B 的右上方，所以当以点 A 为原点时，点 B 在点 A 的左下方，在第三象限，故选 A.

2. A ［解析］根据题意建立平面直角坐标系(图略)，由坐标系可知，千家峒的中心位置点 B 表示$(-3,1)$.

3. A ［解析］因为 $r_1=|1-a_1|=\sqrt{a_1^2+y_1^2}$，所以 $y_1^2=1-2a_1$. 同理，$y_2^2=1-2a_2$.
又因为 $\ln y_1+\ln y_2=0$，所以 $y_1y_2=1$，
则$(1-2a_1)(1-2a_2)=1$，即 $2a_1a_2=a_1+a_2\Rightarrow\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=2$.
设$\begin{cases}x=\frac{1}{a_1},\\y=\frac{1}{a_2},\end{cases}$则 $x+y=2$，又 $y_1^2=1-2a_1>0$，则 $a_1<\frac{1}{2}$，所以 $x<0$ 或 $x>2$，故所求轨迹为直线 $x+y=2$ 的一部分. 故选 A.

4. B ［解析］由题图知，一个 x 值对应两个 y 值，且 y 值可以为 0，故选 B.

5. C ［解析］炮弹爆炸点到 A,B 两哨所的距离差为 $3\times340=1020(\mathrm{m})$，若以 A,B 两点所在直线为 x 轴，线段 AB 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系，则由双曲线的定义知，炮弹爆炸点在双曲线$\frac{x^2}{510^2}-\frac{y^2}{700^2-510^2}=1$ 上.

6. C ［解析］当 $a>0$ 时，由 $y=ax$ 可知 C，D 错误，由 $y=x+a$ 可知A，B也错误；当 $a<0$ 时，由 $y=ax$ 可知 A，B 错误，由 $y=x+a$ 可知 D 错误，C 正确.

7. -3 ［解析］依题意，得$\overrightarrow{AB}=(a-1,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1-a)$. 由 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，得$(a-1)(-1-a)=(-4)\times2$，所以 $a^2=9$，解得 $a=\pm3$. 经检验知 $a=-3$ 满足题意.

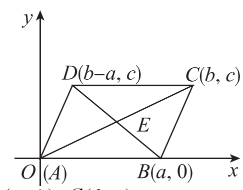
8. 1 ［解析］分别以点 $A(1,1)$，点 $B(-2,-3)$为圆心，半径分别为 1，6 的圆为$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，$(x+2)^2+(y+3)^2=36$. 而 $|AB|=\sqrt{3^2+4^2}=5=6-1$，∴上述两圆内切.
因此满足条件的直线有且只有 1 条，为两圆的外公切线.

9. 6 ［解析］设$\angle AOx=\alpha$，$\angle BOx=\beta$，则 $\tan\alpha=\frac{a}{3}$，$\tan\beta=\frac{b}{3}$.
由 $a>b$，得 $1=\tan45^\circ=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{3(a-b)}{9+ab}$，
整理得$(a+3)(b-3)=-18$.
因为 $a>b$，且 a,b 均为整数，所以$(a+3,b-3)=(18,-1)$，$(9,-2)$，$(6,-3)$，$(3,-6)$，$(2,-9)$，$(1,-18)$.
故满足条件的数对(a,b)共有 6 组.

10. 等腰三角形 ［解析］∵$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$，
$|BC|=\sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$，
$|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$，
∴$|BC|=|AC|\neq|AB|$，∴$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

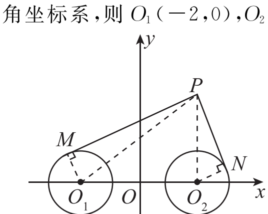
11. **解：**由题意得$(\sqrt{2}+a)(\sqrt{2}+b)=\sqrt{2}$①
或$(\sqrt{2}+a)(\sqrt{2}+b)=-\sqrt{2}$②，
由①得$(ab+2)+(a+b-1)\sqrt{2}=0$，因为 a,b 都是有理数，所以$\begin{cases}ab+2=0,\\a+b-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$
同理，由②得$\begin{cases}a=-2,\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$
所以点 P 的坐标为$(\sqrt{2}+2,\sqrt{2}-1)$或$(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+2)$或$(\sqrt{2}-2,\sqrt{2}+1)$或$(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}-2)$，点 P 可能出现在第一、二、四象限.

12. **证明：**如图，以 A 为坐标原点 O，AB 所在的直线为 x 轴，建立平面直角坐标系 xOy，



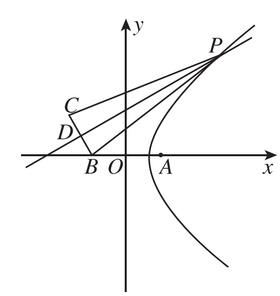
则 $A(0,0)$，设 $B(a,0)$，$C(b,c)$，
则 AC 的中点 $E\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$，由对称性知 $D(b-a,c)$，
所以$|AB|^2=a^2$，$|AD|^2=(b-a)^2+c^2$，
$|AC|^2=b^2+c^2$，$|BD|^2=(b-2a)^2+c^2$，
所以$|AC|^2+|BD|^2=4a^2+2b^2+2c^2-4ab=2(2a^2+b^2+c^2-2ab)$，
$|AB|^2+|AD|^2=2a^2+b^2+c^2-2ab$，
所以$|AC|^2+|BD|^2=2(|AB|^2+|AD|^2)$.

13. **解：**以 O_1O_2 的中点 O 为原点，O_1O_2 所在的直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，则 $O_1(-2,0)$，$O_2(2,0)$.



由已知$|PM|=\sqrt{2}|PN|$，得$|PM|^2=2|PN|^2$.
因为两圆的半径均为 1，所以$|PO_1|^2-1=2(|PO_2|^2-1)$，
设 $P(x,y)$，则$(x+2)^2+y^2-1=2[(x-2)^2+y^2-1]$，
即$(x-6)^2+y^2=33$，所以点 P 的轨迹方程为$(x-6)^2+y^2=33$(或 $x^2+y^2-12x+3=0$).

14. **解：**设 A,B,C,P 分别表示甲舰、乙舰、丙舰和商船. 如图所示，



以直线 AB 为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，则 $A(3,0)$，$B(-3,0)$，$C(-5,2\sqrt{3})$.
∵$|PB|=|PC|$，∴点 P 在线段 BC 的垂直平分线上.
又易知 $k_{BC}=-\sqrt{3}$，线段 BC 的中点 $D(-4,\sqrt{3})$，
∴直线 PD 的方程为 $y-\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+4)$. ①
又$|PB|-|PA|=4$，
∴点 P 在以 A,B 为焦点的双曲线的右支上，
∴双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x\geqslant2)$. ②
联立①②，得点 P 坐标为$(8,5\sqrt{3})$，
∴$k_{PA}=\frac{5\sqrt{3}}{8-3}=\sqrt{3}$，因此甲舰行进的方向角为北偏东 30°.

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

1. D ［解析］由伸缩变换的意义可得.

2. D ［解析］由$\begin{cases}x'=5x,\\y'=4y,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{x'}{5},\\y=\frac{y'}{4},\end{cases}$将其代入方程 $x^2+y^2=1$

中，得$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{16}=1$，它表示焦点在$x$轴，长轴长为10的椭圆.故选D.

3. D ［解析］由伸缩变换φ：$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{x'}{2},\\y=\frac{y'}{3},\end{cases}$代入曲线方程$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，得$\frac{y'}{3}=2\sin\left(\frac{x'}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$，即$y'=6\sin\left(\frac{x'}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$，所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，最大值为6.故选D.

4. D ［解析］由$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=\frac{1}{3}y,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2x',\\y=3y',\end{cases}$将其代入$x^2=-3y$，得$(2x')^2=-3\times(3y')$，即$x'^2=-\frac{9}{4}y'$.

5. C ［解析］将点$A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(-1,1)$分别代入$\begin{cases}x'=ax,\\y'=y,\end{cases}$得到经过变换后的点的坐标是$A'(-a,0)$，$B'(a,0)$，$C'(a,1)$，$D'(-a,1)$，此时易知，四边形$A'B'C'D'$是正方形.由$|A'B'|=|A'D'|$且$a>0$，得$2a=1$，则$a=\frac{1}{2}$.

6. $(2,-1)$ ［解析］根据平面直角坐标系中的伸缩变换公式，$\because x=1,y=-2,\therefore x'=2x=2,y'=\frac{1}{2}y=-1,\therefore P'(2,-1)$.

7. $4x^2+9y^2=1$ ［解析］设曲线C上任意一点为(x,y)，与之对应的曲线$x'^2+y'^2=1$上的点为(x',y')，
将$\begin{cases}x'=2x,\\y'=3y\end{cases}$代入曲线方程$x'^2+y'^2=1$，得$4x^2+9y^2=1$.

8. -1 ［解析］$P(-2016,2017)$经过伸缩变换后得$\begin{cases}x'=\frac{-2016}{2017},\\y'=\frac{2017}{2016},\end{cases}$代入$x'y'=k$，得$k=x'y'=-1$.

9. $\begin{cases}x'=x,\\y'=4y\end{cases}$ ［解析］设伸缩变换为$\begin{cases}x'=\lambda x,\\y'=\mu y,\end{cases}$其中$\lambda>0,\mu>0$，
将其代入$2x'-y'=4$，得$2\lambda x-\mu y=4$，
与$x-2y=2$比较系数可得$\lambda=1,\mu=4$，
故所求的伸缩变换为$\begin{cases}x'=x,\\y'=4y.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x'=\frac{x}{2},\\y'=3y\end{cases}$ ［解析］$x^2-36y^2-8x+12=0$可化为
$\left(\frac{x-4}{2}\right)^2-9y^2=1$.①
$x'^2-y'^2-4x'+3=0$可化为$(x'-2)^2-y'^2=1$.②
比较①②，可得$\begin{cases}x'-2=\frac{x-4}{2},\\y'=3y,\end{cases}$即$\begin{cases}x'=\frac{x}{2},\\y'=3y.\end{cases}$

11. **解**：(1)由伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$可知$\begin{cases}x=3x',\\y=2y',\end{cases}$
将$\begin{cases}x=3x',\\y=2y'\end{cases}$代入$y^2=2x$，可得$4y'^2=6x'$，即$y'^2=\frac{3}{2}x'$.
故经过伸缩变换之后的图形还是抛物线.
(2)将$\begin{cases}x=3x',\\y=2y'\end{cases}$代入$x^2+y^2=1$，
得$(3x')^2+(2y')^2=1$，即$\frac{x'^2}{\frac{1}{9}}+\frac{y'^2}{\frac{1}{4}}=1$.
故经过伸缩变换后的图形为焦点在y轴上的椭圆.

12. **解**：(1)将变换后的曲线方程$y=\sin 2x$改写为$y'=\sin 2x'$，
设伸缩变换为$\begin{cases}x'=\lambda x(\lambda>0),\\y'=\mu y(\mu>0),\end{cases}$
代入$y'=\sin 2x'$得$\mu y=\sin 2\lambda x$，即$y=\frac{1}{\mu}\sin 2\lambda x$，
与原曲线方程比较系数得$\begin{cases}2\lambda=\frac{1}{4},\\\frac{1}{\mu}=2,\end{cases}$
所以$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{8},\\\mu=\frac{1}{2},\end{cases}$所以伸缩变换为$\begin{cases}x'=\frac{1}{8}x,\\y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$
变换过程为：先使曲线$y=2\sin\frac{x}{4}$上的点的纵坐标不变，
将曲线上的点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{8}$，
得到曲线$y=2\sin\left[\frac{1}{4}\times(8x)\right]=2\sin 2x$，再将该曲线上点的纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，得到曲线$y=\sin 2x$.
(2)将变换后的椭圆方程$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$改写为$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$，设伸缩变换为$\begin{cases}x'=\lambda x(\lambda>0),\\y'=\mu y(\mu>0),\end{cases}$代入$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$得$\frac{\lambda^2x^2}{9}+\frac{\mu^2y^2}{4}=1$，即$\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2x^2+\left(\frac{\mu}{2}\right)^2y^2=1$，与$x^2+y^2=1$比较系数得$\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2=1,\\\left(\frac{\mu}{2}\right)^2=1,\end{cases}$所以$\begin{cases}\lambda=3,\\\mu=2,\end{cases}$所以伸缩变换为$\begin{cases}x'=3x,\\y'=2y.\end{cases}$变换过程为：先使圆$x^2+y^2=1$上的点的纵坐标不变，将圆上的点的横坐标伸长为原来的3倍，得到椭圆$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，再将该椭圆上的点的纵坐标伸长为原来的2倍，得到椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

13. **解**：(1)设$A'(x',y')$.
由伸缩变换φ：$\begin{cases}x'=3x,\\2y'=y\end{cases}$得$\begin{cases}x'=3x,\\y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$由于$A\left(\frac{1}{3},-2\right)$，于是$x'=3\times\frac{1}{3}=1,y'=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$，
所以点A'的坐标为$(1,-1)$.
(2)设$B(x,y)$.由伸缩变换φ：$\begin{cases}x'=3x,\\2y'=y\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{1}{3}x',\\y=2y'.\end{cases}$由于$B'\left(-3,\frac{1}{2}\right)$，于是$x=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$，$y=2\times\frac{1}{2}=1$，所以点$B$的坐标为$(-1,1)$.
(3)设直线l'上任意一点$P'(x',y')$.
将$\begin{cases}x=\frac{1}{3}x',\\y=2y'\end{cases}$代入$y=6x$得$2y'=6\times\left(\frac{1}{3}x'\right)$，所以$y'=x'$，所以直线$l'$的方程为$y'=x'$.
(4)设曲线C'上任意一点$P'(x',y')$.
将$\begin{cases}x=\frac{1}{3}x',\\y=2y'\end{cases}$代入$x^2-\frac{y^2}{64}=1$并化简得$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1$，
即$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1$为曲线$C'$的方程，可见$C'$仍是双曲线，且该双曲线的焦点坐标分别为$(5,0)$，$(-5,0)$.

14. **解**：(1)①由伸缩变换$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x,\\y'=\frac{1}{3}y\end{cases}$得$\begin{cases}x=2x',\\y=3y',\end{cases}$
将其代入$5x+2y=0$，得到经过伸缩变换后的图形的方程是$5x'+3y'=0$.
故经过伸缩变换后的图形为直线.
②将$\begin{cases}x=2x',\\y=3y'\end{cases}$代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，
得到经过伸缩变换后的图形的方程是$x'^2+y'^2=1$.
故经过伸缩变换后的图形为圆.
(2)设$P(x,y)$为曲线C上任意一点，
把$\begin{cases}x'=x,\\y'=4y\end{cases}$代入$x'^2+\frac{y'^2}{16}=1$，得$x^2+y^2=1$.故曲线$C$的方程为$x^2+y^2=1$.

二　极坐标系

1. 极坐标系的概念

1. A ［解析］4个选项中能表示点 M 的极坐标有3个，分别是B，C，D.

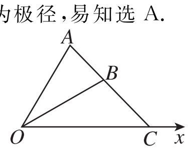
2. D ［解析］极坐标表示的极角的范围是任意实数，故极坐标 $\left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$ 表示的极角是 $\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

3. D ［解析］点 $A\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$ 与 $B\left(3,-\frac{\pi}{6}\right)$ 的极径相等，所以 A,B 两点在以极点 O 为圆心，3为半径的圆上，通过极角，可知 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$，由勾股定理，可得 $|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}=3\sqrt{2}$. 故选D.

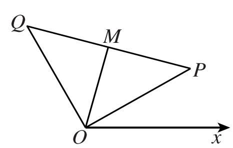
4. C ［解析］设点 M 关于直线 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ 对称的点为 N，则 $|ON|=|OM|$（O 为极点），$\angle xON=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$，所以点 N 的一个极坐标为 $\left(3,\frac{5\pi}{12}\right)$.

5. A ［解析］在极坐标系中，点到极点的距离为极径，易知选A.

6. B ［解析］如图所示，先在图形中找到直线 l 与极轴的夹角（要注意夹角是个锐角），然后根据点 A,B 的位置分析夹角的大小. 因为 $|AO|=|BO|=3$（O 为极点），$\angle AOB=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle OAB=\frac{\pi-\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{5\pi}{12}$，所以 $\angle ACO=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$.



7. D ［解析］如图所示，$|OP|=|OQ|=2$（O 为极点），$\angle POQ=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则 $|PQ|=2\sqrt{2}$，$|OM|=\frac{1}{2}|PQ|=\sqrt{2}$，$\angle xOM=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$，所以点 M 的极坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right)$.



8. D ［解析］由题意，得 $\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，$|AB|=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$，所以 $|OB|^2+|AB|^2=|OA|^2$ 且 $|AB|=|OB|=\sqrt{2}$，故 $\triangle OAB$ 为等腰直角三角形.

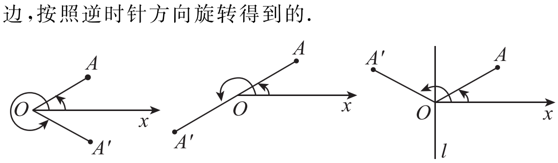
9. $\left(3,-\frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)$ ［解析］当 $\rho>0$，$-\pi<\theta\leqslant\pi$ 时，根据 $\frac{4\pi}{3}$ 与 $-\frac{2\pi}{3}$ 是终边相同的角，可得点 $A\left(3,\frac{4\pi}{3}\right)$ 的极坐标为 $\left(3,-\frac{2\pi}{3}\right)$；

当 $\rho<0$，$0<\theta\leqslant2\pi$ 时，根据点 $A\left(3,\frac{4\pi}{3}\right)$ 与点 $B\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$ 关于极点 O 对称，可得点 A 的极坐标为 $\left(-3,\frac{\pi}{3}\right)$.

10. $(1,0)$ 或 $(7,0)$ ［解析］设 $M(r,0)$，因为 $A\left(4\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\sqrt{(4\sqrt{2})^2+r^2-8\sqrt{2}r\cdot\cos\frac{\pi}{4}}=5$，即 $r^2-8r+7=0$，解得 $r=1$ 或 $r=7$. 故点 M 的极坐标为 $(1,0)$ 或 $(7,0)$.

11. (1) $\left(3,\frac{11\pi}{6}\right)$　(2) $\left(3,\frac{7\pi}{6}\right)$　(3) $\left(3,\frac{5\pi}{6}\right)$

［解析］如图所示，在对称的过程中极径的长度始终没有变化，主要是极角的变化. 另外，我们要注意：极角是以极轴 Ox 为始边，按照逆时针方向旋转得到的.



12. 解：(1)当 $\rho\geqslant0$，$\theta\in[0,2\pi)$ 时，点 $M\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$ 关于极轴的对称点 M' 的极坐标为 $\left(3,\frac{5\pi}{3}\right)$.

(2)当 $\rho\geqslant0$，$\theta\in\mathbf{R}$ 时，点 $M\left(3,\frac{\pi}{3}\right)$ 关于极轴的对称点 M' 的极坐标为 $\left(3,2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

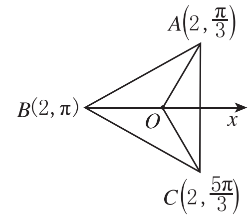
13. 解：(1)如图所示，由 $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$B(2,\pi)$，$C\left(2,\frac{5\pi}{3}\right)$ 得，

$|OA|=|OB|=|OC|=2$（O 为极点），$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore\triangle AOB\cong\triangle COB\cong\triangle AOC$，

$\therefore|AB|=|BC|=|CA|$，

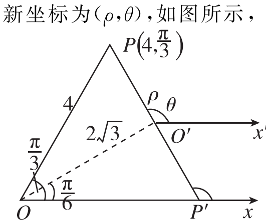
故 $\triangle ABC$ 为等边三角形.



(2)由上述可知，$|AC|=2|OA|\sin\frac{\pi}{3}=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$.

14. 解：(1)设点 P 的新坐标为 (ρ,θ)，如图所示，



由题意可知 $|OO'|=2\sqrt{3}$，$|OP|=4$，$\angle POx=\frac{\pi}{3}$，

$\angle O'Ox=\frac{\pi}{6}$，$\therefore\angle POO'=\frac{\pi}{6}$.

在 $\triangle POO'$ 中，由余弦定理得 $\rho^2=4^2+(2\sqrt{3})^2-2\times4\times2\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6}=16+12-24=4$，$\therefore\rho=2$.

又由正弦定理得 $\frac{\sin\angle OPO'}{2\sqrt{3}}=\frac{\sin\angle POO'}{2}$，

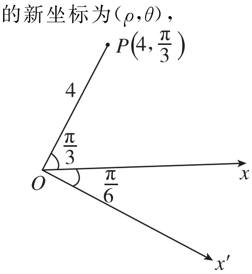
$\therefore\sin\angle OPO'=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2}\times2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\angle OPO'=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore\angle OP'P=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\angle PP'x=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\angle PO'x'=\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore$ 点 P 的新坐标为 $\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$.

(2)如图，设点 P 的新坐标为 (ρ,θ)，



则 $\rho=4$，$\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$. $\therefore$ 点 P 的新坐标为 $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$.

2. 极坐标和直角坐标的互化

1. C ［解析］在相应的极坐标系中，$\rho=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，由于点 P 位于第四象限，且极角满足 $\tan\theta=\frac{y}{x}=-\sqrt{3}$，所以 $\theta=-\frac{\pi}{3}$.

2. A ［解析］因为 $x=2\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$，$y=2\sin\dfrac{3\pi}{2}=-2$，所以极坐标 $\left(2,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 化成直角坐标为 $(0,-2)$. 故选 A.

3. B ［解析］易知线段 AB 中点的极坐标为 $\left(1,\dfrac{4}{3}\pi\right)$，根据互化公式，得 $x=\rho\cos\theta=\cos\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$y=\rho\sin\theta=\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此，所求直角坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. A ［解析］曲线 C：$\rho=2\cos\theta$ 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，由圆心 $(1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}<1$，解得 $k<-\dfrac{3}{4}$.

5. $\sqrt{2}$ ［解析］曲线 l：$\rho\sin\theta=\rho\cos\theta+2$ 的直角坐标方程为 $y=x+2$，因此 l 为一条直线，由点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，得 $|OA|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

6. 一 ［解析］根据互化公式，得 $y=\rho\sin\theta=\sin 1>0$，$x=\rho\cos\theta=\cos 1>0$，所以极坐标为 $(1,1)$ 的点位于直角坐标系中的第一象限.

7. $(-1,-\sqrt{3})$ ［解析］由于 $M(-1,\sqrt{3})$ 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$，向量 $\overrightarrow{OM}$ 绕极点（即原点 O）逆时针旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$ 得到向量 $\overrightarrow{OM'}$，则点 M' 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{4\pi}{3}\right)$，化成直角坐标为 $(-1,-\sqrt{3})$.

8. 2 ［解析］方法一：由极坐标和直角坐标的互化公式，得点 A,B 的直角坐标分别为 $(\sqrt{3},1)$，$(\sqrt{3},-1)$. 由两点之间的距离公式知，$|AB|=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+[1-(-1)]^2}=2$，∴$A,B$ 两点间的距离为 2.
方法二：由 A,B 两点的极坐标可知，在 $\triangle ABO$（O 为极点）中，$|OA|=|OB|=2$，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，根据余弦定理得
$|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cos\angle AOB=4+4-2\times2\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=4$，即 $|AB|=2$，
故 A,B 两点间的距离是 2.

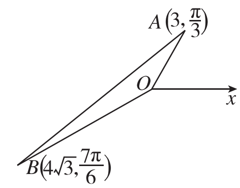
9. $(-3,4)$ ［解析］∵$\tan\theta=-\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，∴$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，
∴$x=5\cos\theta=-3$，$y=5\sin\theta=4$，∴点 M 的直角坐标为 $(-3,4)$.

10. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{11}$ ［解析］将 A,B 两点的极坐标化为直角坐标，分别为 $(1,\sqrt{3})$，$(2\sqrt{3},2)$，则 $k_{AB}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}=\dfrac{3\sqrt{3}-4}{11}$.

11. **解**：由极坐标和直角坐标的互化公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 可得 A,B 两点的直角坐标分别为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$(-3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$，因此可求得直线 AB 的方程为 $\dfrac{y-\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\dfrac{x+\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}$，即 $y=2x+3\sqrt{2}$，可求出直线 AB 与 x 轴的交点为 $M\left(-\dfrac{3}{2}\sqrt{2},0\right)$，化成极坐标为 $\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\pi\right)$.

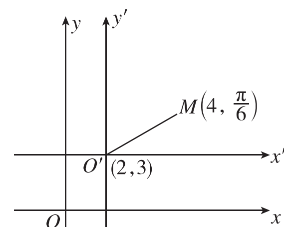
12. **解**：(1) 易求得 M 的直角坐标为 $(1,-\sqrt{3})$，N 的直角坐标为 $(2,0)$，P 的直角坐标为 $(3,\sqrt{3})$.
(2) ∵$k_{MN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2-1}=\sqrt{3}$，$k_{NP}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{3-2}=\sqrt{3}$，∴$k_{MN}=k_{NP}$，
∴M,N,P 三点在同一条直线上.

13. **解**：(1) 如图所示，



$\angle AOB=\dfrac{7\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}$，
所以 $|AB|^2=3^2+(4\sqrt{3})^2-2\times3\times4\sqrt{3}\cos\dfrac{5\pi}{6}=93$，
所以 $|AB|=\sqrt{93}$.
(2) $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times3\times4\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=3\sqrt{3}$.

14. **解**：如图所示.



设 M 在直角坐标系 $x'O'y'$ 中的坐标为 (x',y')，
则 $x'=4\cos\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，$y'=4\sin\dfrac{\pi}{6}=2$，
设 M 在原直角坐标系中的坐标为 (x,y)，
则 $x=x'+2=2\sqrt{3}+2$，$y=y'+3=5$，
∴点 M 的直角坐标是 $(2\sqrt{3}+2,5)$.

三 简单曲线的极坐标方程

1. 圆的极坐标方程

2. 直线的极坐标方程

1. D ［解析］将极坐标方程化为直角坐标方程，分别为 $x^2+y^2=x$ 和 $x^2+y^2=y$，它们的圆心分别是 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 和 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，故两圆的圆心距是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. C ［解析］因为 $(\rho-1)(\theta-\pi)=0(\rho\geqslant0)$，所以 $\rho=1(\rho\geqslant0)$ 或 $\theta=\pi(\rho\geqslant0)$，利用互化公式，$\rho=1(\rho\geqslant0)$ 即可转化为 $x^2+y^2=1$，表示一个圆；$\theta=\pi(\rho\geqslant0)$ 即可转化为 $y=0(x\leqslant0)$，表示一条射线. 故选 C.

3. B ［解析］由曲线 $\rho=4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$，可得 $\rho=2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$，所以 $\rho^2=2\rho\sin\theta-2\sqrt{3}\rho\cos\theta$，其直角坐标方程为 $x^2+y^2=2y-2\sqrt{3}x$，它表示圆心坐标为 $(-\sqrt{3},1)$，半径为 2，且经过原点的圆，又经过圆的圆心与原点的直线的倾斜角为 $\dfrac{5\pi}{6}$，所以在极坐标系中，曲线 $\rho=4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 关于直线 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$ 对称.

4. B ［解析］曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，其表示一个圆，直线 C_2 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y-m=0$，由题意知直线与圆相交，且曲线 C_1 的圆心 $(1,\sqrt{3})$ 到直线 C_2 的距离为 1，则 $\dfrac{|1+3-m|}{\sqrt{1+3}}=1$，故 $m=2$ 或 6. 故选 B.

5. $\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$ ［解析］由 $\rho\cos\theta=3$，$\rho=4\cos\theta$，得 $4\cos^2\theta=3$. 又 $0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}$，∴$\cos\theta>0$，∴$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，∴$\rho=2\sqrt{3}$，∴两曲线交点的极坐标为 $\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

6. 相交 ［解析］因为圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$，所以化成直角坐标方程为 $x^2+y^2=2y$，即 $x^2+(y-1)^2=1$，因此圆心到直线的距离 $d=\dfrac{0}{\sqrt{5}}<1$，所以直线 l 与圆 C 相交.

7. $2-\sqrt{3}$ ［解析］极坐标系中点 $\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 对应的直角坐标为 $(\sqrt{3},$

1)．极坐标系中直线 $\rho\cos\theta=2$ 对应直角坐标系中直线 $x=2$．故所求距离为 $2-\sqrt{3}$．

8．$(x^2+y^2)(y-1)=0$　［解析］由 $\rho^2\sin\theta-\rho=0$，得 $\rho(\rho\sin\theta-1)=0$，即 $\rho^2(\rho\sin\theta-1)=0$，化为直角坐标方程是 $(x^2+y^2)(y-1)=0$．

9．$\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$　［解析］根据互化公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得点 $A\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ 的直角坐标为 $(0,2)$，直线 l：$\rho\cos\theta=1$ 的直角坐标方程为 $x=1$，所以点 $(0,2)$ 关于直线 l：$x=1$ 对称的点的坐标为 $(2,2)$，化成极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$．

10．$1+\sqrt{2}$　［解析］方法一：将直线与圆的极坐标方程化为直角坐标方程，分别为 $x+y=a$ 与 $(x-1)^2+y^2=1$．∵直线与圆相切，

∴ $\frac{|1-a|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $a=1\pm\sqrt{2}$，又∵ $a>0$，∴ $a=1+\sqrt{2}$．

方法二：将圆的极坐标方程代入直线的极坐标方程，得 $2\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta=a$，即 $\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)=a-1$，∵直线与圆相切，

∴ $a-1=\pm\sqrt{2}$，又∵ $a>0$，∴ $a=1+\sqrt{2}$．

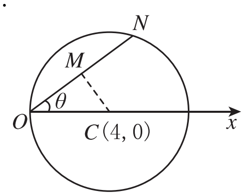
11．**解**：如图所示，圆心 $C(4,0)$，半径 $r=|OC|=4$，连接 CM．

∵ M 为弦 ON 的中点，

∴ $CM\perp ON$，

∴ M 在以 OC 为直径的圆上．

故动点 M 的轨迹方程是 $\rho=4\cos\theta$ $(\rho\neq0)$．



12．**解**：(1)圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，两边同时乘 ρ，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，又 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，所以 $x^2+y^2=2x$，于是圆 C 在直角坐标系下的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=1$．

(2)由题意得 $\theta=\frac{\pi}{6}$，设 $P(\rho_1,\theta)$，$Q(\rho_2,\theta)$，由圆 C 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta$ 得 $\rho_1=\sqrt{3}$，

由直线 l 的极坐标方程 $2\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=6\sqrt{3}$ 得 $\rho_2=3\sqrt{3}$，

从而 $|PQ|=|\rho_1-\rho_2|=2\sqrt{3}$．

13．**解**：(1)由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得 C_2 的直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=4$．

(2)由(1)知 C_2 是圆心为 $A(-1,0)$，半径为 2 的圆．

由题设知，C_1 是过点 $B(0,2)$ 且关于 y 轴对称的两条射线．记 y 轴右边的射线为 l_1，y 轴左边的射线为 l_2．

由于 B 在圆 C_2 的外面，故 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点等价于 l_1 与 C_2 只有一个公共点且 l_2 与 C_2 有两个公共点，或 l_2 与 C_2 只有一个公共点且 l_1 与 C_2 有两个公共点．

当 l_1 与 C_2 只有一个公共点时，A 到 l_1 所在直线的距离为 2，所以 $\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故 $k=-\frac{4}{3}$ 或 $k=0$．

经检验，当 $k=0$ 时，l_1 与 C_2 没有公共点；

当 $k=-\frac{4}{3}$ 时，l_1 与 C_2 只有一个公共点，l_2 与 C_2 有两个公共点．

当 l_2 与 C_2 只有一个公共点时，A 到 l_2 所在直线的距离为 2，所以 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，故 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$．

经检验，当 $k=0$ 时，l_1 与 C_2 没有公共点；

当 $k=\frac{4}{3}$ 时，l_2 与 C_2 没有公共点．

综上，所求 C_1 的方程为 $y=-\frac{4}{3}|x|+2$．

14．**解**：(1)曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=\sin\theta$，

两边同时乘 ρ，得 $\rho^2\cos^2\theta=\rho\sin\theta$，

故曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2=y$．

(2)射线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\geqslant0)$，$\frac{\pi}{6}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$，

把射线 l 的极坐标方程代入曲线 C_1 的极坐标方程得 $|OA|=\rho_A=4\cos\alpha$，

把射线 l 的极坐标方程代入曲线 C_2 的极坐标方程得 $|OB|=\rho_B=\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$，

∴ $|OA|\cdot|OB|=4\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=4\tan\alpha$．

∵ $\frac{\pi}{6}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$，∴ $\tan\alpha\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$，

∴ $|OA|\cdot|OB|$ 的取值范围是 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},4\right]$．

四　柱坐标系与球坐标系简介

1．柱坐标系

2．球坐标系

1．D　［解析］结合卫星的高度与地球的经纬度可知，最好运用球坐标系．

2．A　［解析］由空间点 P 的柱坐标 (ρ,θ,z) 与直角坐标 (x,y,z) 之间的变换公式得，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，此时点 P 在平面 yOz 内．故选 A．

3．C　［解析］设点 M 的柱坐标为 (ρ,θ,z)，其中 $\rho\geqslant0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，

∵点 M 的直角坐标为 $(\sqrt{3},1,-2)$，

∴ $\begin{cases}\sqrt{3}=\rho\cos\theta,\\ 1=\rho\sin\theta,\\ z=-2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\rho=2,\\ \theta=\frac{\pi}{6},\\ z=-2,\end{cases}$

∴ M 的柱坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{6},-2\right)$．

4．A　［解析］设点 M 的直角坐标为 (x,y,z)．

∵ $(r,\varphi,\theta)=\left(4,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，

∴ $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta=4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4}=-2,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4}=2,\\ z=r\cos\varphi=4\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2},\end{cases}$

∴点 M 的直角坐标为 $(-2,2,2\sqrt{2})$，

∴点 M 到 Oz 轴的距离为 $\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$．

5．C　［解析］将 P，Q 两点的球坐标化为直角坐标，得 $P\left(\frac{3\sqrt{6}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，$Q\left(\frac{3\sqrt{6}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，所以 $|PQ|=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}-\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3\sqrt{2}$．

6．D　［解析］根据高低角的概念，可知高低角为 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$．故选 D．

7．A　［解析］在球坐标系中，方程 $r=2$ 表示以原点 O 为球心，2 为半径的球面．

8．$\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{4}\right)$　［解析］由球坐标与直角坐标的变换公式，有 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$．

由 $r\cos\varphi=z$，得 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

由 $\tan\theta=\frac{y}{x}=-1$，且 $x>0$，$y<0$，得 $\theta=\frac{7\pi}{4}$，

故点 B 的球坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{4}\right)$．

9．$\sqrt{6}$　［解析］设点 M 在平面 Oxy 上的射影为 P，连接 PN(图略)，

则 PN 为线段 MN 在平面 Oxy 上的射影．

因为 $MN\perp$ 直线 Oy，$MP\perp$ 平面 Oxy，

所以 $PN\perp$ 直线 Oy，

所以 $|OP|=\rho=2$，$|PN|=\left|\rho\cos\frac{2\pi}{3}\right|=1$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle MNP$ 中，$\angle MPN=90°$，

所以 $|MN|=\sqrt{|PM|^2+|PN|^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}=\sqrt{6}$．

10. 1　[解析] ∵$A\left(1,\frac{\pi}{2},0\right)$，$B\left(1,\frac{\pi}{2},2\right)$，$O(0,0,0)$，

∴△ABO 为直角三角形，

∴$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|OA||AB|=\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

11. 解：在柱坐标系中，由已知 $A_1(2,0,3)$，$C\left(4,\frac{\pi}{2},0\right)$，得 $|OA|=2$，$|OO_1|=3$，$|OC|=4$，所以长方体的体对角线长为 $\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$，

故此长方体的外接球的半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{29}$，其表面积为

$4\pi\times\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2=29\pi$.

12. 解：设 P_1 的直角坐标为 (x,y,z)，

则 $x=r\sin\varphi\cos\theta=2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

$y=r\sin\varphi\sin\theta=2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

$z=r\cos\varphi=2\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

∴P_1 的直角坐标为 $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

易知 P_2 的直角坐标为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{15}}{2},1\right)$.

故 $|P_1P_2|^2=$

$\left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2+(\sqrt{3}-1)^2}\right)^2=$

$\left(\sqrt{18-\frac{3}{2}\sqrt{10}-\frac{3}{2}\sqrt{30}-2\sqrt{3}}\right)^2=$

$18-\frac{3}{2}\sqrt{10}-\frac{3}{2}\sqrt{30}-2\sqrt{3}$.

13. 解：点 C_1 的直角坐标为 $(1,1,1)$，

设点 C_1 的柱坐标为 (ρ,θ,z)，球坐标为 (r,φ,θ)，

其中 $\rho\geqslant0$，$r\geqslant0$，$z\in\mathbf{R}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta<2\pi$，

由公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\\z=z\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\y=r\sin\varphi\sin\theta,\\z=r\cos\varphi,\end{cases}$

得 $\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq0)\end{cases}$ 及 $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\\cos\varphi=\frac{z}{r},\end{cases}$

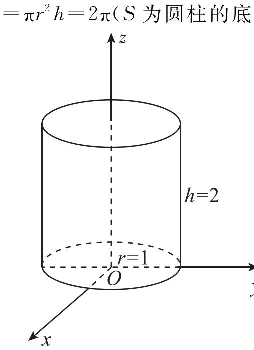
得 $\begin{cases}\rho=\sqrt{2},\\\tan\theta=1\end{cases}$ 及 $\begin{cases}r=\sqrt{3},\\\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 结合图形得 $\theta=\frac{\pi}{4}$，由 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $\tan\varphi=\sqrt{2}$，

∴点 C_1 的直角坐标为 $(1,1,1)$，柱坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},1\right)$，球坐标为 $\left(\sqrt{3},\varphi,\frac{\pi}{4}\right)$，其中 $\tan\varphi=\sqrt{2}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

14. 解：根据柱坐标系与点的柱坐标的意义可知，

动点 $M(\rho,\theta,z)$ 围成的几何体为圆柱，如图所示，圆柱的底面半径 $r=1$，高 $h=2$，

∴体积 $V=Sh=\pi r^2h=2\pi$（S 为圆柱的底面积）.



滚动习题（一）

1. A　[解析] 点 P 的直角坐标为 $(-3,3)$，所以其极坐标为 $\left(3\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi\right)$.

2. D　[解析] 圆 $x^2+y^2=4$ 化为 $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$，即 $\left(\frac{x'}{2}\right)^2+\left(\frac{y'}{2}\right)^2=1$，令 $\begin{cases}x'=\lambda x,\\y'=\mu y\end{cases}(\lambda>0,\mu>0)$，代入圆的方程可得 $\frac{(\lambda x)^2}{4}+\frac{(\mu y)^2}{4}=1$，即 $\frac{x^2}{\frac{4}{\lambda^2}}+\frac{y^2}{\frac{4}{\mu^2}}=1$，与 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{8}=1$ 比较系数，得 $\begin{cases}\frac{4}{\lambda^2}=10,\\\frac{4}{\mu^2}=8,\end{cases}$ 所以 $\lambda=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，$\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $\begin{cases}\sqrt{5}x'=\sqrt{2}x,\\\sqrt{2}y'=y.\end{cases}$ 故选 D.

3. C　[解析] $\rho=a\sin\theta$ 化成直角坐标方程为 $x^2+y^2=ay$，即 $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$，显然该方程所表示的曲线是以 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{a}{2}$ 为半径的圆.

4. D　[解析] 由于动点 M 满足 $\rho=1(\theta\in[0,\pi])$，因此动点 M 的轨迹是以极点为圆心，1 为半径的圆的上半部分，即半圆.

5. C　[解析] 由 $\rho^2\sin2\theta=2$，得 $\rho^2\sin\theta\cos\theta=1$，又由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $xy=1$，即 $y=\frac{1}{x}$，所以其表示的曲线是双曲线. 故选 C.

6. D　[解析] 将极坐标方程化为直角坐标方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，经过伸缩变换后为 $x'^2+y'^2=1$，所以得到的曲线是圆.

7. D　[解析] 因为 $\rho=8\sin\theta$，所以 $\rho^2=8\rho\sin\theta$，结合 $\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$ 可得圆的直角坐标方程为 $x^2+y^2-8y=0$，圆心为 $(0,4)$，半径 $r=4$.

直线 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$ 化成直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$，圆心到直线的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{1+3}}=2$，所以圆上的点到直线的距离的最大值为 6. 故选 D.

8. $\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$　[解析] 设点 M 的直角坐标为 (x,y,z)，

∵点 M 的柱坐标为 $\left(\sqrt{2},\frac{5}{4}\pi,\sqrt{2}\right)$，

∴$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4},\\y=\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4},\\z=\sqrt{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\\z=\sqrt{2},\end{cases}$

∴点 M 的直角坐标为 $(-1,-1,\sqrt{2})$.

设点 M 的球坐标为 (r,φ,θ)，其中 $r\geqslant0$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta<2\pi$，

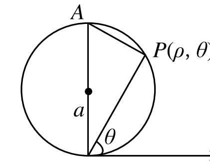
∴$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=2$，则

$\begin{cases}-1=r\sin\varphi\cos\theta,\\-1=r\sin\varphi\sin\theta,\\\sqrt{2}=r\cos\varphi,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{4},\\\theta=\frac{5\pi}{4},\end{cases}$

∴点 M 的球坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

9. $\rho=2a\sin\theta$　[解析] 如图所示，O 为极点，圆的直径为 $2a$，且 OA 为直径，在圆上任取一点 $P(\rho,\theta)$，则 $\angle AOP=\frac{\pi}{2}-\theta$ 或 $\theta-\frac{\pi}{2}$，所以 $|OP|=2a\cos\angle AOP$，即 $\rho=2a\cos\left|\theta-\frac{\pi}{2}\right|=2a\sin\theta$.



10. $\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=\frac{1}{2}y\end{cases}$ [解析] 设直线 $2x+3y-1=0$ 上任一点的坐标为(x,y),经伸缩变换后对应点的坐标为(x',y').设坐标变换公式为$\begin{cases}x'=kx,\\ y'=hy\end{cases}(k>0,h>0)$,即$\begin{cases}x=\frac{1}{k}x',\\ y=\frac{1}{h}y'\end{cases}(k>0,h>0)$,将其代入直线方程 $2x+3y-1=0$,得 $\frac{2}{k}x'+\frac{3}{h}y'-1=0$,将其与 $6x'+6y'-1=0$ 比较系数,得 $k=\frac{1}{3}$,$h=\frac{1}{2}$.因此坐标变换公式为$\begin{cases}x'=\frac{1}{3}x,\\ y'=\frac{1}{2}y.\end{cases}$

11. $\sqrt{2}$ [解析] 先将极坐标方程 $\rho=2\sin\theta$ 化为 $\rho^2=2\rho\sin\theta$,再将其化成直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$,即 $x^2+(y-1)^2=1$,其圆心坐标为$(0,1)$,$(1,0)$的直角坐标仍然是$(1,0)$,所以圆心$(0,1)$与点$(1,0)$之间的距离为 $\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$.

12. 解:在 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 中,令 $\theta=0$,得 $\rho=1$,
所以圆心的极坐标为$(1,0)$.
因为圆 C 经过点 $P\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$,
所以圆 C 的半径为
$|PC|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2-2\times1\times\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}=1$,
于是圆 C 过极点,所以圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.

13. 解:圆 C:$\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{2}x=0$,即$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$.
直线 l:$\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$的直角坐标方程为 $y=x$.
圆心 $C(\sqrt{2},0)$到直线 l 的距离 $d=\frac{|\sqrt{2}-0|}{\sqrt{2}}=1$,
所以 $|AB|=2\times\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=2$.

14. 解:(1)设 $M(\rho,\theta)$是圆 C 上任意一点,
在$\triangle OCM$ 中,$\angle COM=\left|\theta-\frac{\pi}{3}\right|$,
由余弦定理得 $|CM|^2=|OM|^2+|OC|^2-2|OM||OC|\cdot\cos\angle COM$,
$\therefore 3^2=\rho^2+3^2-2\times3\times\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$,
即 $\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$为圆 C 的极坐标方程.
(2)设点 $Q(\rho_1,\theta_1)$,点 $P(\rho,\theta)$,
由$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{QP}$得$\overrightarrow{OQ}=2(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ})$,
$\therefore\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OP}$,$\therefore\rho_1=\frac{2}{3}\rho$,$\theta_1=\theta$,
将点 Q 的坐标代入圆 C 的极坐标方程得 $\frac{2}{3}\rho=6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$,
即 $\rho=9\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$为动点 P 的轨迹方程.

第二讲 参数方程

一 曲线的参数方程

1. 参数方程的概念

2. 圆的参数方程

1. A [解析] 只有①是参数方程.

2. D [解析] 令 $x=t-1=0$,得 $t=1$,则 $y=t+2=3$;令 $y=t+2=0$,得 $t=-2$,则 $x=t-1=-3$.所以曲线与两坐标轴的交点坐标分别为$(-3,0)$,$(0,3)$,故选 D.

3. B [解析] 因为圆心为原点 O,半径为 r 的圆的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),所以圆心在原点 O,半径为 3 的圆的参数方程为$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).故选 B.

4. D [解析] 将 $t=\frac{1}{x}$代入 $y=\frac{1}{t}\sqrt{t^2-1}$,化简整理得 $x^2+y^2=1$,同时 $x\neq0$,且 x,y 的符号一致,故选 D.

5. $\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ [解析] 由点$(-3,-3\sqrt{3})$在参数方程$\begin{cases}x=6\cos\theta,\\ y=6\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数)表示的曲线上,得$\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2},\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$解得 $\theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

6. 2 或 0 [解析] 当 $y=1$ 时,$t^2=1$,$\therefore t=\pm1$.
当 $t=1$ 时,$x=2$;当 $t=-1$ 时,$x=0$.
故 x 的值为 2 或 0.

7. $\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ [解析] 由 $y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$ 知,当炮弹达到最高点时,$t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$,此时 $x=v_0\cos\alpha\cdot\frac{v_0\sin\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$.

8. $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数) [解析] 由圆的方程可得圆心坐标为$(2\cos\theta,\sin\theta)$,所以圆心轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

9. 2 [解析] 由圆 C 的参数方程可知,其圆心坐标为$(-1,2)$,半径为 2,所以圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|3\times(-1)+4\times2-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{7}{5}<2$,从而直线 l 与圆 C 相交,故有 2 个交点.

10. $\begin{cases}x=\cos^2\theta,\\ y=\sin\theta\cos\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数) [解析] 将 $x^2+y^2-x=0$ 配方,得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$,$\therefore$ 圆的直径为 1.设 $P(x,y)$,则 $x=|OP|\cos\theta=1\cdot\cos\theta\cdot\cos\theta=\cos^2\theta$,
$y=|OP|\sin\theta=1\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$,
$\therefore$圆 $x^2+y^2-x=0$ 的参数方程为
$\begin{cases}x=\cos^2\theta,\\ y=\sin\theta\cos\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

11. 解:(1)将圆的一般方程化为标准方程为 $x^2+(y-1)^2=1$,得到圆的圆心坐标为$(0,1)$,可设圆的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),
则 $2x+y=2\cos\theta+\sin\theta+1=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+1$,其中 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$,
$\therefore-\sqrt{5}+1\leqslant 2x+y\leqslant\sqrt{5}+1$.
(2)不等式 $x+y+a=\cos\theta+\sin\theta+1+a\geqslant0$ 有解,
可以转化为 $a\geqslant[-(\cos\theta+\sin\theta)-1]_{\min}$.
又$-(\cos\theta+\sin\theta)-1=-\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1\geqslant-\sqrt{2}-1$,
$\therefore a\geqslant-\sqrt{2}-1$.

12. 解:(1)$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$可化为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=4$,
$\therefore$直线 l 的直角坐标方程为 $x+y=4$.
(2)设点 P 的坐标为$(2\cos\alpha,\sin\alpha)$,
则点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2\cos\alpha+\sin\alpha-4|}{\sqrt{2}}$,
即 $d=\frac{|\sqrt{5}\sin(\alpha+\varphi)-4|}{\sqrt{2}}$,其中 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$.